VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA
SUBOTICA

ROBOTIKA

Direktan kinematički problem

Dr. Janoš Šimon dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

Denavit Hartenbergov postupak

- Za transformaciju unutrašnjih koordinata u spoljašnje primenjujemo Denavit-Hartenbergovu transformacionu matricu.
- Navedeni postupak Denavit i Hartenberg publikovali su 1955 god. i zato je i nazvan kao Denavit-Hartenbergovu transformaciona matrica.
- Suština postupka je to da dva proizvoljna koordinatna sistema se uvek mogu dovesti do preklapanja sa dve rotacije i dve translacije.

Denavit Hartenbergov postupak

- Posmatrajmo prost, otvoren kinematički lanac sa n segmenata. Svaki segment se opisuje sa sledećim parametrima:
- dužinom a_i zajedničke normale između osa i-tog i i+1-og zgloba,
- uglom zaokretanja α_i između osa i-tog i i+1-og zgloba u ravni upravnoj na a_i – po pravilu desne ruke,
- svaka osa zgloba ima dve normale a_{i-1} i a_i, rastojanje između njih duž ose i-tog zgloba označićemo sa d_i.

Denavit Hartenbergov postupak

- Za rešavanje direktnog kinematičkog problema tj. za transformaciju unutrašnjih koordinata u spoljašnje potrebno je odrediti Denavit-Hartenbergovu matricu transformacije (D matrica), u tom cilju na svaki rotacioni zglob segmenta postavimo po jedan pravougli koordinatni sistem i to prema sledećim pravilima:

1.- Koordinatni početak O_i,x_i, y_i, z_i se postavlja u tačku preseka zajedničke normale između ose i-tog i i+1-og zgloba i same ose i+1-og zgloba. U slučaju ako se ose zglobova seku, koordinatni početak O_i,x_i, y_i,z_i se postavlja u tačku preseka osa,

osa z_i se poklapa sa osom i+1-og zgloba,

osa x_i se postavlja duž zajedničke normale između osa i-tog i i+1-og zgloba i orijentisana je od i-tog ka i+1-om zglobu.

osa y_i zadovoljava uslov: $x_i * y_i = z_i$.

Denavit Hartenbergov postupak

- 2.- Koordinatni početak $O_{i-1}x_{i-1}\ y_{i-1}\ z_{i-1}$ se postavlja u tačku preseka zajedničke normale između osa i-1-og i i-tog zgloba i same ose i-tog zgloba,

osa z_{i-1} se postavlja u pravcu ose zgloba i,

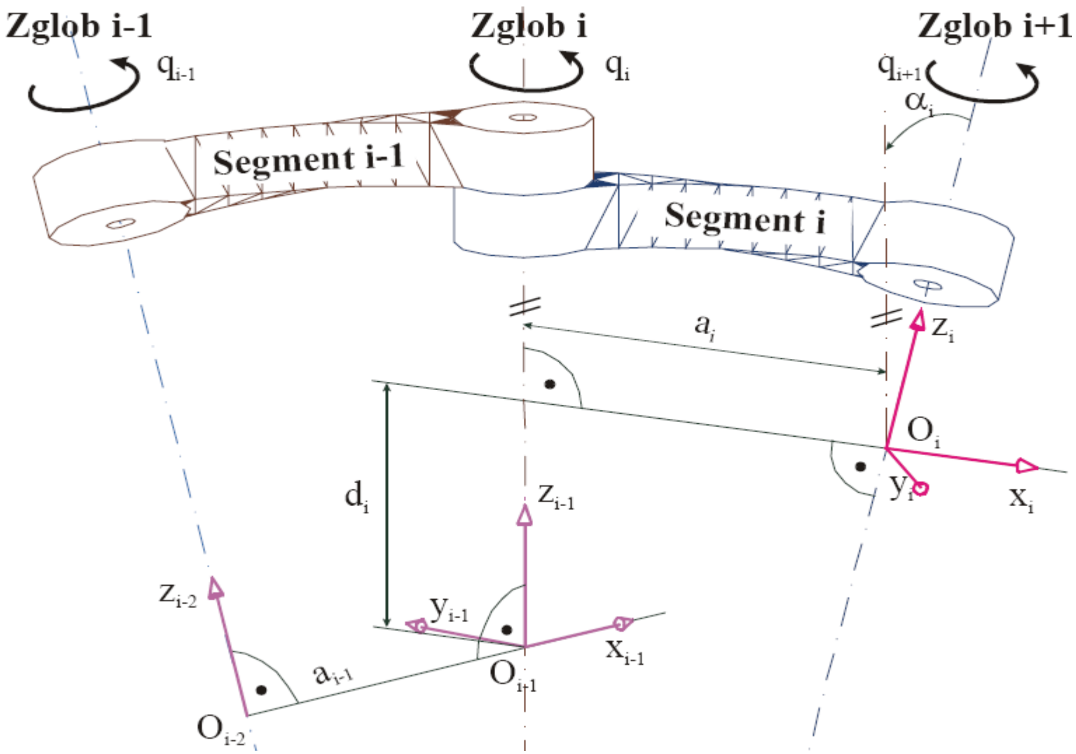
osa x_{i-1} se postavlja duž zajedničke normale između osa i-1-og i i-tog zgloba i orijentisana je od i-1-og ka i-tom zglobu,

osa y_{i-1} zadovoljava uslov: $x_i \times y_i = z_i$.

Unutrašnja koordinata q_i rotacionog zgloba je ugao između osa x_{i-1} i x_i (pravilo desne ruke), jednaka je nuli kada su ose paralelne ili imaju isti smer. Ugao zakretanja α_i se meri od ose z_{i-1} do z_i, tj. kao ugao zaokretanja oko ose x_i (po pravilu desne ruke).

Veličine α_i, a_i i d_i (i = 1,2,...,n) se zovu Denavit-Hartenbergovi kinematički parametri.

Denavit Hartenbergov postupak

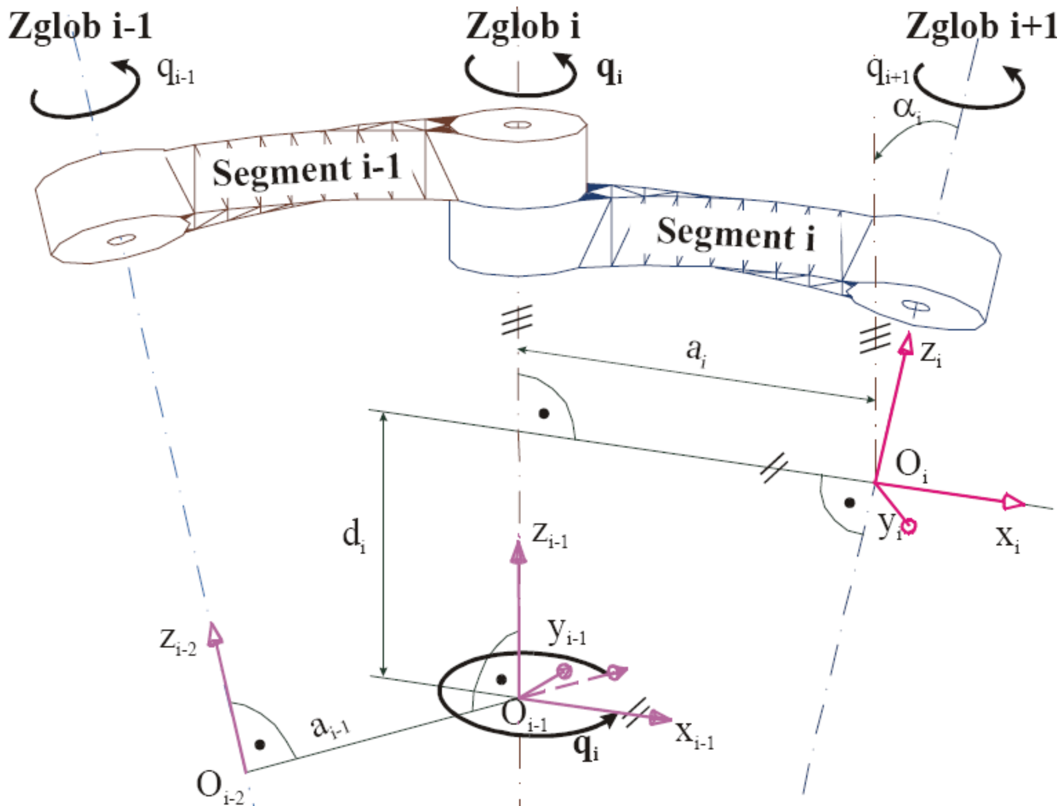


Slika 1. Koordinatni sistemi po Denavit-Hartenbergovom postupku

Koordinatni sistem $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ može sada sa dve translacije i dve rotacije preklopiti sa koordinatnim sistemom $O_ix_iy_iz_i$ i to prema sledećim fazama:

Denavit Hartenbergov postupak

- 1. Rotacija ose x_{i-1} oko ose z_{i-1} ugao q_i (za translatorni zglob θ_i), sada osa x_{i-1} postaje paralelna sa osom x_i.
- Ova rotacija se može opisati sa sledećom homogenom matricom transformacije:

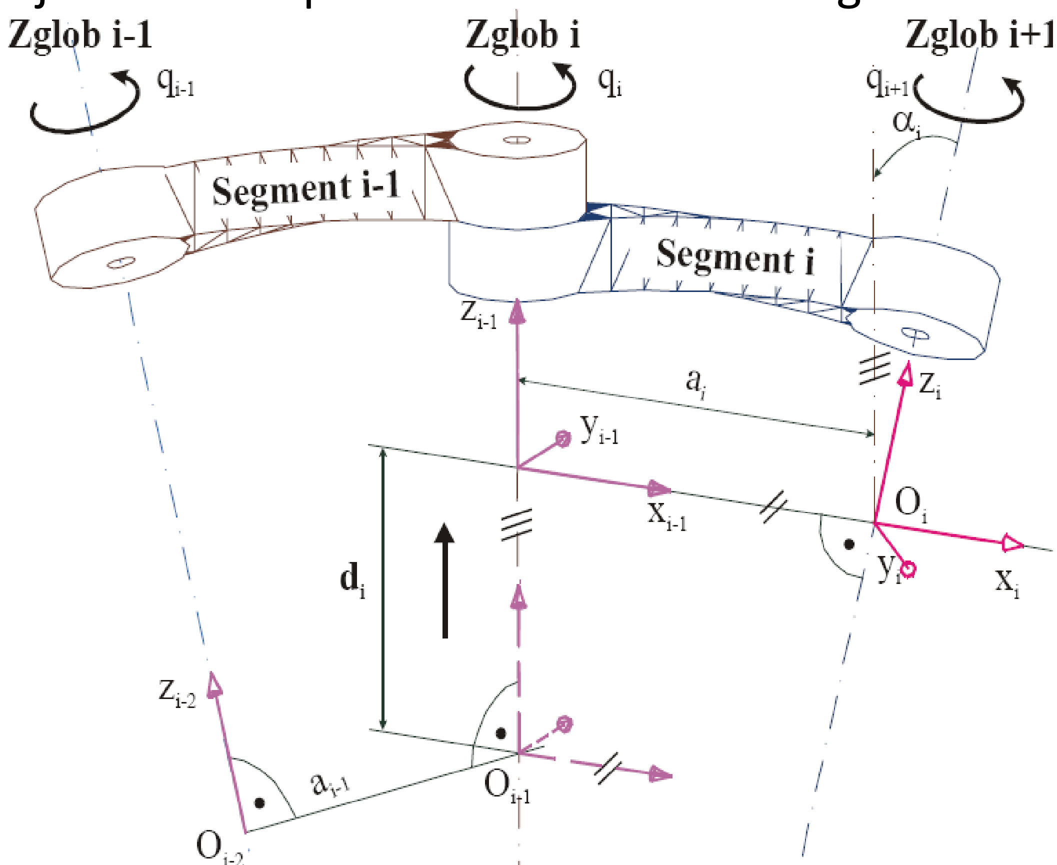


Slika 2. Prikaz rotacije koordinatnog sistema Oi-1xi-1yi-1zi-1 za qi

$$\mathbf{D}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit Hartenbergov postupak

- 2. Translacija za d_i (q_i za translatorni zglob) duž ose z_{i-1} do preseka osa z_{i-1} i x_i, sada osa x_{i-1} se poklapa sa osom x_i.
- Ova translacija se može opisati sa sledećom homogenom matricom transformacije:

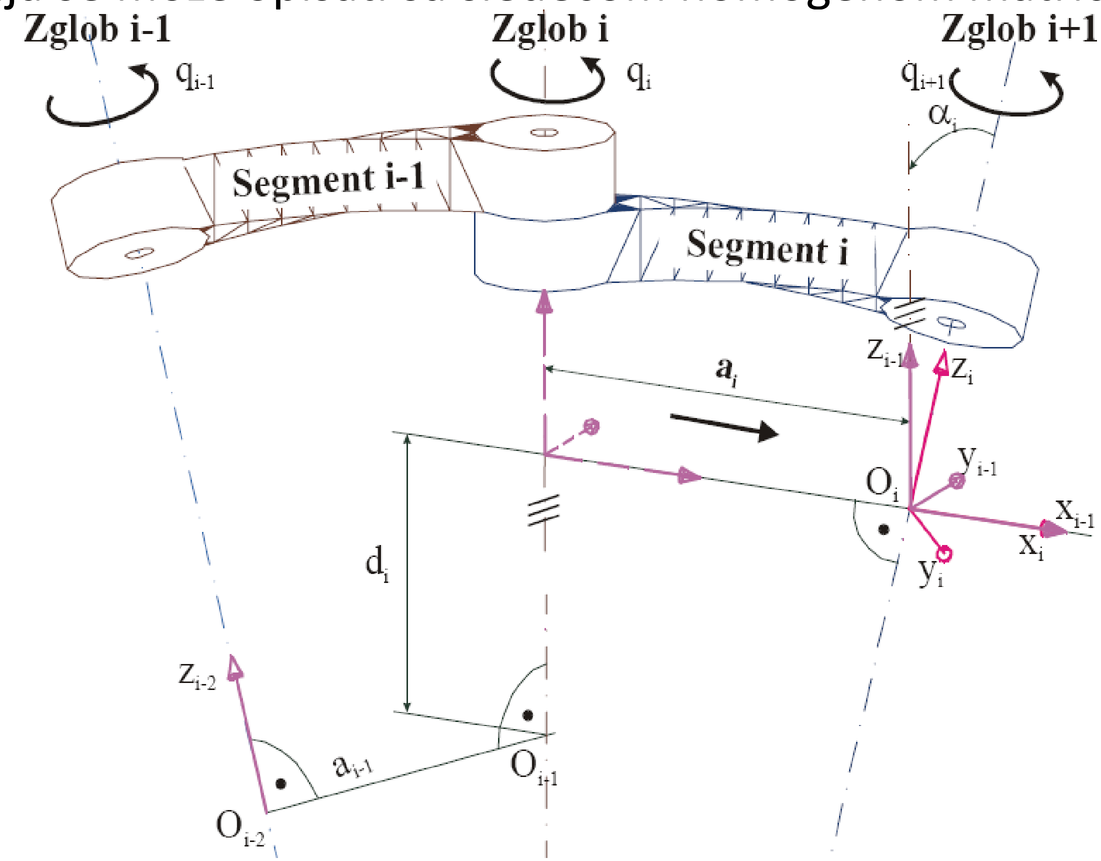


$$\mathbf{D}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 3. Prikaz translacije rotiranog koordinatnog sistema $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ za d_i

Denavit Hartenbergov postupak

- 3. Translacija duž ose x_{i-1} za a_i (dolazi do preklapanja početaka koordinatnih sistema.
- Ova translacija se može opisati sa sledećom homogenom matricom transformacije:

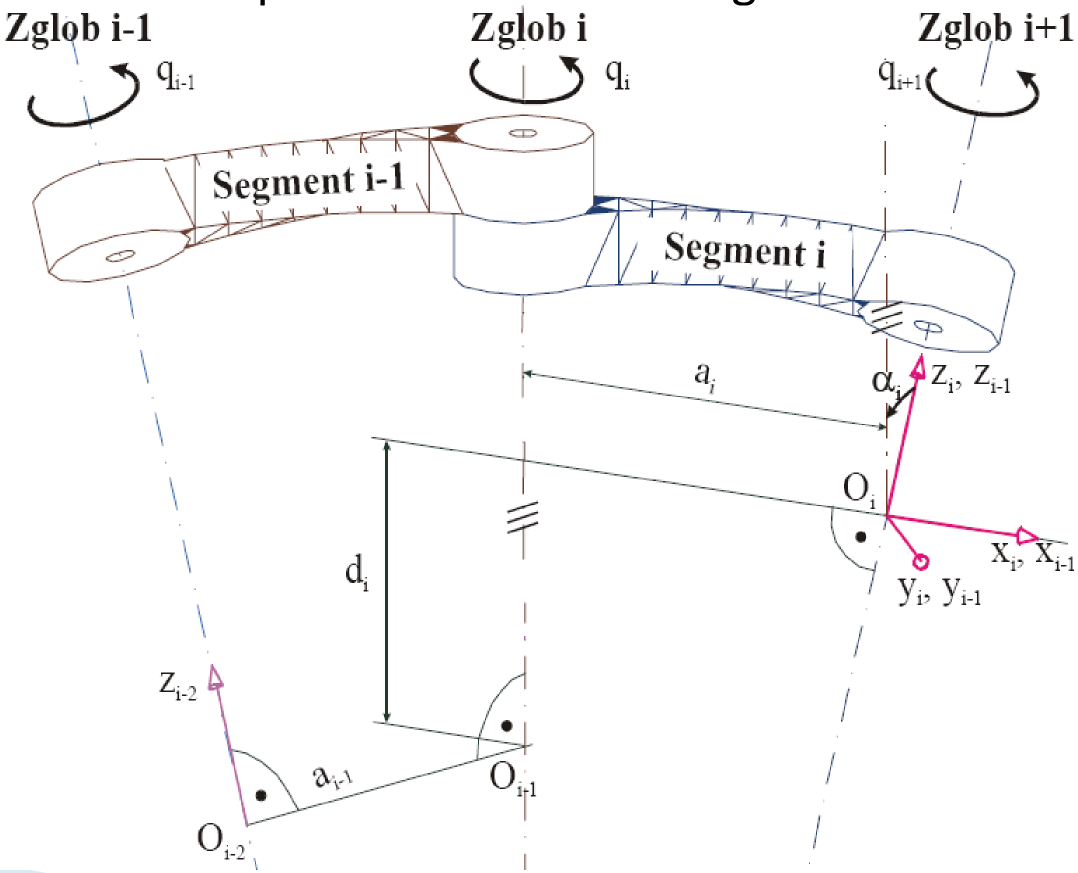


$$\mathbf{D}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 4. Prikaz translacije koordinatnog sistema $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}y_{i-1}$ za a_i

Denavit Hartenbergov postupak

- 4. Rotacija oko ose x_i za ugao α_i (po pravilu desne ruke), dolazi do preklapanja koordinatnih sistema $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ i $O_i x_i y_i z_i$.
- Ova rotacija se može opisati sledećom homogenom matricom transformacije:



$$D(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 5. Prikaz rotacije koordinatnog sistema za ugao α_i

Denavit Hartenbergov postupak

- Prikazani niz transformacija i rotacija se može predstaviti kao proizvod sledećih homogenih matrica transformacije D:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \mathbf{D}(q_i)\ \mathbf{D}(d_i)\ \mathbf{D}(a_i)\ \mathbf{D}(\alpha_i)$$

Zamenom matrica i množenjem dobijamo Denavit-Hartenbergovu homogenu matricu transformacije između i-tog i i-1-og koordinatnog sistema koji odgovara **rotacionom** kinematičkom paru:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit Hartenbergov postupak

- U slučaju translatornog kinematičkog para koordinatni sistemi se usvajaju tako da je $a_i = 0$, rastojanje di postaje unutrašnja koordinata q_i, a ono što je kod rotacionog zgloba ugao zakretanja q_i sada postaje fiksan parametar označen sa θ_i , tj.:

$$a_i = 0$$

$$d_i = q_i$$

$$q_i = \theta_i$$

Tako da homogena matrica transformacije u slučaju **translatornog** kinematičkog para glasi:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit Hartenbergov postupak

- Kada su poznate D homogene matrice transformacije između susednih segmenata, tada homogena matrica transformacije između nepokretnog koordinatnog sistema (vezanog za bazu manipulacionog robota) i koordinatnog sistema hvataljke (n-tog sistema) se dobija kao proizvod D homogenih matrica transformacije između susednih segmenata:

$$ {}^{0}T_{n} = {}^{0}D_{1}\,{}^{1}D_{2}\,{}^{2}D_{3} \ldots {}^{n-2}D_{n-1}\,{}^{n-1}D $$

Prve tri kolone homogene matrice transformacije ${}^{o}T_{n}$ predstavljaju matricu rotacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema manipulacionog robota a četvrta kolona matrice ${}^{o}T_{n}$ predstavlja projekciju vektora položaja hvataljke robota u nepokretnom koordinatnom sistemu tj. Dekartove koordinate vrha manipulatora (pošto se koordinatni početak n-tog sistema smešta na vrh hvataljke).

$$ {}^{0}\mathbf{T}_{n} = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}\mathbf{R}_{n} & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Denavit Hartenbergov postupak

- Na taj način, kada se odrede Dekartove koordinate vrha hvataljke i tri Eulerova ugla tada je u potpunosti rešen direktan kinematički problem.
- Prema tome može se konstatovati da određivanje matrice ${}^{o}T_n$ za zadati vektor unutrašnjih koordinata predstavlja, osnovni deo direktnog kinematičkog problema. Određivanje Eulerovih uglova za zadatu matricu ${}^{o}T_n$ ne zavisi od tipa manipulacionog robota.

Određivanje orijentacije hvataljke

Dr. Janoš Šimon dipl. ing.
simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

Određivanje orijentacije hvataljke

Orijentacija hvataljke manipulacionog robota u odnosu na nepokretan koordinatni sistem vezanog za bazu robota vrši se preko tri modifikovana Eulerova ugla ψ, θ, φ.

Posmatrajmo dva koordinatna sistema i rotaciju između njih:

- koordinatni sistem $Ox_oy_oz_o$ je **nepokretan** i vezan za bazu robota,
- koordinatni sistem O_nxyz je **pokretan** i pridružen hvataljci robota.

ψ – (psi) - **ugao skretanja**
θ – (teta) - **ugao propinjanja**
φ – (fi) - **ugao valjanja**

Određivanje orijentacije hvataljke

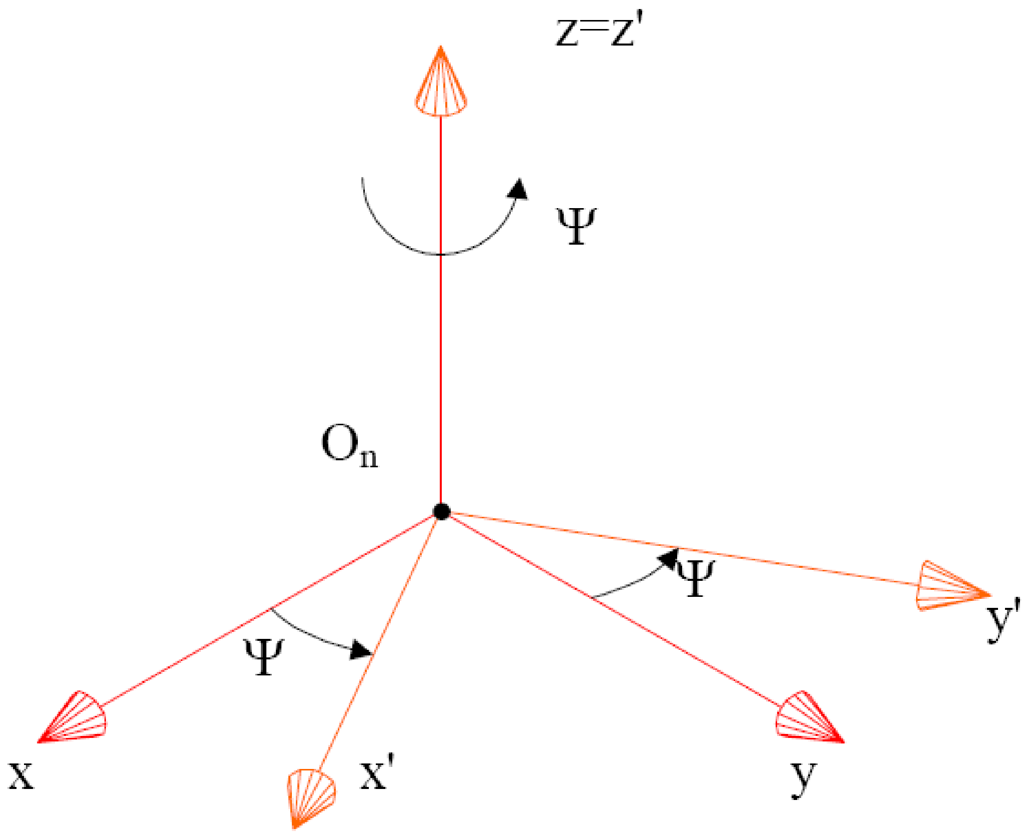
- Matrica rotacije ${}^{0}R_n$ koja preslikava koordinate iz sistema O_nxyz u sistem $Ox_oy_oz_o$ je oblika:

$$
{}^{0}\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}
$$

Rotacija koordinatnog sistema O_nxyz u odnosu na sistem $Ox_oy_oz_o$ se može prikazati sa sledećim nizom rotacija (3 rotacije):

Određivanje orijentacije hvataljke

- 1. Rotacija koordinatnog sistema $O_n xyz$ za **ugao skretanja** ψ (psi) oko ose z:

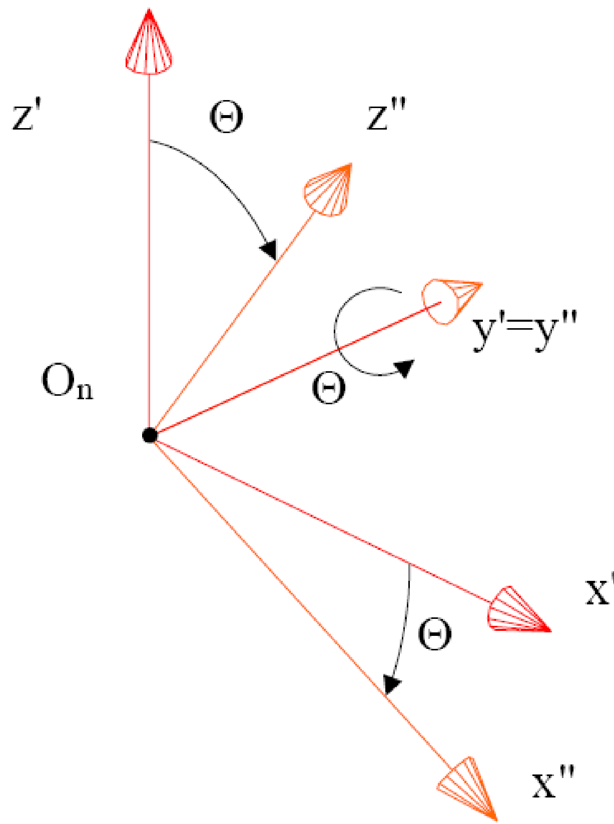


$$\mathbf{R}(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Slika 1. Rotacija pokretnog koordinatnog sistema za ugao skretanja ψ

Određivanje orijentacije hvataljke

- 2. Rotacija pokretnog koordinatnog sistema $O_n x'y'z'$ za **ugao propinjanja** θ (teta) oko ose y':

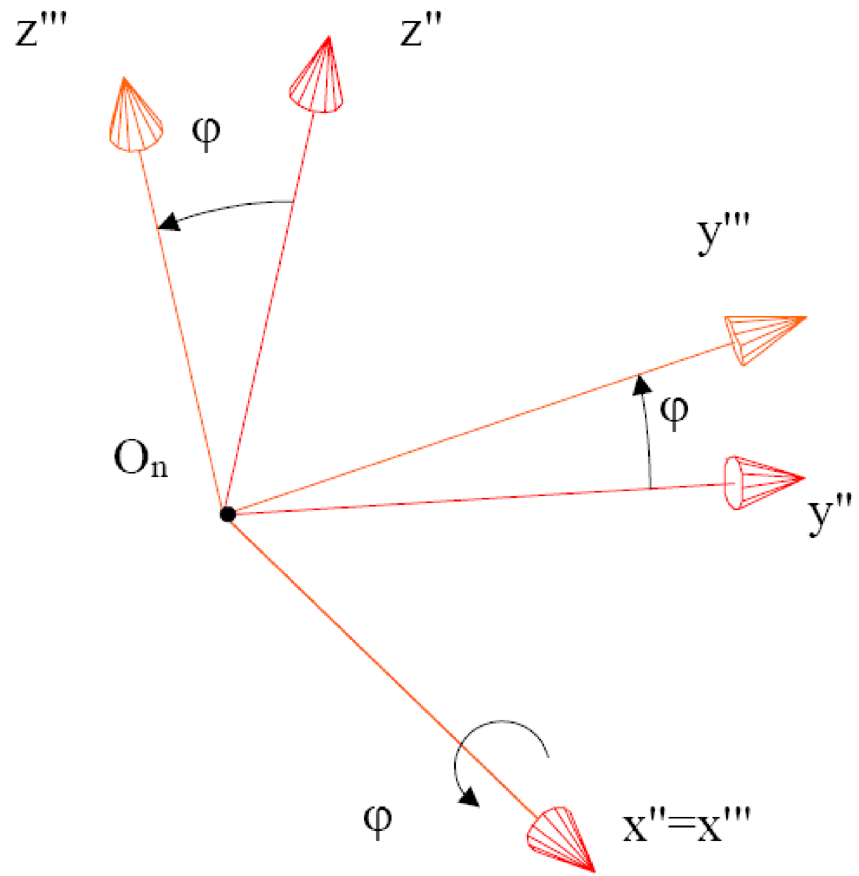


$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Slika 2. Rotacija pokretnog koordinatnog sistema za ugao propinjanja θ

Određivanje orijentacije hvataljke

- 3. Rotacija pokretnog koordinatnog sistema $O_n x''y''z''$ za **ugao valjanja** φ (fi) oko ose x'':



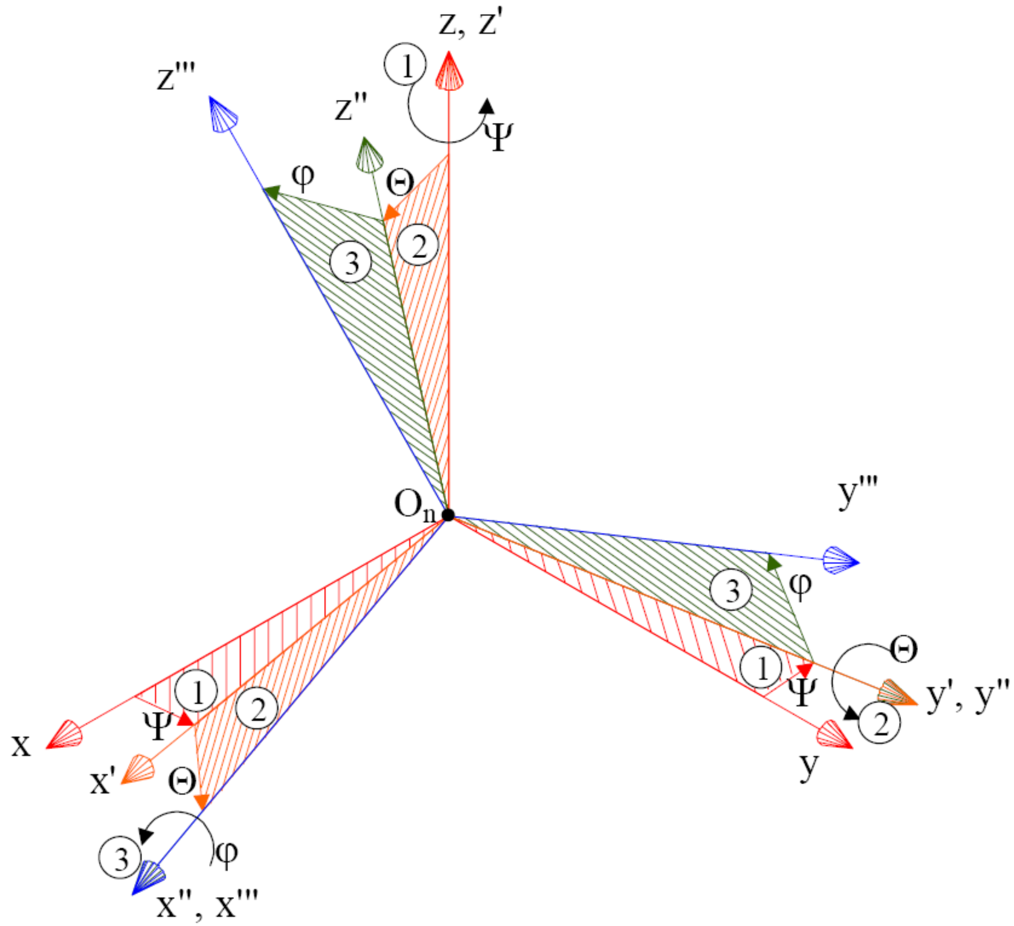
$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Slika 3. Rotacija pokretnog koordinatnog sistema za ugao valjanja φ

Određivanje orijentacije hvataljke

- Navedeni niz rotacija (1), (2) i (3) odgovara sledećem proizvodu matrica transformacija:

$$^{\circ}\mathbf{R}_{n} = \mathbf{R}(\psi)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\varphi)$$



Slika 4. Modifikovani Eulerovi uglovi

Određivanje orijentacije hvataljke

- Zamenom matrica rotacije u matricu ${}^0R_n$ sledi:

$$
{}^{o}\mathbf{R}_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{o}\mathbf{R}_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}
$$

Određivanje orijentacije hvataljke

- Izjednačavanjem izraza sledi:

$$\begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi c\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$e_{1x} = \cos\psi\cos\theta$$

$$e_{1y} = \sin\psi\cos\theta$$

$$e_{1z} = -\sin\theta$$

$$e_{2x} = \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi$$

$$e_{2y} = \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi$$

$$e_{2z} = \cos\theta\sin\varphi$$

$$e_{3x} = \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi$$

$$e_{3y} = \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi$$

$$e_{3z} = \cos\theta\cos\varphi$$

Određivanje orijentacije hvataljke

- Uglove ψ, θ i φ možemo da odredimo na sledeći način:

  a) ugao **skretanja** ψ:

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{e_{1y}}{e_{1x}} + 2k\pi$$

  b) ugao **propinjanja** θ:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{-e_{1z}}{e_{1x}\cos\psi + e_{1y}\sin\psi}\right] + 2k\pi$$

  c) ugao **valjanja** φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{e_{2z}}{e_{3z}} + 2k\pi$$

Određivanje orijentacije hvataljke

Izračunavanjem uglova ψ, θ i φ prema relacijama određena je orijentacija hvataljke manipulacionog robota.

Određivanjem:

- Dekartovih koordinata vrha hvataljke robota (**pozicioniranje**) i
- Tri modifikovana Eulerova ugla (**orijentacija**)

u potpunosti je rešen direktan kinematički problem.

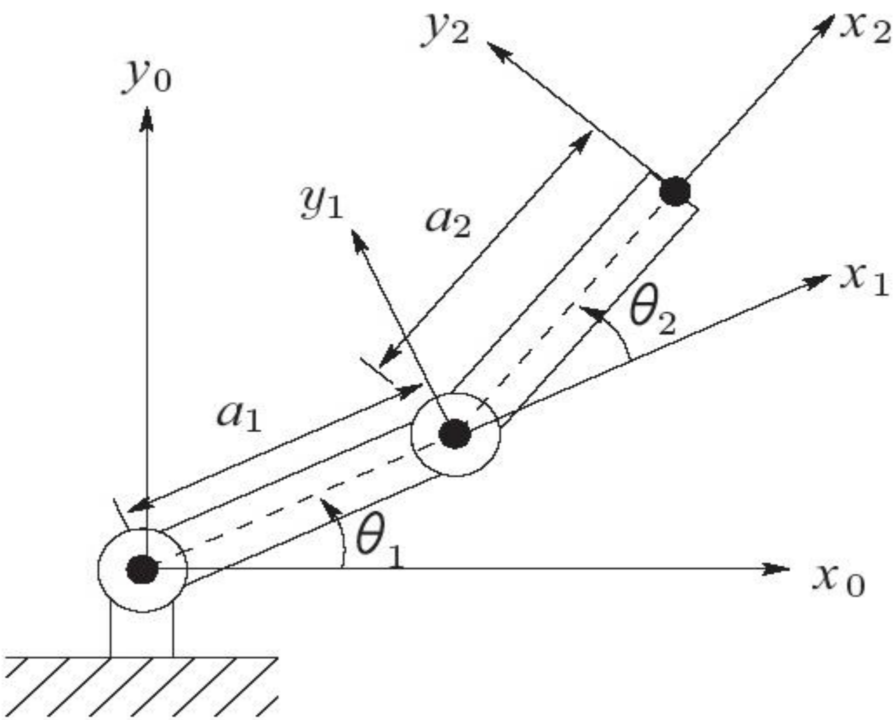
1. Zadatak (D-H)

Dr. Janoš Šimon dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

1. zadatak

- Odrediti DH parametre i napisati matricu direktne kinematike za planarni manipulator sa sledeće slike.



Slika 1 Planarni manipulator sa dva segmenta

Rešenje:

- Denavit Hartenbergovi parametri su dati u sledećoj tablici:

Segmenti	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	0	a_1	0	1	0
2	q_2	0	a_2	0	1	0

$$
{}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

1. zadatak

- Matrice homogene transformacije između pojedinih zglobova su:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Gde su uvedene sledeće oznake:

$$C_1 = \cos q_1 \qquad C_2 = \cos q_2$$

$$S_1 = \sin q_1 \qquad S_2 = \sin q_2$$

1. zadatak

- Matrice homogene transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema dobijamo množenjem matrica transformacije prema relaciji:

$$^{0}T_{2} = {}^{0}T_{1} * {}^{1}T_{2}$$

Odnosno:

$$^{0}T_{2} = \begin{bmatrix} C_1C_2 - S_1S_2 & -C_1S_2 - S_2C_2 & 0 & a_2(C_1C_2 - S_1S_2) + a_1C_1 \\ S_1C_2 - C_1S_2 & -S_1S_2 + C_1C_2 & 0 & a_2(S_1C_2 + C_1S_2) + a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. zadatak

- Odnosno ako uvedemo smenu:

$$S_{12} = \sin(q_1 + q_2) = S_1C_2 + C_1S_2$$

$$C_{12} = \cos(q_1 + q_2) = C_1C_2 - S_1S_2$$

Važi sledeće:

$$^{0}T_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. zadatak

- Primećujemo da to dobijamo i direktno preslikavanjem koordinatnog sistema $O_2 x_2 y_2 z_2$

na , $O_0 x_0 y_0 z_0$

odnosno važi za položaj hvataljke :

$$x = a_1 C_1 + a_2 C_{12}$$

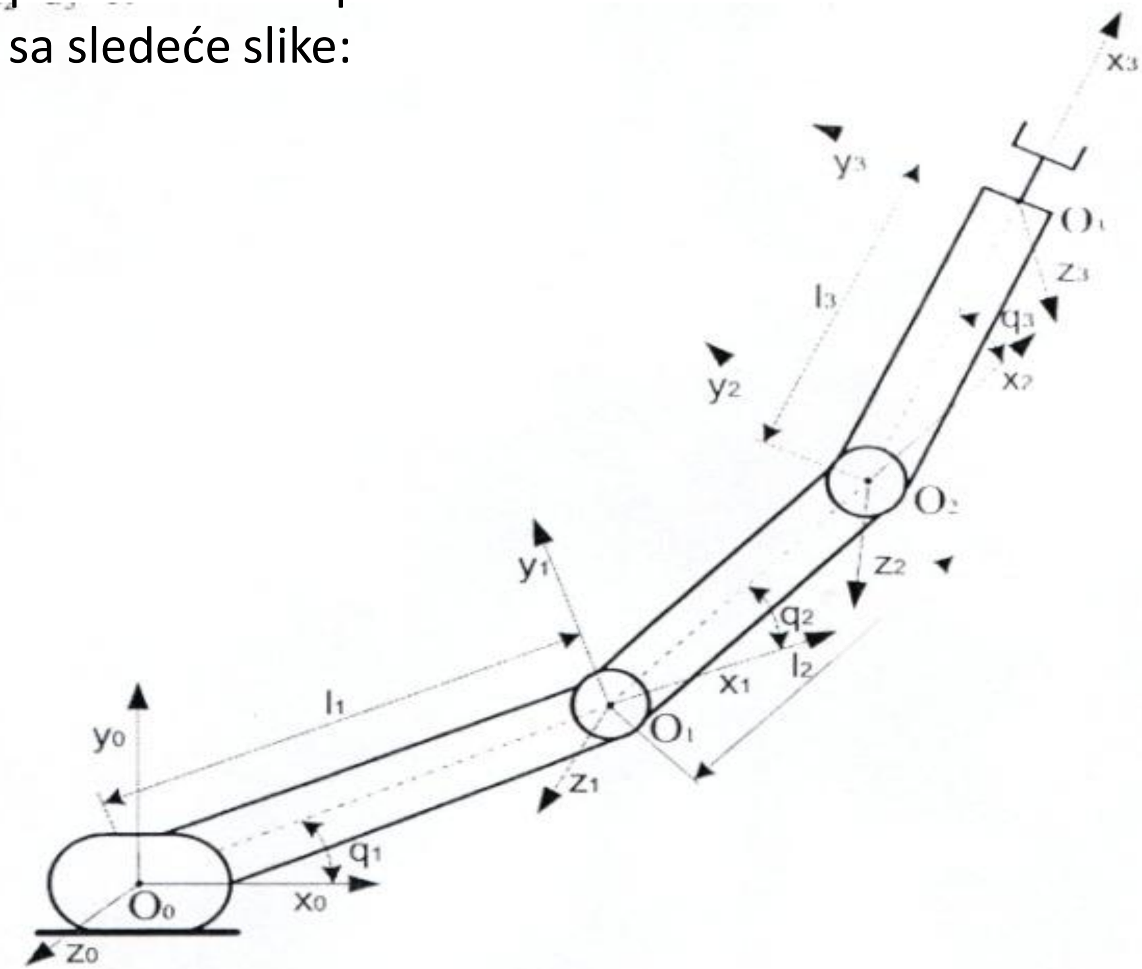
$$y = a_1 S_1 + a_2 S_{12}$$

Zadaci za vežbu (D-H)

Dr. Janoš Šimon dipl. ing.
simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

2. zadatak

- Odrediti DH parametre i napisati matricu direktne kinematike za planarni manipulator sa sledeće slike:



Sl .1. Planarni manipulator sa tri segmenta

2. zadatak

- Rešenje:

Segmenti	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	0	l_1	0	1	0
2	q_2	0	l_2	0	1	0
3	q_3	0	l_3	0	1	0

$$
{}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2. zadatak

- Matrice homogene transformacije između pojedinih zglobova su:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Gde su uvedene sledeće oznake:

$$C_1 = \cos q_1 \qquad C_2 = \cos q_2 \qquad C_3 = \cos q_3$$

$$S_1 = \sin q_1 \qquad S_2 = \sin q_2 \qquad S_3 = \sin q_3$$

2. zadatak

- Matrice homogene transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema dobijamo množenjem matrica transformacije prema relaciji:

$$^{0}T_{3} = {}^{0}T_{1} * ({}^{1}T_{2} * {}^{2}T_{3})$$

Odnosno:

$$^{1}T_{3} = \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_3C_3 & 0 & l_3(C_2C_3 - S_2S_3) + l_2C_2 \\ S_2C_3 - C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & l_3(S_2C_3 + C_2S_3) + l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno ako uvedemo smenu:

$$S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2C_3 + C_2S_3$$

$$C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2C_3 - S_2S_3$$

2. zadatak

- Važi sledeće:

$$
{}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & l_2C_2 + l_3C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & l_2S_2 + l_3S_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 * {}^{1}T_3
$$

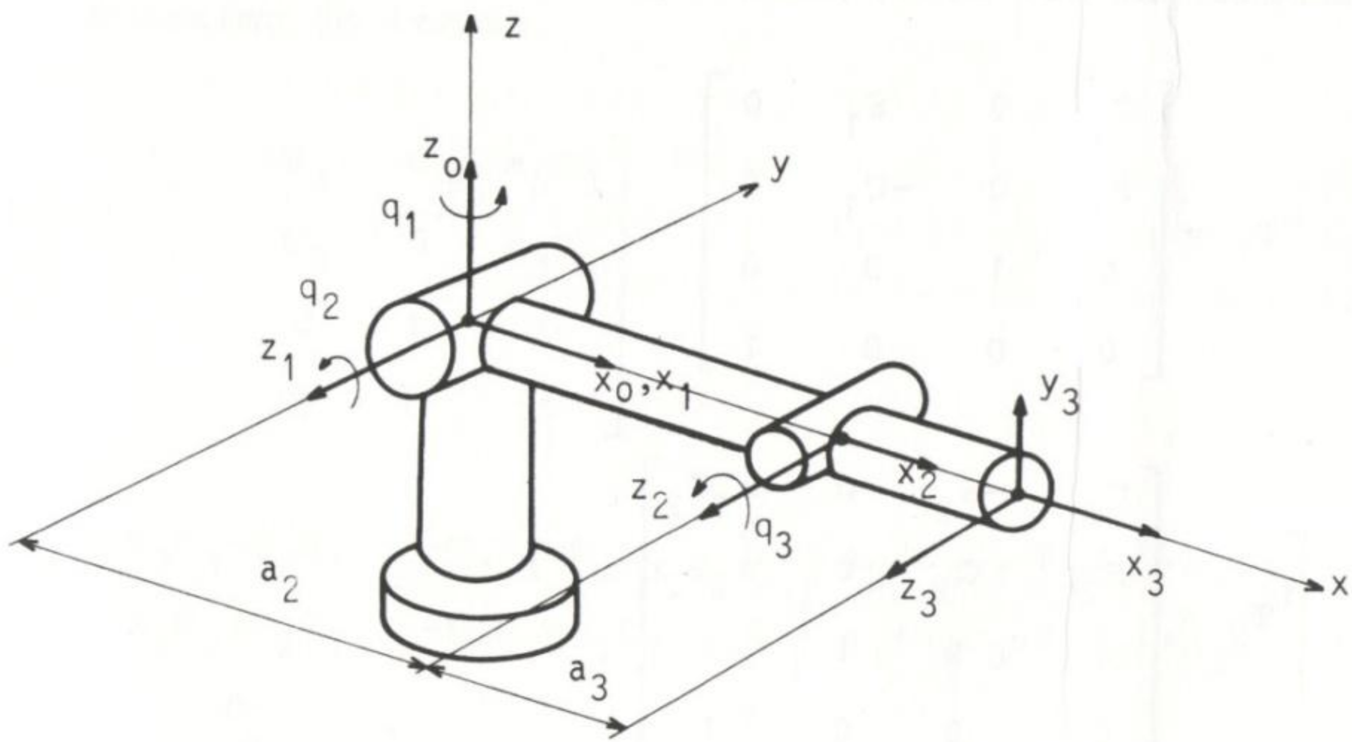
$$
{}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
x = l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123}
$$

$$
y = l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123}
$$

3. zadatak

- Odrediti DH parametre za osnovnu konfiguraciju manipulatora sa tri stepena slobode, prikazanoj na sledećoj slici:



Sl. 2. Manipulator sa tri stepena slobode

3. zadatak

- Rešenje:

Segmenti	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	90°	0	0	0	1
2	q_2	0	a_2	0	1	0
3	q_3	0	a_3	0	1	0

$$ {}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3. zadatak

- Matrice homogene transformacije između pojedinih zglobova su:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad
{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Matrice homogene transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema dobijamo množenjem matrica transformacije prema relaciji:

$$
{}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 * ({}^{1}T_2 * {}^{2}T_3)
$$

3. zadatak

- Odnosno:

$$ {}^{1}T_3 = {}^{1}T_2\,{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_2C_3 & 0 & a_3(C_2C_3 - S_2S_3) + a_2C_2 \\ S_2C_3 + C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & a_3(S_2C_3 + C_2S_3) + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Odnosno ako uvedemo smenu:

$$ S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2C_3 + C_2S_3 $$

$$ C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2C_3 - S_2S_3 $$

3. zadatak

- Važi sledeće:

$$
{}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & a_3C_{23} + a_2C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23} + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

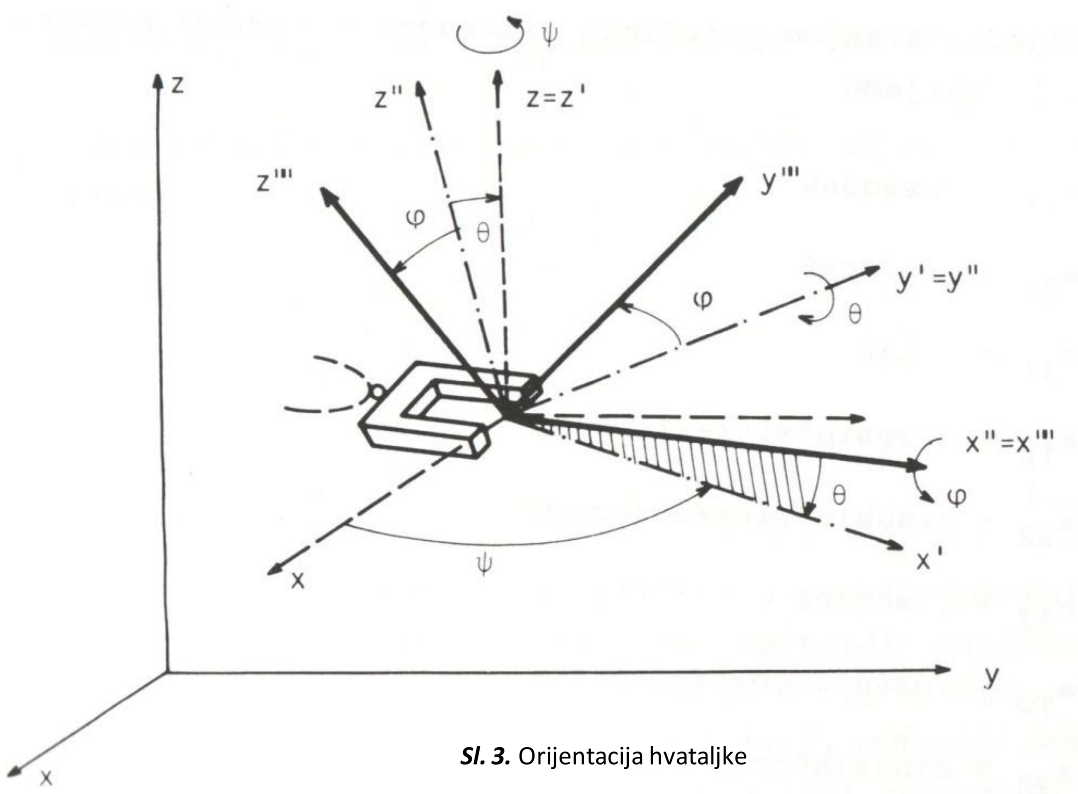
Na kraju dolazimo do rešenja:

$$
{}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & C_1(a_3C_{23} + a_2C_2) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & S_1(a_3S_{23} + a_2S_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23} + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. zadatak

- **Orijentacija hvataljke:**

Opisivanje orijentacije hvataljke u odnosu na nepokretan koordinatni sistem u bazi manipulatora uz pomoć tri spoljašnje koordinate se najčešće vrši preko tri Euler-ova ugla skretanja, propinjanja i valjanja.



Sl. 3. Orijentacija hvataljke

3. zadatak

$$ {}^{0}A_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}A_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} $$

3. zadatak

- Izjednačavanjem pojedinih vrednosti elemenata matrica dobijamo:

$$a_{11} = \cos\psi\cos\theta$$
$$a_{21} = \sin\psi\cos\theta$$
$$a_{31} = -\sin\theta$$
$$a_{12} = \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi$$
$$a_{22} = \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi$$
$$a_{32} = \cos\theta\sin\varphi$$
$$a_{13} = \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi$$
$$a_{23} = \sin\psi\sin\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi$$
$$a_{33} = \cos\theta\cos\varphi$$

$$\psi = arctg\frac{a_{21}}{a_{11}} + k\pi$$

$$\theta = arctg\frac{-a_{31}}{a_{11}\cos\psi + a_{21}\sin\psi} + 2k\pi$$

$$\varphi = arctg\frac{a_{32}}{a_{33}} + 2k\pi$$

Pošto je određena matrica ${}^0T_n$ za zadate vrednosti unutrašnjih koordinata, a zatim i vrednosti Euler-ovih uglova, direktan kinematički problem je u potpunosti rešen.

Zadaci za vežbu (D-H)

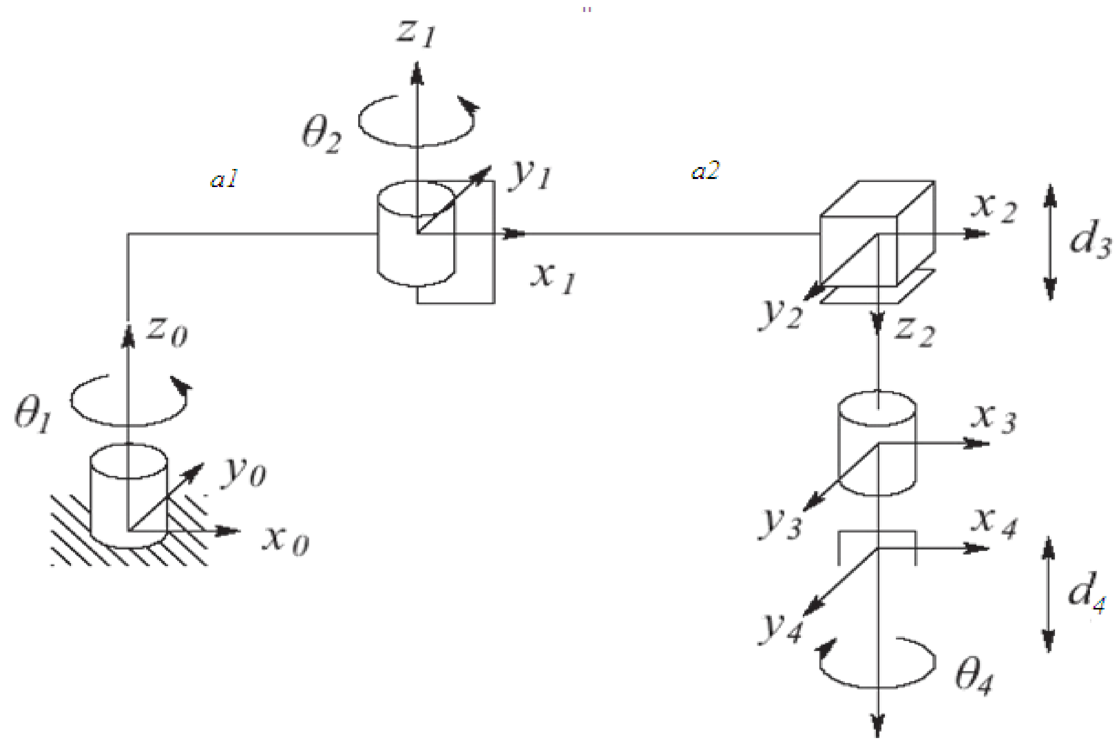
Dr. Janoš Šimon dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

4. zadatak

- Za SCARA (Selective Compliant Assembly Robot Arm) manipulator sa četiri stepena slobode odrediti DH parametre i matricu transformacije koja opisuje hvataljku u baznom koordinatnom sistemu.

Slika 1. Toshiba TH1050 Scara Robot



4. zadatak

- Rešenje :

Tablica Denavit – Hartenbergovih parametara

link	a_i	α_i	d_i	q_i	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
1	a_1	0	0	q_1	*1*	*0*
2	a_2	0	0	q_2	*1*	*0*
3	0	180˚	d_3	0	*-1*	0
4	0	0	d_4	q_4	*1*	*0*

4. zadatak

- Matrice homogene transformacije za pojedine segmente sistema su:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. zadatak

- Matricu homogene transformacije hvataljke dobijamo množenjem pojedinačnih matrica transformacije i to počev od poslednjeg segmenta prema prvom.

$$T_4^0 = A_1 \cdot (A_2 \cdot (A_3 \cdot A_4))$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = a_1c_1 + a_2c_{12}$$

$$y = a_1s_1 + a_2s_{12}$$

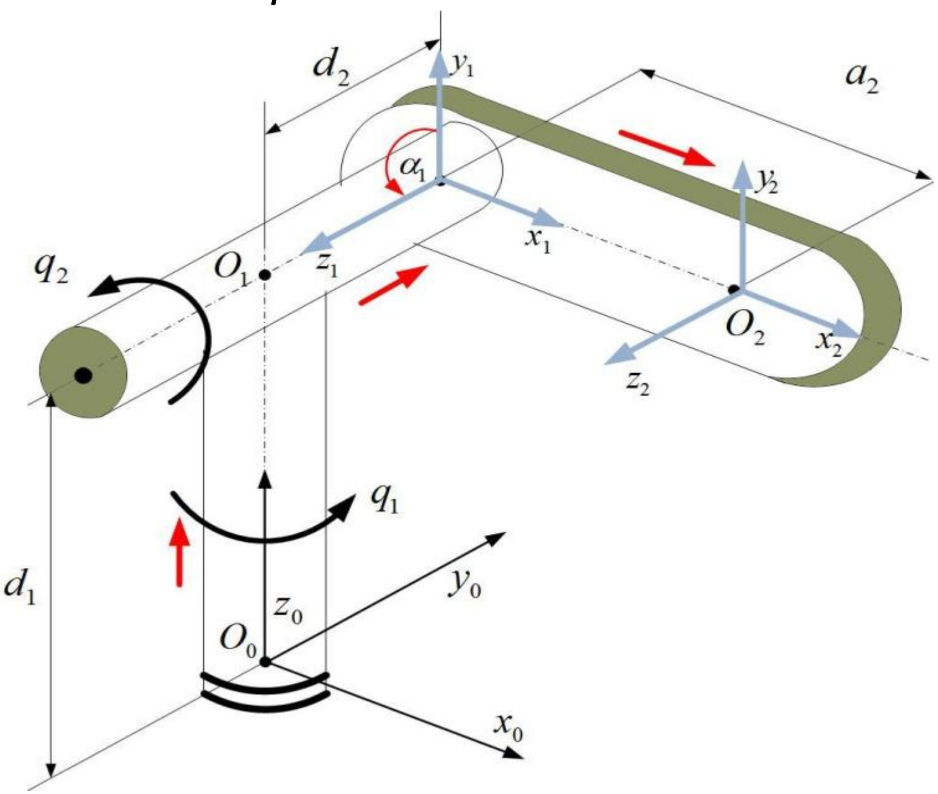
$$z = -d_3 - d_4$$

5. zadatak

- Na slici je prikazan manipulacioni robot osnovne konfiguracije. Odrediti DH parametre i napisati homogenu transformacionu matricu za osnovnu konfiguraciju PUMA manipulatora, prikazanoj na sledećoj slici:

$d1$=**0.5m** $q1$=3**0˚**

$d2$=**0.2m** $a2$=**0.6m** $q2$=**60˚**



Slika 1. Manipulator sa dva stepena slobode (RR)

5. zadatak

Rešenje:

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	*0*	90˚	*d1*	*q1*
2	*a2*	0	*-d2*	*q2*

Formirajmo sada homogene matrice transformacije između susednih segmenata ovog manipulatora. Imajući u vidu opšti oblik matrice transformacije za rotacione zglobove i parametre iz tablice, možemo pisati:

$$ {}^{0}D_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{1}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

5. zadatak

- Da bismo odredili homogenu matricu transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema, potrebno je izvršiti množenje ovih matrica transformacije. Ovo množenje ćemo izvršiti počev od poslednjeg segmenta prema prvom prema relaciji:

$$^{0}D_2 = {}^{0}D_1 * {}^{1}D_2$$

Tako dolazimo do izraza:

$$^{0}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_2 \cos q_1 & \sin q_1 & a_2 \cos q_1 \cos q_2 - d_2 \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 & a_2 \sin q_1 \cos q_2 + d_2 \cos q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

5. zadatak

- Kada su određene numeričke vrednosti matrice ${}^{0}D_{2}$ moguće je odrediti tri spoljašnje koordinate koji opisuje orijentaciju hvataljke.

$$
{}^{0}D_{2} = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}A_{2} & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$X_{02} = a_2 \cos q_1 \cos q_2 - d_2 \sin q_1$$

$$Y_{02} = a_2 \sin q_1 \cos q_2 \; + d_2 \cos q_1$$

$$Z_{02} = a_2 \sin q_2 + d_1$$

Angle	Sin	Cos	*Tan=Sin/Cos*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

5. zadatak

- U dobijene izraze ćemo zameniti zadate vrednosti:

$$X_{02} = 0.6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0.2\frac{1}{2} = 0.1598m$$

$$Y_{02} = 0.6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3232m$$

$$Z_{02} = 0.6\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 = 1.0196m$$

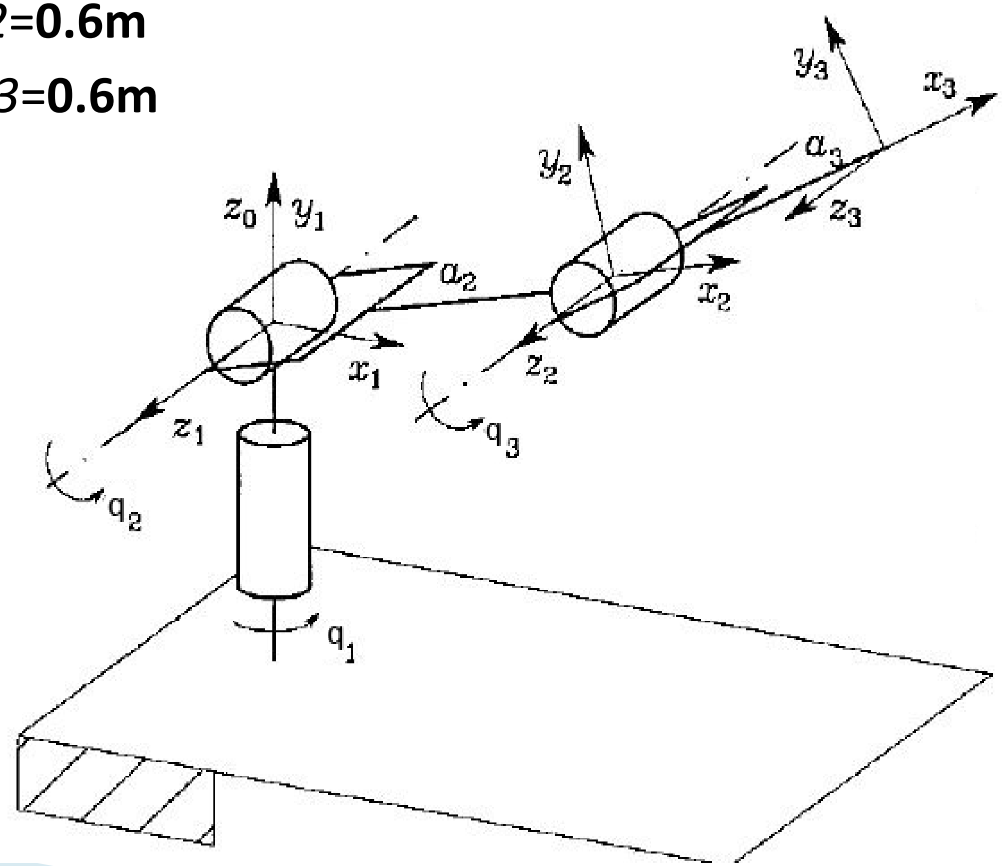
6. zadatak

- Odrediti DH parametre za osnovnu konfiguraciju manipulatora sa tri stepena slobode, prikazanoj na sledećoj slici:

q1=**30°**

q2=**60°** *a2*=**0.6m**

q3=**30°** *a3*=**0.6m**



Slika 1. Manipulator sa tri stepena slobode (RRR)

6. zadatak

Rešenje**:**

Denavit Hartenbergovi parametri su dati u sledećoj tablici:

Segmenti	Θ_i	α_i	a_i	d_i
1	q_1	90	0	0
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	0

Matrice homogene transformacije između pojedinih zglobova su:

$$
{}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad
{}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad
{}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

6. zadatak

- Matrice homogene transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema dobijamo množenjem matrica transformacije prema relaciji:

$$T_3^0 = {}^0A_1 * ({}^1A_2 * {}^2A_3)$$

Odnosno:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_2 & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2 C_3 + C_2 S_3$$

$$C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2 C_3 - S_2 S_3$$

6. zadatak

- Dalje sledi:

q1=**30˚**

q2=**60˚** *a2*=**0.6m**

q3=**30˚** *a3*=**0.6m**

$$x_{03} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$y_{03} = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$z_{03} = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$x_{03} = \frac{\sqrt{3}}{2}(0.6\cdot\frac{1}{2} + 0.6\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2})) = 0.256m$$

$$y_{03} = \frac{1}{2}(0.6\cdot\frac{1}{2} + 0.6\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2})) = 0.15m$$

$$z_{03} = 0.6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.6\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}) = 1.12m$$

VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA
SUBOTICA

ROBOTIKA

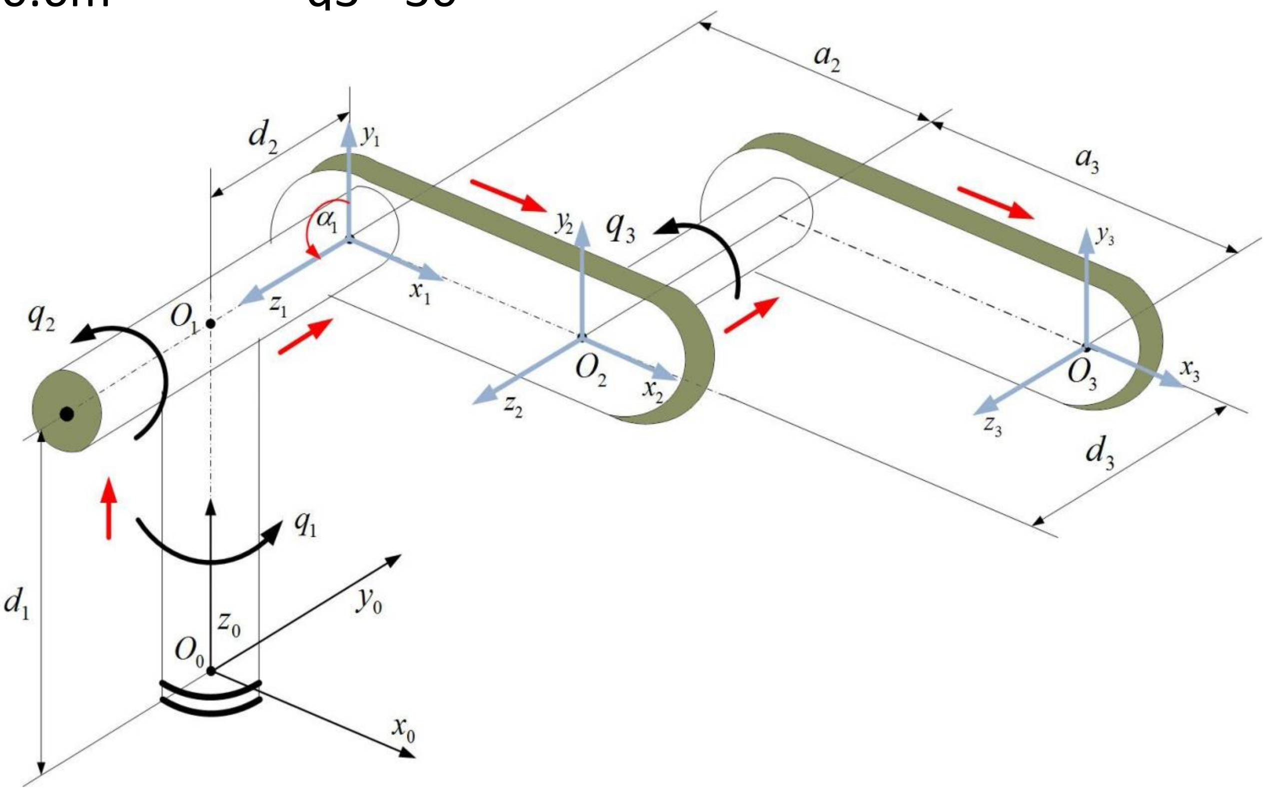
Zadaci za vežbu (D-H)

Dr. Janoš Šimon dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

7. zadatak

- Odrediti DH parametre i napisati homogenu transformacionu matricu za osnovnu konfiguraciju PUMA manipulatora, prikazanoj na sledećoj slici:
- d1=0.5m q1=0˚
- d2=0.2m a2=0.6m q2=60˚
- d3=0.2m a3=0.6m q3=-30˚



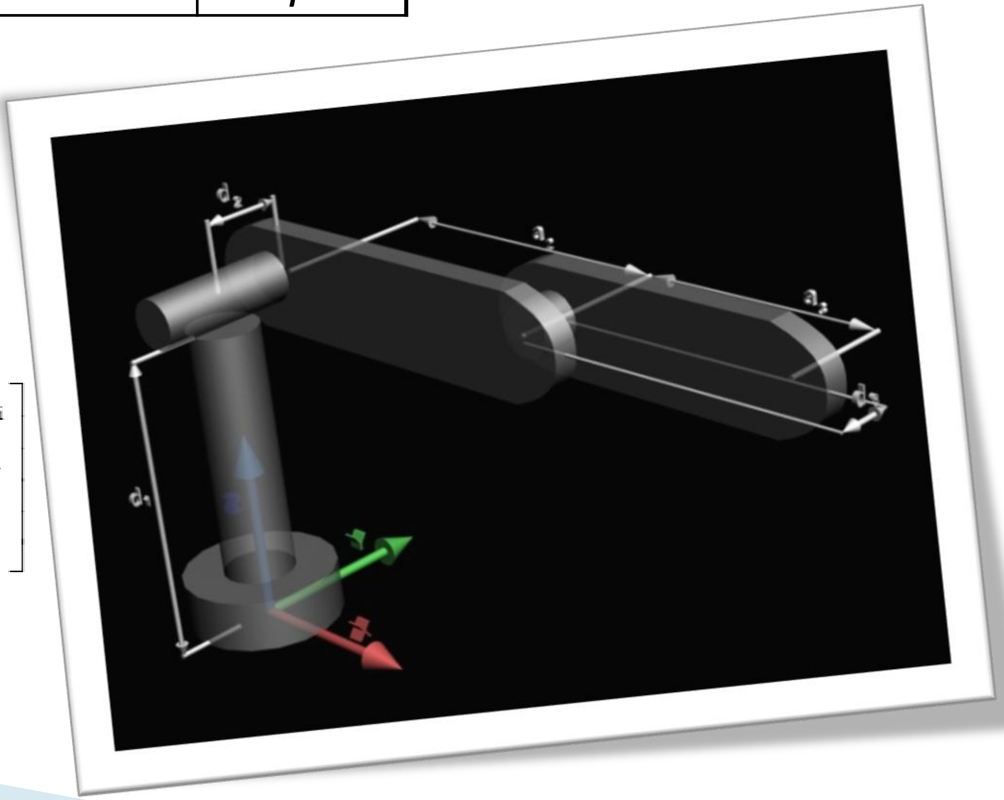
Slika 1. Puma RRR

7. zadatak

- Rešenje:

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	*0*	90˚	*d1*	*q1*
2	*a2*	0	*-d2*	*q2*
3	*a3*	0	*-d3*	*q3*

$$
{}^{i\text{-}1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



7. zadatak

- Formirajmo sada homogene matrice transformacije između susednih segmenata ovog manipulatora. Imajući u vidu opšti oblik matrice transformacije za rotacione zglobove i parametre iz tablice, možemo pisati:

$$
{}^{0}D_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{1}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{2}D_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & a_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & a_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

7. zadatak

- Da bismo odredili homogenu matricu transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema, potrebno je izvršiti množenje ovih matrica transformacije. Ovo množenje ćemo izvršiti počev od poslednjeg segmenta prema prvom prema relaciji:

$$^{0}D_{3} = {}^{0}D_{1} * ({}^{1}D_{2} * {}^{2}D_{3})$$

Tako dolazimo do izraza:

$$^{1}D_{3} = \begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 & 0 & a_3(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) + a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 & 0 & a_3(\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3) + a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

7. zadatak

- Gde su uvedene sledeće oznake:

$$c_{23} = \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3$$

$$s_{23} = \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3$$

$$^{1}D_3 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} \\ s_{23} & -c_{23} & 0 & a_2s_2 + a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & -(d_2 + d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$^{0}D_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) - s_1(d_2 + d_3) \\ s_1s_{23} & s_1c_{23} & -c_1 & s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) + c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23} & c_{23} & 1 & a_2s_2 + a_3s_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

7. zadatak

- Kada su određene numeričke vrednosti matrice ${}^{0}D_3$ moguće je odrediti tri spoljašnje koordinate koji opisuje orijentaciju hvataljke.

$$
{}^{0}D_3 = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}A_3 & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$X_{03} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) - s_1(d_2 + d_3)$$

$$Y_{03} = s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) + c_1(d_2 + d_3)$$

$$Z_{03} = a_2s_2 + a_3s_{23} + d_1$$

U dobijene izraze ćemo zameniti zadate vrednosti:

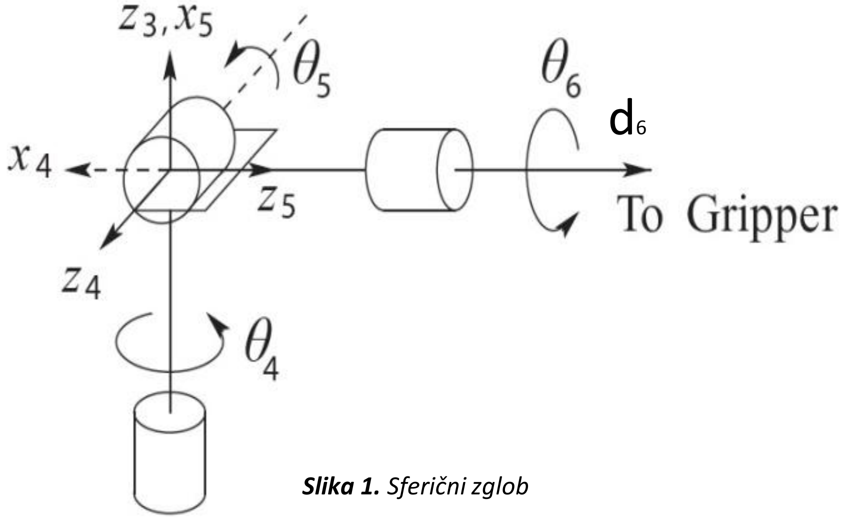
$$X_{03} = 1(0.6 \cdot \frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - 0(0.5 + 0.2) = 0.8196m$$

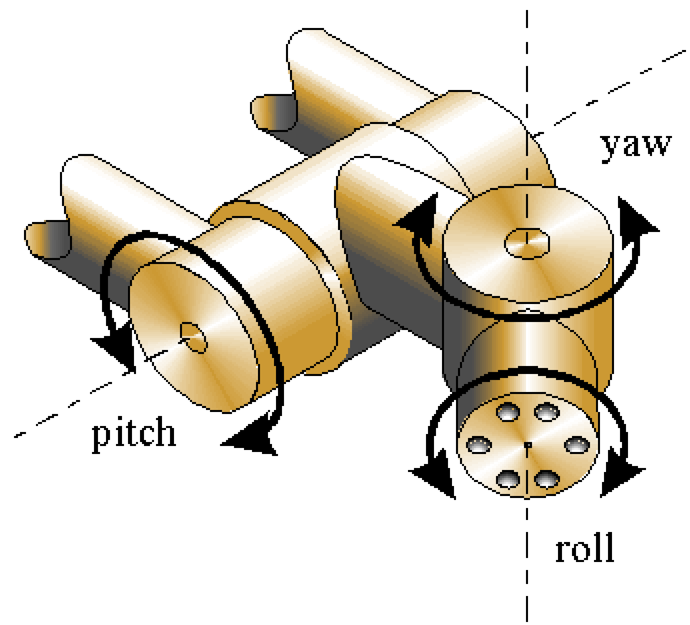
$$Y_{03} = 0 + 1(0.2 + 0.2) = 0.4m$$

$$Z_{03} = 0.5 + 0.6\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.6\frac{1}{2} = 1.3196m$$

8. zadatak

- Odrediti DH parametre i napisati homogenu transformacionu matricu za osnovnu konfiguraciju sferičnog zgloba, prikazanoj na sledećoj slici:



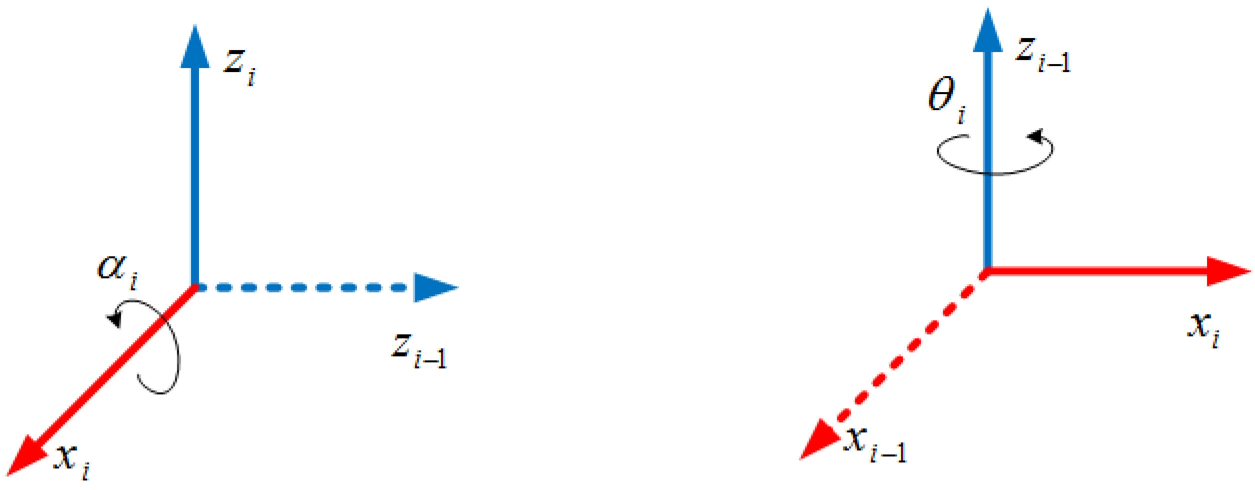


Slika 1. *Sferični zglob*

8. zadatak

- **Rešenje:**

link	*ai*	αi	*di*	*qi*
4	0	-90	0	*q4*
5	0	90	0	*q5*
6	0	0	*d6*	*q6*



Slika 2. *Pozitivni smer za alpha i theta uglove*

8. zadatak

- Matrice homogene transformacije između koordinatnog sistema hvataljke i nepokretnog sistema dobijamo množenjem matrica transformacije prema relaciji:

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$T_6^3 = A_4(A_5 A_6)$$

8. zadatak

Sledi:

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5c_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$