

Visokatehnička Škola Strukovnih Studija Subotica

**Primeri zadataka za drugi ciklus laboratorijskih
vežbi iz električnih merenja**

Sastavili:

Karolj Nađ i Peter Šarčević

Subotica 2018

8. Vežba

8. Merenja u simetričnom i nesimetričnom trofaznom sistemu

8.2 Simetrični trofazni sistem sa četiri provodnika. Potrošač je vezan u zvezdu.

Poznate su elektromotorne sile trofaznog generatora: Efektivna vrednost elektromotorne sile u svakoj fazi je 220 V.

Pokazivanje voltmetra je $V_1 = 220$ V.

Trenutne vrednosti elektromotornih sila u pojedinim fazama su:

$$e_1(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cos \omega t$$

$$e_2(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$e_3(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

Kompleksne efektivne vrednosti pojedinih elektromotornih sila su:

$$\underline{E}_1 = 220 \cdot e^{j0} = 220 \cdot (\cos 0 - j \sin 0) = 220 \text{ V}, \quad (E_1 = 220 \text{ V})$$

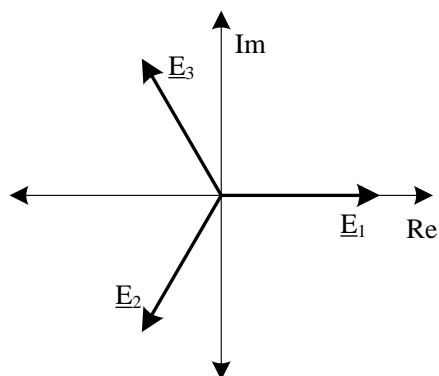
$$\underline{E}_2 = 220 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-110 - j190,526) \text{ V} \quad (E_2 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{E}_3 = 220 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} - j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (-110 + j190,526) \text{ V} \quad (E_3 = 220 \text{ V})$$

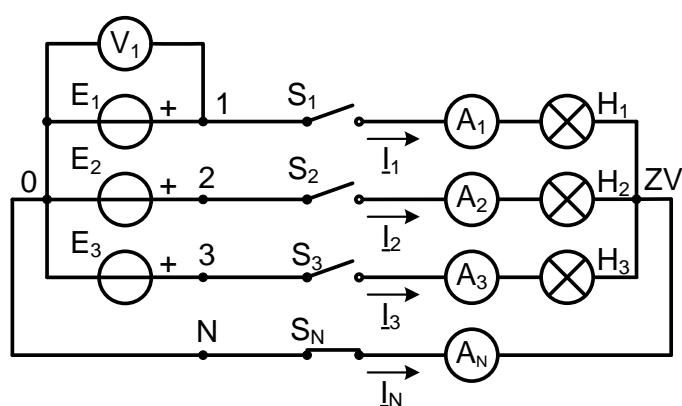
Efektivne vrednosti iz kompleksnih efektivnih vrednosti se određuju tako da se uzima kvadratni koren iz zbira kvadrata realnog i imaginarnog dela kompleksnog broja.

$$I = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{I})^2 + (\operatorname{Im} \underline{I})^2}$$

Instrumenti mere efektivnu vrednost naizmeničnih veličina. Efektivna vrednost je skalarna veličina i iz te veličine ne može se odrediti kompleksna efektivna vrednost niti trenutna vrednost naizmeničnih veličina.



Sl.8.1 Elektromotorne sile u kompleksnoj ravni.



Sl. 8.2 Simetrični trofazni potrošač vezan u zvezdu

Voltmetar i ampermetri se smatraju savršenim instrumentima, njihove unutrašnje otpornosti se ne uzimaju u obzir, generatori se mogu smatrati idealnim. Sijalice na radnoj temperaturi imaju otpornost $R = 500 \Omega$. Struja u grani generator E_1 je:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{R} = \frac{220}{500} = 0,44 \text{ A}, \quad (I_1 = 0,44 \text{ A})$$

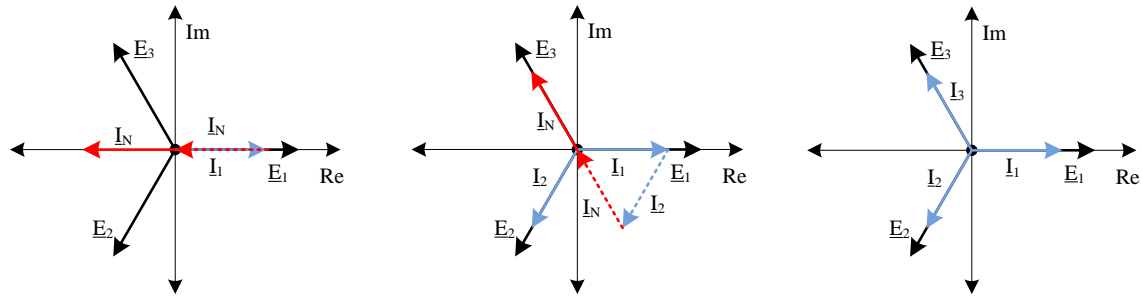
Struje u ostalim granama:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{R} = \frac{-110 - j190,526}{500} = -0,22 - j0,381 \text{ A}, \quad (I_2 = 0,44 \text{ A})$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{R} = \frac{-110 + j190,526}{500} = -0,22 + j0,381 \text{ A}, \quad (I_3 = 0,44 \text{ A})$$

$$\underline{I}_N = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -[0,44 + (-0,22 - j0,381) + (-0,22 + j0,381)] = 0 \text{ A}.$$

$(I_N = 0 \text{ A})$



Sl. 8.3 Strujni dijagrami u kompleksnoj ravni, kada je uključen prekidač S_1 , zatim uključuje se i prekidač S_2 , i na kraju uključena su sva tri prekidača.

8.3 Nesimetričan potrošač vezan u zvezdu:

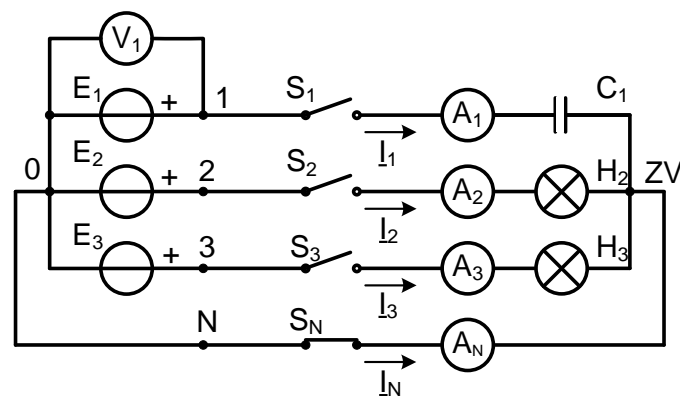
Pokazivanje voltmetra je $V_1 = 220 \text{ V}$. Kapacitivnost kondenzatora $C_1 = 5,305 \mu\text{F}$.

Kompleksne efektivne vrednosti pojedinih elektromotornih sila su:

$$\underline{E}_1 = 220 \cdot e^{j0} = 220 \cdot (\cos 0 - j \sin 0) = 220 \text{ V}, \quad (E_1 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{E}_2 = 220 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-110 - j190,526) \text{ V} \quad (E_2 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{E}_3 = 220 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} - j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (-110 + j190,526) \text{ V} \quad (E_3 = 220 \text{ V})$$



Sl. 8.4 Nesimetrični trofazni potrošač vezan u zvezdu

Impedansa kondenzatora:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 5,305 \cdot 10^{-6}} = -j600 \Omega$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_C} = \frac{220}{-j600} = j0,367 \text{ A}, \quad (I_1 = 0,367 \text{ A})$$

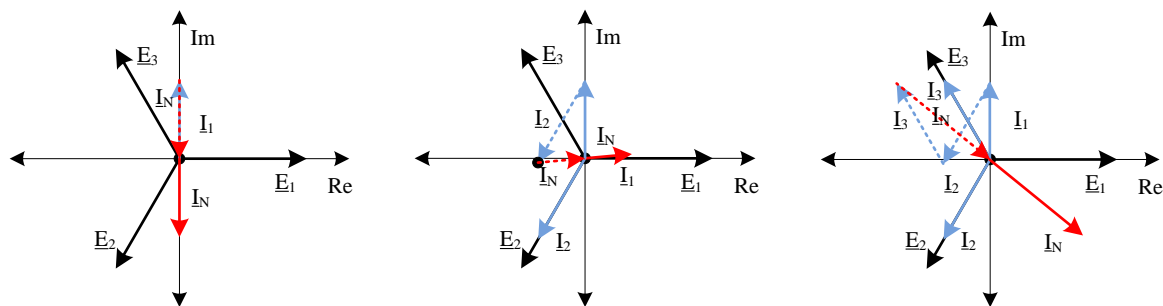
Struje u ostalim granama:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{R} = \frac{-110 - j190,526}{500} = -0,22 - j0,381 \text{ A}, \quad (I_2 = 0,44 \text{ A})$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{R} = \frac{-110 + j190,526}{500} = -0,22 + j0,381 \text{ A}, \quad (I_3 = 0,44 \text{ A})$$

$$\underline{I}_N = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -[j0,367 + (-0,22 - j0,381) + (-0,22 + j0,381)] = 0,44 - j0,367 \text{ A}$$

$(I_N = 0,573 \text{ A})$



Sl. 8.5 Strujni dijagrami u kompleksnoj ravni, kada je uključen prekidač S_1 , zatim uključuje se i prekidač S_2 , i na kraju uključena su sva tri prekidača.

8.4 Nesimetričan potrošač vezan u zvezdu sa prekinutim nultim provodnikom:

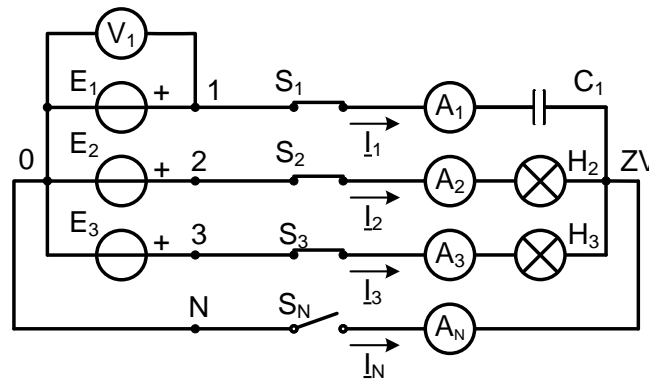
Pokazivanje voltmetra je $V_1 = 220 \text{ V}$. Kapacitivnost kondenzatora $C_1 = 5,305 \mu\text{F}$, otpornost sijalica na radnoj temperaturi je $R_2 = 500 \Omega$ i $R_3 = 160 \Omega$.

Kompleksne efektivne vrednosti pojedinih elektromotornih sila su:

$$\underline{E}_1 = 220 \cdot e^{j0} = 220 \cdot (\cos 0 - j \sin 0) = 220 \text{ V}, \quad (E_1 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{E}_2 = 220 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-110 - j190,526) \text{ V} \quad (E_2 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{E}_3 = 220 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} - j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (-110 + j190,526) \text{ V} \quad (E_3 = 220 \text{ V})$$



Sl. 8.6 Nesimetrični trofazni potrošač vezan u zvezdu sa odvojenom nultom tačkom.

Potencijal zvezdišta potrošača određuje se metodom potencijala čvorova na sledeći način:

$$\underline{U}_{ZV0} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\frac{220}{-j600} + \frac{(-110 - j190,526)}{500} + \frac{(-110 + j190,526)}{160}}{\frac{1}{-j600} + \frac{1}{500} + \frac{1}{160}} =$$

$$= (-78,009 + j158,354) \text{ V}$$

$$(U_{ZV0} = 176,513 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{1ZV} = \underline{E}_1 - \underline{U}_{ZV0} = 220 - (-78,009 + j158,354) = (298,009 - j158,354) \text{ V}$$

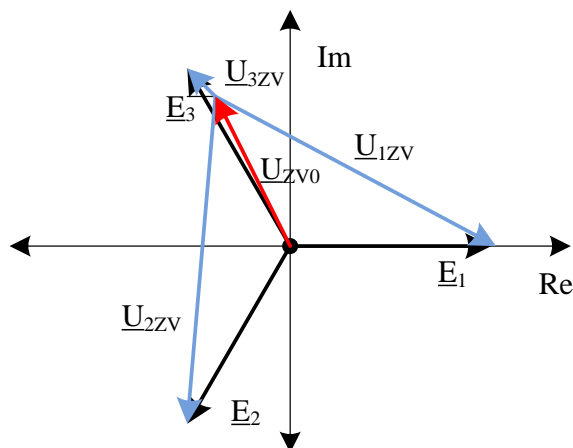
$$(U_{1ZV} = 337,461 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{2ZV} = \underline{E}_2 - \underline{U}_{ZV0} = -110 - j190,526 - (-78,009 + j158,354) = (-31,991 - j348,88) \text{ V}$$

$$(U_{2ZV} = 350,344 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{3ZV} = \underline{E}_3 - \underline{U}_{ZV0} = -110 + j190,526 - (-78,009 + j158,354) = (-31,991 + j32,172) \text{ V}$$

$$(U_{3ZV} = 45,370 \text{ V})$$



Sl. 8.7 Naponi u kompleksnoj ravni.

Napomena:

U slučaju nesimetričnog potrošača vezanog u zvezdu prekid nultog provodnika može da prouzrokuje značajne prenapone na faznim potrošačima. Zbog toga se ne stavlja osigurač na nulti provodnik.

Struje u granama:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1ZV}}{\underline{Z}_C} = \frac{298,009 - j158,354}{-j600} = 0,264 + j0,497 \text{ A}, \quad (I_1 = 0,563 \text{ A})$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2ZV}}{R_2} = \frac{-31,991 - j348,88}{500} = -0,064 - j0,698 \text{ A}, \quad (I_2 = 0,701 \text{ A})$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3ZV}}{R_3} = \frac{-31,991 + j32,172}{160} = -0,200 + j0,201 \text{ A}, \quad (I_3 = 0,284 \text{ A})$$

8.5 Simetričan potrošač vezan u trougao.

Pokazivanje voltmetra $V_1 = 127 \text{ V}$.

$$\underline{E}_1 = 127 \cdot e^{j0} = 127 \cdot (\cos 0 - j \sin 0) = 127 \text{ V}, \quad (E_1 = 127 \text{ V})$$

$$\underline{E}_2 = 127 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 127 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-63,5 - j109,985) \text{ V} \quad (E_2 = 127 \text{ V})$$

$$\underline{E}_3 = 127 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 127 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} - j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (-63,5 + j109,985) \text{ V} \quad (E_3 = 127 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = 127 - (-63,5 - j109,985) = (190,5 + j109,985) \text{ V}$$

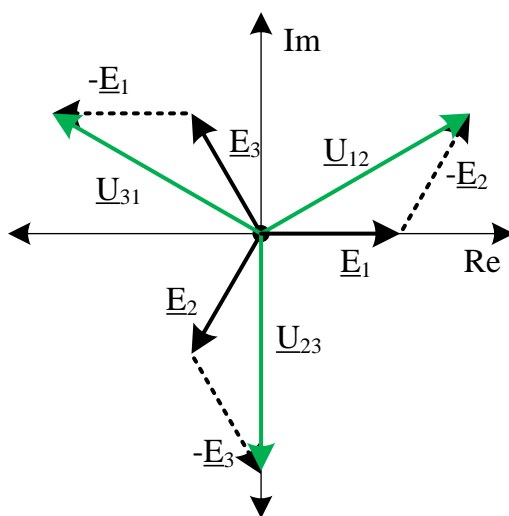
$$(U_{12} = 219,970 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 = (-63,5 - j109,985) - (-63,5 + j109,985) = (j219,970) \text{ V}$$

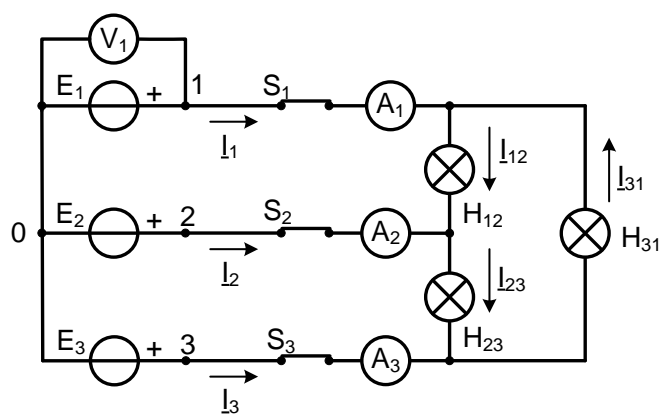
$$(U_{23} = 219,970 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1 = (-63,5 + j109,985) - 127 = (-190,5 + j109,985) \text{ V}$$

$$(U_{31} = 219,970 \text{ V})$$



Sl. 8.8 Naponi u kompleksnoj ravni.



Sl. 8.9 Simetričan potrošač vezan u trougao.

Struje u granama:

$$\underline{I}_{12} = \frac{U_{12}}{R} = \frac{190,5 + j109,985}{500} = 0,381 + j0,220 \text{ A}, \quad (I_{12} = 0,440 \text{ A})$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{U_{23}}{R} = \frac{j219,985}{500} = j0,440 \text{ A}, \quad (I_{23} = 0,440 \text{ A})$$

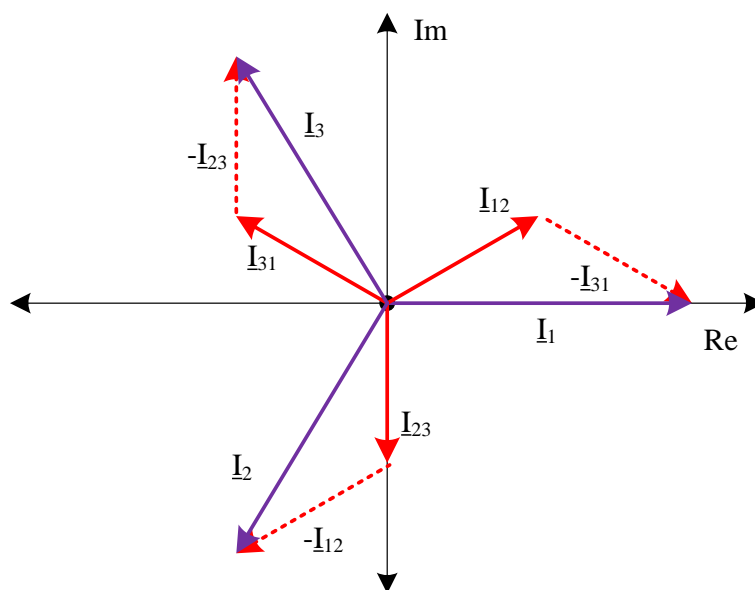
$$\underline{I}_{31} = \frac{U_{31}}{R} = \frac{-190,5 + j109,985}{500} = -0,381 + j0,220 \text{ A}, \quad (I_{31} = 0,440 \text{ A})$$

Struje u napojnim vodovima:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = (0,381 + j0,220) - (-0,381 + j0,220) = 0,762 \text{ A} \quad (I_1 = 0,762 \text{ A})$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -j0,440 - (0,381 + j0,220) = -0,381 - j0,660 \text{ A} \quad (I_2 = 0,762 \text{ A})$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = (-0,381 + j0,220) - j0,440 = (-0,381 + j0,660) \text{ A} \quad (I_3 = 0,762 \text{ A})$$



Sl. 8.10 Struje simetričnog potrošača vezanog u trougao.

8.6 Nesimetričan potrošač vezan u trougao.

Pokazivanje voltmetra $V_1 = 127 \text{ V}$.

Kompleksna efektivna vrednost elektromotornih sila generatora je:

$$\underline{E}_1 = 127 \cdot e^{j0} = 127 \cdot (\cos 0 - j \sin 0) = 127 \text{ V}, \quad (E_1 = 127 \text{ V})$$

$$\underline{E}_2 = 127 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 127 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-63,5 - j109,985) \text{ V} \quad (E_2 = 127 \text{ V})$$

$$\underline{E}_3 = 127 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 127 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} - j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (-63,5 + j109,985) \text{ V} \quad (E_3 = 127 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = 127 - (-63,5 - j109,985) = (190,5 + j109,985) \text{ V}$$

$$(U_{12} = 219,970 \text{ V})$$

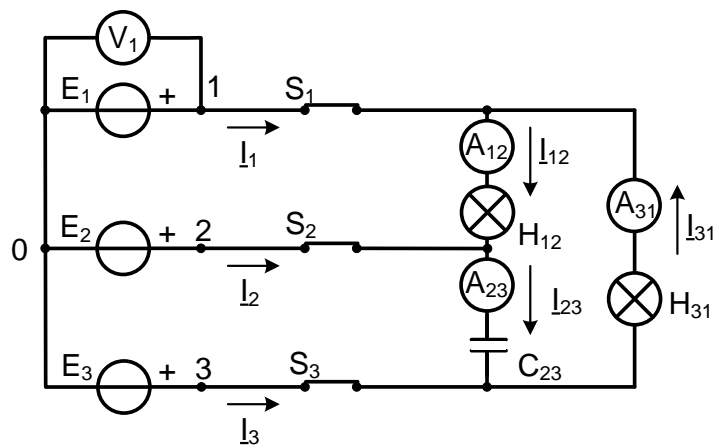
$$\underline{U}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 = (-63,5 - j109,985) - (-63,5 + j109,985) = (-j219,970) \text{ V}$$

$$(U_{23} = 219,970 \text{ V})$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1 = (-63,5 + j109,985) - 127 = (-190,5 + j109,985) \text{ V}$$

$$(U_{31} = 219,970 \text{ V})$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50 \cdot 5,305 \cdot 10^{-6}} = -j600 \Omega$$



Sl. 8.11 Nesimetričan potrošač vezan u trougao.

Struje u granama:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{R} = \frac{190,5 + j109,985}{500} = 0,381 + j0,220 \text{ A}, \quad (I_{12} = 0,440 \text{ A})$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_C} = \frac{-j219,985}{-j600} = 0,367 \text{ A}, \quad (I_{23} = 0,367 \text{ A})$$

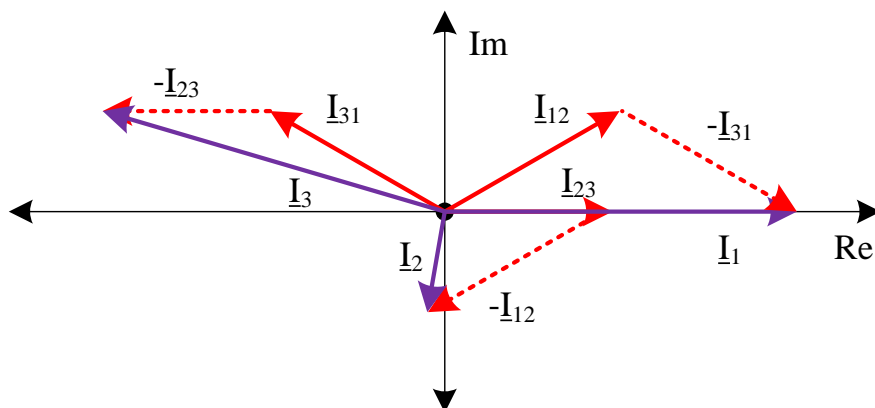
$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{R} = \frac{-190,5 + j109,985}{500} = -0,381 + j0,220 \text{ A}, \quad (I_{31} = 0,440 \text{ A})$$

Struje u napojnim vodovima:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = (0,381 + j0,220) - (-0,381 + j0,220) = 0,762 \text{ A} \quad (I_1 = 0,762 \text{ A})$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 0,367 - (0,381 + j0,220) = -0,014 - j0,220 \text{ A} \quad (I_2 = 0,220 \text{ A})$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = (-0,381 + j0,220) - (0,367) = (-0,748 + j0,220) \text{ A} \quad (I_3 = 0,780 \text{ A})$$



Sl. 8.12 Struje nesimetričnog potrošača vezanog u trougao.

9. vežba

9. Merenje snage nesimetričnog potrošača u četvorožičnom trofaznom sistemu

Snaga u neuravnoteženim polifaznim kolima

Trenutna snaga neuravnoteženog polifaznog kola je jednaka zbiru trenutnih snaga pojedinih faznih kola.

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) + \dots + u_n(t)i_n(t)$$

Stoga je i srednja ili aktivna snaga jednaka zbiru aktivnih snaga pojedinih faza.

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n U_k I_k \cos \phi_k$$

Isto pravilo važi i za reaktivnu snagu, jer se i ona održava.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = \sum_{k=1}^n U_k I_k \sin \phi_k$$

Kako aktivna i reaktivna snaga predstavljaju projekcije fazora prividne snage, to je i projekcija fazora prividne snage jednak zbiru projekcija fazora prividnih snaga pojedinih faza. Za samu prividnu snagu ovo ne možemo reći, pošto fazori koji se odnose na pojedine faze nisu kolinearni, kao u slučaju uravnoteženog kola. Ona je definisana jednačinom:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n U_k I_k \cos \phi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n U_k I_k \sin \phi_k\right)^2}$$

Faktor snage je definisan količnikom aktivne i prividne snage

$$k = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \cos \beta$$

i on je jednak kosinusu ugla koji fazor prividne snage zaklapa sa faznom osom. Merni broj ovog ugla ne predstavlja nikakvu faznu razliku između napona i struje.

Nesimetrični potrošač spojen u zvezdu sastoji se u prvoj fazi od omskog, u drugoj od induktivnog i u trećoj fazi od kapacitivnog potrošača. Idealnim instrumentima izmereni su naponi na priključcima pojedinih faznih potrošača, struje kroz njih i aktivne snage sva tri elementa. Pored ovih veličina meri se i struja nulprovodnika. Dobijeni su sledeći podaci:

$$U_1 = 220 \text{ V}, U_2 = 220 \text{ V}, U_3 = 220 \text{ V}.$$

$$I_1 = 4,5 \text{ A}, I_2 = 2,9 \text{ A}, I_3 = 1,8 \text{ A}, I_N = 0,535 \text{ A}.$$

$$P_1 = 990 \text{ W}, P_2 = 45 \text{ W}, P_3 = 20 \text{ W}.$$

Odrediti impedanse pojedinih faza, prividnu, aktivnu i reaktivnu snagu celog potrošača.

Prividne snage:

$$S_1 = U_1 I_1 = 220 \cdot 4,5 = 990 \text{ VA}$$

$$S_2 = U_2 I_2 = 220 \cdot 2,9 = 638 \text{ VA}$$

$$S_3 = U_3 I_3 = 220 \cdot 1,8 = 396 \text{ VA}$$

Reaktivne snage:

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{990^2 - 990^2} = 0 \text{ VAr}$$

$$Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = \sqrt{638^2 - 45^2} = 636,411 \text{ VAr}$$

$$Q_3 = \sqrt{S_3^2 - P_3^2} = \sqrt{396^2 - 20^2} = -395,495 \text{ VAr (kapacitivni potrošač)}$$

Prividne kompleksne snage:

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = (990 + j0) \text{ VA}$$

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = (45 + j636,411) \text{ VA}$$

$$\underline{S}_3 = P_3 + jQ_3 = (20 - j395,495) \text{ VA (kapacitivni potrošač)}$$

Impedanse pojedinih elemenata:

$$\underline{Z}_1 = \frac{S_1}{I_1^2} = \frac{990}{4,5^2} = 48,889 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{S_2}{I_2^2} = \frac{45 + j636,411}{2,9^2} = (5,351 + j75,673) \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{S_3}{I_3^2} = \frac{20 - j395,495}{1,8^2} = (6,173 - j122,066) \Omega$$

Aktivna snaga potrošača:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 990 + 45 + 20 = 1055 \text{ W}$$

Reaktivna snaga potrošača:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 636,411 - 395,495 = 240,916 \text{ VAr}$$

Prividna snaga potrošača:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1055^2 + 240,916^2} = 1082,158 \text{ VA}$$

Fazni naponi napajanja:

$$\underline{U}_1 = 220 \cdot e^{j0} = 220 \cdot (\cos 0 - j \sin 0) = 220 \text{ V}, \quad (U_1 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{U}_2 = 220 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-110 - j190,526) \text{ V} \quad (U_2 = 220 \text{ V})$$

$$\underline{U}_3 = 220 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 220 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} - j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (-110 + j190,526) \text{ V} \quad (U_3 = 220 \text{ V})$$

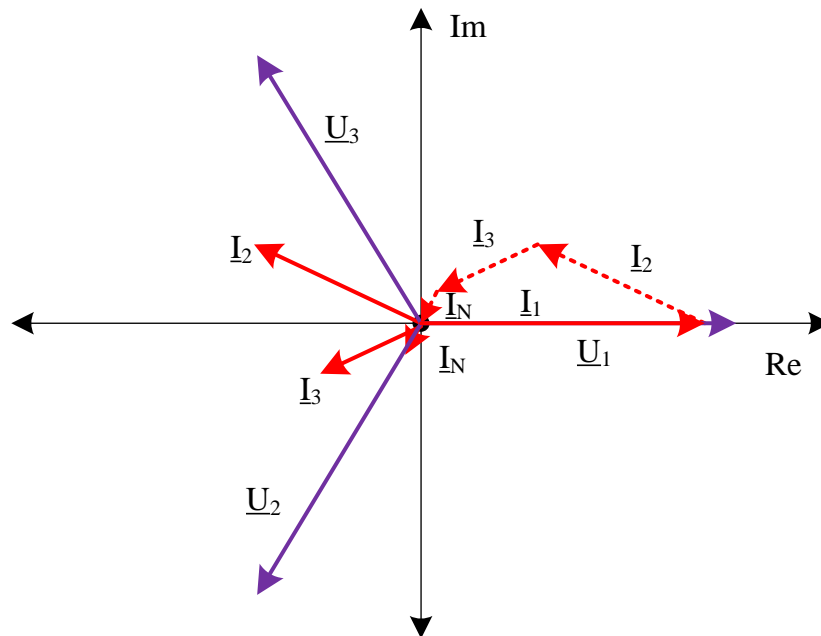
Struje pojedinih elemenata:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{220}{48,889} = 4,5 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{-110 - j190,526}{5,351 + j75,673} = (-2,608 + j1,269) \text{ A} \quad (I_2 = 2,9 \text{ A})$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-110 + j190,526}{6,173 - j122,066} = (-1,602 - j0,820) \text{ A} \quad (I_3 = 1,8 \text{ A})$$

$$\underline{I}_N = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -(4,5 - 2,608 + j1,269 - 1,602 - j0,820) = (-0,29 - j0,449) \text{ A} \\ (I_N = 0,535 \text{ A})$$



Sl. 9.1 Prikaz struja i napona u kompleksnoj ravni

10. Vežba.

Merenje aktivne snage pomoću dva vatmetra (Aronov spoj)

Trenutna vrednost snage u trofaznom sistemu može se odrediti sabiranjem trenutnih vrednosti snage pojedinih faza.

$$P_{mom} = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3$$

U trofaznom sistemu bez nulprovodnika suma struja sve tri faze u svakom trenutku mora biti nula!

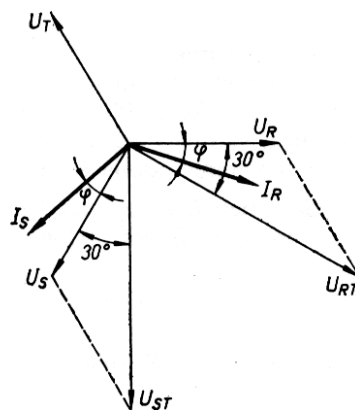
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$-i_3 = i_1 + i_2$$

$$P_{mom} = e_1 i_1 + e_2 i_2 - e_3 (i_1 + i_2)$$

$$P_{mom} = i_1 (e_1 - e_3) + i_2 (e_2 - e_3)$$

$$P = P_1 + P_2$$



Slika 9.35. Vektorski dijagram Aronova spoja za mjerenje djelatne snage

$$P_1 = I_R U_{RT} \cos(30^\circ - \varphi)$$

$$P_2 = I_S U_{ST} \cos(30^\circ + \varphi)$$

$$\cos(30^\circ - \varphi) = \cos 30^\circ \cos \varphi + \sin 30^\circ \sin \varphi$$

$$\cos(30^\circ + \varphi) = \cos 30^\circ \cos \varphi - \sin 30^\circ \sin \varphi$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = 0,5$$

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

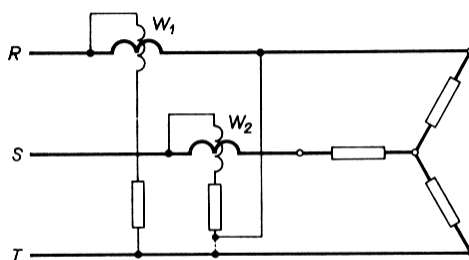
$$P_1 - P_2 = UI \sin \varphi$$

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{UI \sin \varphi}{\sqrt{3}UI \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi$$

označimo: $\xi = \frac{P_2}{P_1}$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^2}}$$

Očitavanja na vatmetrima treba numerički sabirati ili oduzimati, zavisno od faktora snage opterećenja. Kada ni približno nije poznat faktor snage moguće su zablude. Zbog toga treba voditi računa o pravilnom priključivanju, tj. mora se voditi računa o vremenskom redosledu faza, i o tome, koje su dovodne stezaljke na naponskoj i strujnoj grani vatmetra.

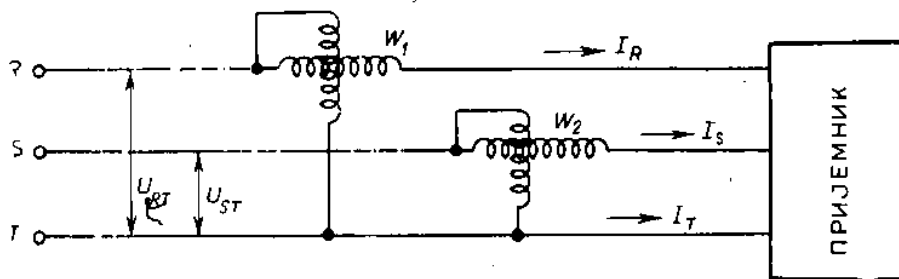


Slika 9.38. Kontrola pravilnog priključivanja vatmetara u Aronovu spoju

Kontrola pravilnosti priključivanja provodi se na sledeći način: Vatmetri W_1 i W_2 spoje se tako da imaju pozitivan otklon. Jedan od njih će pri tom dati manji otklon. Neka je to vatmetar W_2 . Njegova naponska grana se odvoji od one faze u kojoj nema strujnih grana vatmetra i uključi u onu granu u kojoj je strujna grana drugog vatmetra. Ako je njegov otklon i sada pozitivan, vatmetar je bio ispravno spojen i njegovo je očitavanje trebalo pribrojati očitavanju na drugom vatmetru. Ako je obratno treba ga odbiti.

6.6

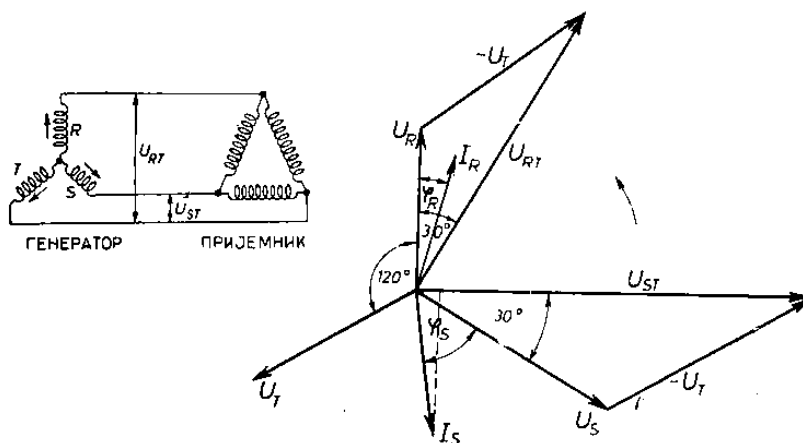
Dokazati da u slučaju simetričnog omskog opterećenja (to jest kada je $\varphi = 0$) svaki vatmetar u Aronovoj sprezi (sl. 221) pokazuje polovinu od ukupne snage P_u koji neki sistem odaje.



Сл. 221

- Odgovor:
Prema slici 222 vatmetar W_1 meri snagu:

$$P_1 = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{RT} \cdot I_R = \frac{3}{2} U_R \cdot I_R = \frac{1}{2} P_u$$



Сл. 222

Slično prednjem biće i za vatmetar W_2 :

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{ST} \cdot I_S = \frac{3}{2} U_S \cdot I_S = \frac{1}{2} P_u$$

6.7

Trofazni sistem je nesimetrično opterećen. Za merenje su upotrebljena dva vatmetra prema Aronovoj sprezi (sl. 221). Jedan od njih pokazuje 450 W a drugi 900 W. Kolika je snaga koju sistem troši?

Odgovor:

$$P_u = P_1 + P_2 = 450 + 900 = 1350 \text{ W}$$

6.8

Za trofazno nesimetrično opterećenje kod koga je $I_T = I_S = 10$ A, $I_R = 14,14$ A i $\varphi_R = \varphi_T = 30^\circ$, a $\varphi_S = 60^\circ$, nacrtati dijagram napona i struje za slučaj Aronove sprege prema slici 221 i objasniti kakvo će biti skretanje svakog vatmetra. Ako je napon mreže 220/380, naći snagu koju pokazuje svaki vatmetar, kao i ukupnu snagu sistema!

Odgovor:

Vatmetar W_1 meri snagu:

$$P_1 = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - \varphi_R) = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - 30^\circ) = 380 \cdot 14,14 \cdot \cos 0 = 5373,2 \text{ W}$$

Vatmetar W_2 :

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + \varphi_S) = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + 60^\circ) = 380 \cdot 10 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$P_u = P_1 + P_2 = 5373,2 + 0 = 5373,2 \text{ W}$$

6.9

Nacrtati dijagram napona i struja za slučaj simetričnog opterećenja trofaznog sistema 220/380 kod koga je, $P_1 = 803$ W, a $P_2 = 1893$ W, a veza vatmetra izvedena prema slici 221. Naći jačine struje ako je faktor snage $\cos \varphi = 0,819$!

Odgovor:

$$\varphi = \arccos(0,819) = \pm 35^\circ$$

$$\varphi = -35^\circ$$

Vatmetar W_1 meri snagu:

$$P_1 = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - \varphi) \Rightarrow I_R = \frac{P_1}{U_{RT} \cdot \cos(30^\circ - \varphi)} = \frac{800}{380 \cdot \cos(65^\circ)} = 5 \text{ A}$$

Vatmetar W_2 :

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_s \cos(30^\circ + \varphi_s) \Rightarrow I_s = \frac{P_2}{U_{ST} \cdot \cos(30^\circ - 35^\circ)} = \frac{1893}{380 \cdot \cos(-5^\circ)} = 5 \text{ A}$$

6.10

Pri vezama prema slici 221 vatmetar II skreće na suprotnu stranu i pri tome pokazuje $P_2=250 \text{ W}$, dok vatmetar I skreće u pravom smeru i pokazuje $P_1=3000 \text{ W}$. Koliku snagu troši sistem?

Odgovor:

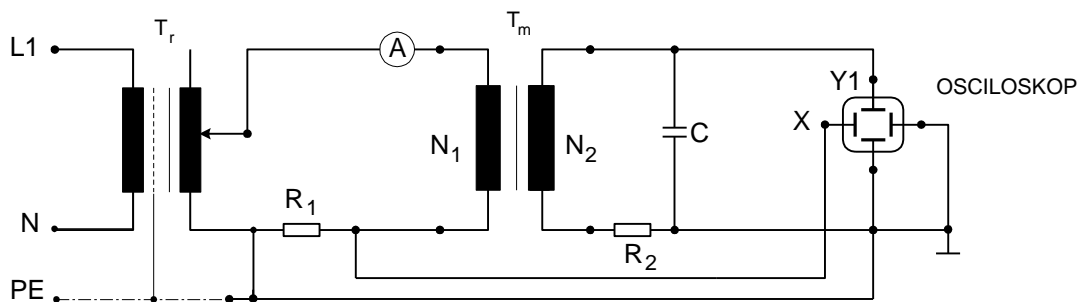
$$P = P_1 - P_2 = 3000 - 250 = 2750 \text{ W}$$

12. Vežba:

Snimanje dinamičke petlje histereza osciloskopom

Kratak uvod iz teorije

Snimanje histerezisne petlje može se izvršiti jednosmernom ili naizmeničnom strujom. Histerezisna petlja snimljena jednosmernom strujom naziva se statička petlja histereza i ona je uža, dok histerezisna petlja snimljena naizmeničnom strujom naziva se dinamička petlja i ona je šira. Osciloskopom se može snimiti dinamička petlja histereza primenom relativno jednostavnog sklopa koji je dat na slici 12.1.



Slika 12.1. Snimanje dinamične petlje histereza feromagnetnog uzorka osciloskopom

Primarni namotaj, koji ima N_1 namotaja, namotan je oko feromagnetnog materijala i priključen preko otpornika R_1 na izvor naizmeničnog napona. Na sekundarni namotaj, koji ima N_2 namotaja, priključeni su serijski spojeni otpornik R_2 i kondenzator C . Pad napona U_{R_1} na otporniku R_1 dovodi se na pojačavač za horizontalni otklon. Otklon elektronskog snopa u smeru ose x biće proporcionalan struji magnetisanja i_1 , jer je :

$$U_{R_1} = i_1 R_1$$

U prstenastom (torusnom) ili štapnom uzorku (zatvorenom jarmom neznatnog magnetskog otpora), jačina magnetnog polja je srazmerna struji magnetisanja i_1 , jer je tada :

$$H = \frac{N_1 i_1}{l},$$

$$l = l_{sr} = 2\pi \cdot r_{sr}$$

- l - dužina uzorka za prstenasti (torusni) uzorak feromagnetnog materijala
- r_{sr} - srednja vrednost unutrašnjeg r_u i vanjskog poluprečnika r_v prstenastog uzorka tj :

$$r_{sr} = \frac{r_u + r_v}{2}$$

Stoga je horizontalni otklon snopa srazmeran jačini magnetskog polja H u uzorku:

$$U_{R_1} = \frac{R_1 \cdot l}{N_1} \cdot H = k_H H$$

Pad napona na kondenzatoru C dovodi se na vertikalni pojačavač osciloskopa. Pri tome se odabere da je:

$$R_2 \gg \frac{1}{\omega C}$$

pa u sekundarnom krugu teče struja:

$$i_2 \approx \frac{e_2}{R_2}$$

Kod uzorka čiji je električni presek S , indukuje se u sekundarnom namotaju napon:

$$e_2 = -N_2 \cdot S \frac{dB}{dt}$$

pa u sekundarnom krugu teče struja :

$$i_2 = \frac{N_2 \cdot S}{R_2} \cdot \frac{dB}{dt}$$

Na kondenzatoru C vlada napon :

$$U_C = \frac{1}{C} \int i_2 \cdot dt$$

Pad napona na kondenzatoru C , a time i otklon u smeru y ose je srazmeran indukciji B u uzorku :

$$U_C = -\frac{N_2 S}{R_2 C} \cdot B = k_b B$$

Zadatak:**Snimanje dinamičke petlje histerezisa osciloskopom**

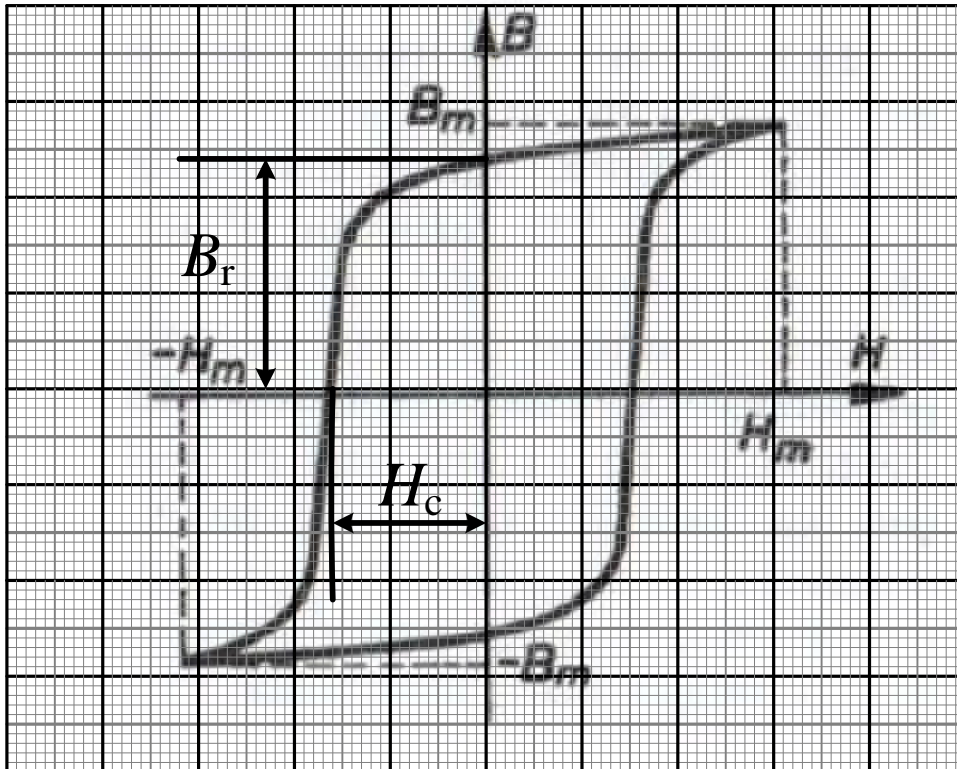
U *tabelu 12.1* su date vrednosti pojedinih komponenata i karakteristika mernih instrumenata, koje treba da su poznate da bi kolo na *slici 12.1* funkcionisao na predviđen način.

R_1	R_2	C	K_x	K_y	N_1	N_2	S	L
[Ω]	[k Ω]	[μ F]	[V/DIV]	[V/DIV]	[zav]	[zav]	[cm ²]	[cm]
1	5	10	0.8	0.3	300	50	8.75	62.8

Tabela 12.1. Vrednosti komponenata i karakteristika mernih instrumenata

Regulacionim transformatorom povećati napon dok ampermetar ne pokaže 1 A.

Na *slici 12.2* nacrtati krivu dinamičke petlje histerezisa uzoraka dobijenu na ekranu osciloskopa, izmeriti podeoke (DIV) po osi x i y koje odgovaraju koercitivnom polju H_c i remanentnoj indukciji B_r . Rezultat merenja uneti u *tabelu 12.2*.



Slika 12.2. Dinamička petlja histereze za materijal od koga je načinjeno jezgro transformatora T_m

Izračunati vrednosti remanentne indukcije B_r i koercitivnog polja H_c korišćenjem izraza :

$$B_r = \frac{R_2 \cdot C \cdot K_y \cdot y}{N_2 \cdot S}$$

$$H_c = \frac{N_1 \cdot K_x \cdot x}{R_1 \cdot l}$$

rezultate uneti u tabelu 12.2.

x [DIV]	y [DIV]	B_r [T]	H_c [A/m]

Tabela 12.2. Rezultati merenja remanentne indukcije i koercitivnog polja

Rešenje:

Rezultati merenja:

$$x = 2,4 \text{ [DIV]}$$

$$y = 1,6 \text{ [DIV]}$$

Proračuni:

$$B_r = \frac{R_2 \cdot C \cdot K_y \cdot y}{N_2 \cdot S} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,3 \cdot 1,6}{50 \cdot 8,75 \cdot 10^{-4}} = 0,5486 \text{ T}$$

$$H_c = \frac{N_1 \cdot K_x \cdot x}{R_1 \cdot l} = \frac{300 \cdot 0,8 \cdot 2,4}{1 \cdot 0,628} = 847,059 \text{ A/m}$$

x [DIV]	y [DIV]	B_r [T]	H_c [A/m]
2,4	1,6	0,5486	847,059

Tabela 12.2. Rezultati merenja remanentne indukcije i koercitivnog polja