

Visokatehnička Škola Strukovnih Studija Subotica

**Primeri zadataka za prvi ciklus laboratorijskih
vežbi iz električnih merenja**

Sastavili:

Karolj Nađ i Peter Šarčević

Subotica 2018.

3. vežba:

Na uzorku iz populacije izvršeno je $n = 31$ merenja. Izmerene veličine su date u (N/mm^2): 470, 481, 483, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 493, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 512, 514, 516, 519, 529, 530.

a) Pokazati da na osnovu podataka merenja raspodela čvrstine materijala je približno normalne raspodele (nacrtati histogram merenja)!

b) Proceniti očekivanu vrednost populacije (sa \bar{x} aritmetičkom sredinom uzoraka), i standardnu devijaciju (standardnom devijacijom uzorka) identifikovati eventualne grube greške!

Rešenje:

a)

Broj grupa je:

$$k \approx \sqrt{n} = \sqrt{31} = 5.568 \approx 6$$

Širina grupa je:

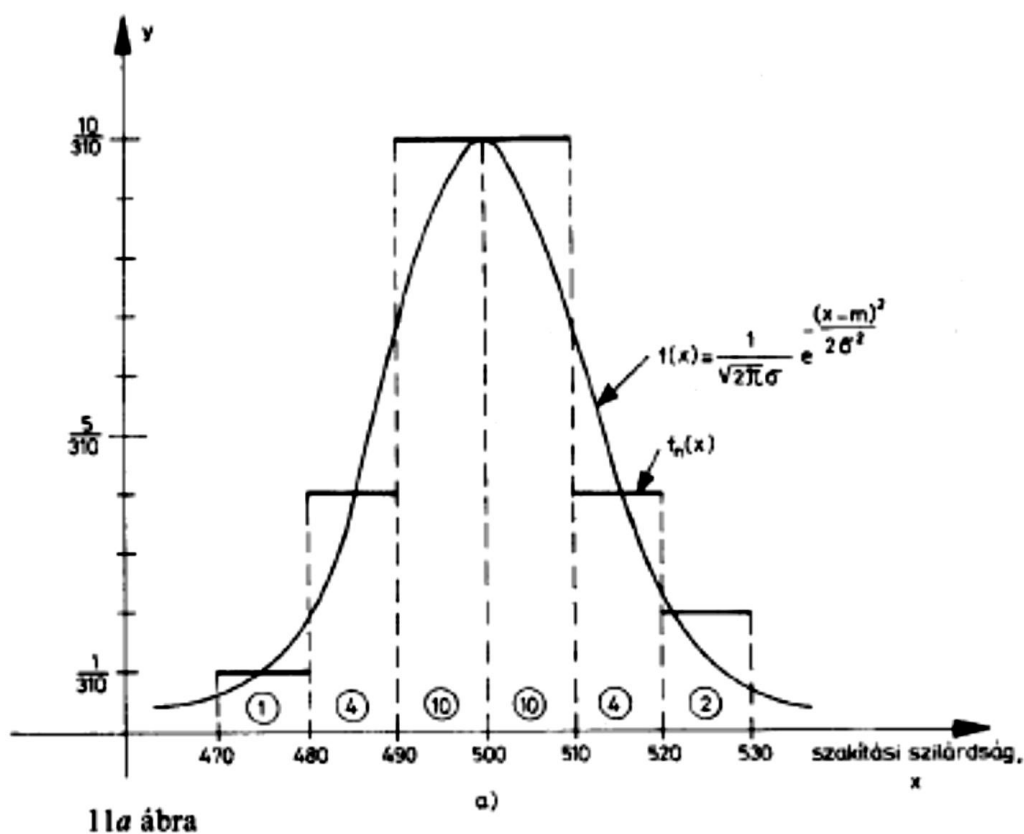
$x_{i\min}$ - najmanja izmerena vrednost,

$x_{i\max}$ - najveća izmerena vrednost,

$$d = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{k} = \frac{530 - 470}{6} = 10$$

	Granice grupa N/mm^2	Učestalost	Relativna učestalost
1	470-480	1	$1/31=0,0323$
2	480-490	4	$4/31=0,1290$
3	490-500	10	$10/31=0,3226$
4	500-510	10	$10/31=0,3226$
5	510-520	4	$4/31=0,1290$
6	520-530	2	$2/31=0,0645$
	Σ	31	1,00

Histogram je skoro simetričan i liči na zvonastu krivu normalne raspodele. Rezultate merenja čvrstine materijala možemo predstaviti normalnom raspodelom (slika: 11a).



b) Suma izmerenih vrednosti podeljeno sa brojem merenja daje aritmetičku sredinu rezultata merenja (ova vrednost predstavlja procenu očekivane vrednosti):

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	470	-30.6452	939.1259
2	481	-19.6452	385.9324
3	483	-17.6452	311.3517
4	488	-12.6452	159.9001
5	489	-11.6452	135.6098
6	490	-10.6452	113.3195
7	491	-9.64516	93.02914
8	492	-8.64516	74.73881
9	493	-7.64516	58.44849
10	493	-7.64516	58.44849
11	495	-5.64516	31.86785
12	496	-4.64516	21.57752
13	497	-3.64516	13.2872
14	498	-2.64516	6.996878
15	499	-1.64516	2.706556
16	500	-0.64516	0.416233
17	501	0.354839	0.125911
18	502	1.354839	1.835588
19	503	2.354839	5.545265
20	504	3.354839	11.25494
21	505	4.354839	18.96462
22	506	5.354839	28.6743
23	507	6.354839	40.38398
24	508	7.354839	54.09365
25	509	8.354839	69.80333
26	512	11.35484	128.9324
27	514	13.35484	178.3517
28	516	15.35484	235.7711
29	519	18.35484	336.9001
30	529	28.35484	803.9969
31	530	29.35484	861.7066
Σ	15520	5.68E-13	5183.097

$$m \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{470 + 481 + \dots + 530}{31} = 500,645$$

Procena standardne devijacije rezultata:

$$\begin{aligned} \sigma \approx s &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(470 - 500,645)^2 + \dots + (530 - 500,645)^2}{30}} = 13,144 \end{aligned}$$

Može se uočiti da je standardna devijacija prilično mala u odnosu na aritmetičku sredinu:

$$\frac{s}{\bar{x}} = \frac{13,144}{500,645} = 0,026$$

Procenjena relativna standardna devijacija rezultata merenja od 2,6% pokazuje, da se čvrstina materijala u maloj meri rasipa oko očekivane vrednosti.

Procenjena granica grube greške:

$$\bar{x} - 3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma$$

$$500,645 - 3 \cdot 13,144 \leq x \leq 500,645 + 3 \cdot 13,144$$

$$461,213 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq x \leq 540,077 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Svi rezultati merenja se nalaze unutar ovih granica, znači možemo smatrati da među nabrojanim rezultatima merenja nema podataka sa grubom greškom.

4. vežba:

Prilikom baždarenja voltmetra na mernom opsegu od 0 – 100 V dobili smo sledeće rezultate:

U_x -Pokazivanje instrumenta koji se baždari

$\uparrow U_e$ -Pokazivanje etalonskog instrumenta prilikom povećanja napona,

$\downarrow U_e$ -Pokazivanje etalonskog instrumenta prilikom smanjenja napona.

U_x	$\uparrow U_e$	$\downarrow U_e$
V	V	V
10	10.8	10.4
20	20.9	20.9
30	31	31
40	40.9	41
50	51.1	50.8
60	61.2	60.9
70	71.4	70.9
80	81.3	81.2
90	92	91.4
100	101.6	101.4

Na osnovu izvršenih merenja odrediti sledeće podatke:

$\overline{U_e}$ -srednju vrednost izmerenog napona etalonskim instrumentom,

G_a -apsolutnu grešku,

k_r , -vrednost korekcije,

$G_{r(\%)}$ -relativnu grešku u procentima i

$G_{SV(\%)}$. -svedenu relativnu grešku u procentima

Grešku linearnosti i grešku histereze.

Vrednosti u koloni $\overline{U_e}$ su aritmetička sredina odgovarajućih vrednosti iz kolona $\uparrow U_e$ i $\downarrow U_e$;

$$\overline{U_e} = \frac{\uparrow U_e + \downarrow U_e}{2}$$

Apsolutna greška G_a za svaku ispitivanu tačku skale računa se kao:

$$G_a = U_x - \bar{U}_e$$

Korekcija za svaku ispitivanu tačku se određuje kao:

$$k_r = -G_a$$

Procentualna relativna greška $G_{r(\%)}$ i svedena relativna greška $G_{SV(\%)}$ za ova ispitivanja se računaju kao :

$$G_{r(\%)} = \frac{U_x - \bar{U}_e}{U_x} \cdot 100 \quad \text{i} \quad G_{SV(\%)} = \frac{U_x - \bar{U}_e}{U_{x \max}} \cdot 100$$

U_x	$\uparrow U_e$	$\downarrow U_e$		\bar{U}_e	G_a	$G_{r(\%)}$	k_r	$G_{SV(\%)}$
V	V	V		V	V	%	V	%
10	10.8	10.4		10.6	-0.6	-5.66038	0.6	-0.59113
20	20.9	20.9		20.9	-0.9	-4.30622	0.9	-0.8867
30	31	31		31	-1	-3.22581	1	-0.98522
40	40.9	41		40.95	-0.95	-2.3199	0.95	-0.93596
50	51.1	50.8		50.95	-0.95	-1.86457	0.95	-0.93596
60	61.2	60.9		61.05	-1.05	-1.7199	1.05	-1.03448
70	71.4	70.9		71.15	-1.15	-1.6163	1.15	-1.133
80	81.3	81.2		81.25	-1.25	-1.53846	1.25	-1.23153
90	92	91.4		91.7	-1.7	-1.85387	1.7	-1.67488
100	101.6	101.4		101.5	-1.5	-1.47783	1.5	-1.47783

Linearnost

$$G_{L(\%)} = \frac{|U_x - U|_{\max}}{U_{x \max}} \cdot 100 = \frac{\max \left\{ |y_i - (ax_i + b)| \right\}}{y_{\max}} \cdot 100$$

Formule potrebne za proračun optimalne prave:

$$a = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \sum(x_i) \cdot \sum(y_i)}{n \cdot \sum(x_i^2) - [\sum(x_i)]^2}$$

$$b = \frac{\sum(y_i) \cdot \sum(x_i^2) - \sum(x_i) \cdot \sum(x_i y_i)}{n \cdot \sum(x_i^2) - [\sum(x_i)]^2}$$

Vrednosti na optimalnoj pravi koji odgovaraju tačkama baždarenja:

$$y = ax_i + b$$

x_i -podešene vrednosti na instrumentu koji se baždari (U_x),

y_i -srednja vrednost merenih veličina na etalonskom instrumentu za dati U_x
($\overline{U_e}$)

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2		$ y_i - (ax_i + b) $
	10	10.6	106	100		0.078182
	20	20.9	418	400		0.12697
	30	31	930	900		0.132121
	40	40.95	1638	1600		0.012727
	50	50.95	2547.5	2500		0.107576
	60	61.05	3663	3600		0.102424
	70	71.15	4980.5	4900		0.097273
	80	81.25	6500	6400		0.092121
	90	91.7	8253	8100		0.26303
	100	101.5	10150	10000		0.031818
Σ	550	561.05	39186	38500		

$$a = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \sum(x_i) \cdot \sum(y_i)}{n \cdot \sum(x_i^2) - [\sum(x_i)]^2} = \frac{10 \cdot 39186 - 550 \cdot 561,05}{10 \cdot 38500 - 550^2} = 1,009485$$

$$b = \frac{\sum(y_i) \cdot \sum(x_i^2) - \sum(x_i) \cdot \sum(x_i y_i)}{n \cdot \sum(x_i^2) - [\sum(x_i)]^2} = \frac{561,05 \cdot 38500 - 550 \cdot 39186}{10 \cdot 38500 - 550^2} = 0,583333$$

Greška linearnosti:

$$G_{L(\%)} = \frac{\max \left\{ |y_i - (ax_i + b)| \right\}}{y_{\max}} \cdot 100 = \frac{0,26303}{101,5} \cdot 100 = 0,259143 \%$$

Histerezis

U_g -Pokazivanje etalonskog instrumenta prilikom povećanja napona, ($\uparrow U_e$)

U_d -Pokazivanje etalonskog instrumenta prilikom smanjenja napona ($\downarrow U_e$).

U_g	U_d	$ U_g - U_d $
V	V	
10.8	10.4	0.4
20.9	20.9	0
31	31	0
40.9	41	0.1
51.1	50.8	0.3
61.2	60.9	0.3
71.4	70.9	0.5
81.3	81.2	0.1
92	91.4	0.6
101.6	101.4	0.2

Greška histereze:

$$G_{H(\%)} = \frac{|\downarrow U_e - \uparrow U_e|_{\max}}{U_{x\max}} \cdot 100 = \frac{0,6}{101,5} \cdot 100 = 0,591 \%$$

5. vežba:

5.1 *Merenjem otpora prema slici 170a (voltmetar ispred ampermetra) izmereno je $I = 0,5$ A; $U' = 15$ V. Naći tačnu vrednost otpora ako se zna da je $R_a = 0,2$ Ω , kao i grešku koja se pri merenju čini?*

- Odgovor:

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U'}{I} = \frac{15}{0,5} = 30 \Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R = \frac{U' - u_a}{I} = \frac{U' - R_a \cdot I}{I} = \frac{U'}{I} - R_a = \frac{15}{0,5} - 0,2 = 29,8 \Omega$$

Relativna greška je:

$$G_{r\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{\frac{U'}{I} - \frac{U' - R_a \cdot I}{I}}{\frac{U' - R_a \cdot I}{I}} \cdot 100 = \frac{R_a \cdot I}{U' - R_a \cdot I} \cdot 100 = \frac{0,2 \cdot 0,5}{15 - 0,2 \cdot 0,5} \cdot 100 = \frac{10}{14,9} = 0,671\%$$

5.2 *Ponoviti isti zadatak za slučaj da je otpor ampermetra je $R_a = 2$ Ω , a vrednosti za napon i struju iste.*

- Odgovor:

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U'}{I} = \frac{15}{0,5} = 30 \Omega$$

Tačna vrednost je:

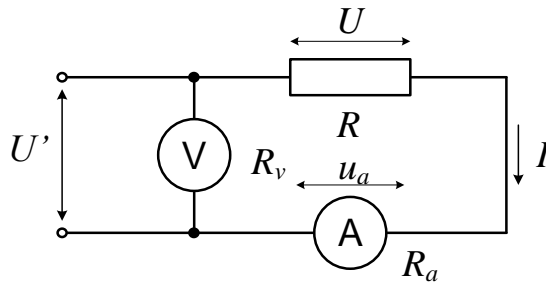
$$R = \frac{U' - u_a}{I} = \frac{U' - R_a \cdot I}{I} = \frac{U'}{I} - R_a = \frac{15}{0,5} - 2 = 28 \Omega$$

Relativna greška je:

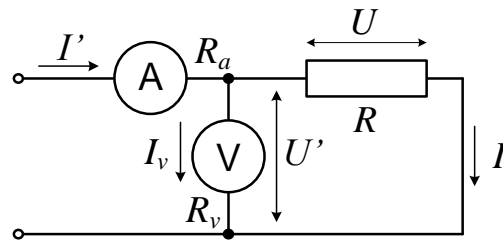
$$G_{r\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{\frac{U'}{I} - \frac{U' - R_a \cdot I}{I}}{\frac{U' - R_a \cdot I}{I}} \cdot 100 = \frac{R_a \cdot I}{U' - R_a \cdot I} \cdot 100 = \frac{2 \cdot 0,5}{15 - 2 \cdot 0,5} \cdot 100 = \frac{100}{14} = 7,143\%$$

5.3 Da li na rezultat merenja po slici 170 a. utiče unutrašnji otpor voltmetra?

- Odgovor: Ne.



Slika:170 a.



Slika:170 b.

5.4 Merenjem otpora prema slici 170b. (ampermetar ispred voltmetra) izmereno je $I' = 30 \text{ mA}$; $U = 20 \text{ V}$. Naći tačnu vrednost otpora kao i grešku koja se pri merenju čini. Za merenje napona upotrebljen je univerzalni instrument kod koga je unutrašnji otpor $20\,000 \Omega/V$ na opsegu od 60 V .

- Odgovor:
Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U}{I'} = \frac{20}{30 \cdot 10^{-3}} = 666,667 \Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R' = \frac{R \cdot R_v}{R + R_v} \Rightarrow R = \frac{R' \cdot R_v}{R_v - R'} = \frac{666,667 \cdot (60 \cdot 20000)}{60 \cdot 20000 - 666,667} = 667,037 \Omega$$

Unutrašnji otpor instrumenta je: $R_v = 60 \cdot 20000 = 1,2 \text{ M}\Omega$

Relativna greška je:

$$G_{r\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{666,667 - 667,037}{667,037} \cdot 100 = -0,0555\%$$

5.5 Ponoviti isti zadatak pod 5.4 za slučaj upotrebe voltmetra sa $100 \Omega/V$ a na opsegu od 300 V .

- Odgovor:

Unutrašnji otpor instrumenta je: $R_v = 300 \cdot 100 = 30 \text{ k}\Omega$

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U}{I'} = \frac{20}{30 \cdot 10^{-3}} = 666,667 \text{ }\Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R' = \frac{R \cdot R_v}{R + R_v} \Rightarrow R = \frac{R' \cdot R_v}{R_v - R'} = \frac{666,667 \cdot (300 \cdot 100)}{300 \cdot 100 - 666,667} = 681,819 \text{ }\Omega$$

Relativna greška je:

$$G_{r\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{666,667 - 681,819}{681,819} \cdot 100 = -2,222 \%$$

5.6 *Da li na rezultat merenja pod 5.4 i 5.5 utiče unutrašnji otpor ampermetra?*

- Odgovor: Ne.

6. vežba:

Naponski merni opseg vatmetra je $MO_{WU} = 300$ V, a strujni opseg je $MO_{WI} = 1$ A. Maksimalni odklon kazaljke je $\alpha_{\max} = 150$ podeoka. Klasa tačnosti instrumenta $K = 0,2$. Pri odklonu kazaljke od $\alpha = 30$ podeoka, odrediti konstantu instrumenta C_W i relativnu grešku merenja $G_{r\%}$!

- Odgovor:

$$C_W = \frac{MO_{WU} \cdot MO_{WI}}{\alpha_{\max}} = \frac{300 \cdot 1}{150} = 2 \frac{\text{W}}{\text{pod.}}$$

$$K = 0,2 \Rightarrow G_{SV\%} = \pm 0,2 \%$$

$$G_{r\%} = G_{SV\%} \frac{\alpha_{\max}}{\alpha} = \pm 0,2 \frac{150}{30} = \pm 1 \%$$

Izračunati aktivnu snagu P_t , prividnu snagu S_t , reaktivnu snagu Q_t i faktor snage $\cos \phi$ monofaznog tereta. Merenje snage se vrši poluindirektnom metodom. Prenosni odnos strujnog transformatora $a_i = 2$, sekundarna struja $I_2 = 4$ A, fazni napon $U_{1N} = 230$ V a vatmetrom izmerena snaga $P = 800$ W.

- Odgovor:

$$P_t = a_i \cdot P = 2 \cdot 800 = 1600 \text{ W}$$

$$S_t = a_i \cdot I_2 \cdot U_{1N} = 2 \cdot 4 \cdot 230 = 1840 \text{ VA}$$

$$Q_t = \sqrt{S_t^2 - P_t^2} = \sqrt{1840^2 - 1600^2} = 908,625 \text{ VAr}$$

$$\cos \phi = \frac{P_t}{S_t} = \frac{1600}{1840} = 0,8696$$

7. vežba:

Merenje napona

Merenje naponskog nivoa se svodi na merenje rastojanja na ekranu osciloskopa pogodnim korišćenjem njegove graduacije. Da bi se odredili naponski nivoi potrebno je znati gde se nalazi linija nultog potencijala i kolika je podela naponske ose.

Podela naponske ose se može odrediti ispravnim očitavanjem sa preklopnika za podelu naponske ose specificiranog kanala, dok se pozicija linije nultog potencijala može odrediti prebacivanjem tropoložajnog preklopnika za selekciju tipa prikazivanja signala u položaj GND.

Na ekranu će se pojaviti horizontalna linija koja označava liniju nultog potencijala. Podešavanjem potenciometra \updownarrow POSITION moguće je dovesti liniju nultog potencijala na pogodno mesto radi lakšeg očitavanja, a obično je to neka od linija graduacije ekrana. Naponski nivo se dobija množenjem rastojanja od linije nultog potencijala sa podelom naponske ose. Na slici 59. je prikazan jedan vremenski dijagram napona.

Ukoliko je podela naponske ose $2\text{V}/\text{DIV}$, fino graduisanje (gusto graduisanje) $0,4\text{V}/\text{DIV}$ i ako je linija nultog potencijala na centralnoj horizontalnoj liniji graduacije ekrana. Maksimalna vrednost sinusnog napona od centralne linije ima 2 gruba i dva fina podeoka

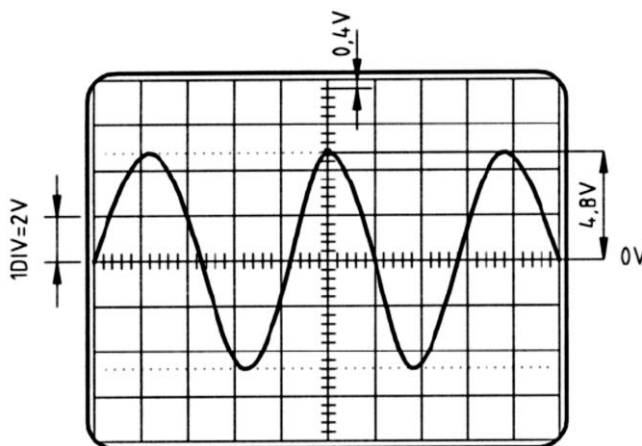
$2 \text{ DIV} + 2 \text{ fina podeoka}$.

Ako je naponska podela $(2 \text{ V})/\text{DIV}$,

$1 \text{ DIV} = 2 \text{ V}$, $1 \text{ fini podeok} = (2 \text{ V})/5 = 0,4 \text{ V}$,

Maksimalna vrednost signala je:

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,4 = 4,8 \text{ V}$.



Sl. 59: Merenje maksimalne vrednosti sinusnog signala

Merenje vremenskih intervala

Poput merenja naponskih nivoa, osciloskopom je moguće vršiti merenja vremenskih intervala. Ukoliko se mere intervali vremena na jednom signalu, merenje je potpuno analogno merenju napona, potrebno je samo izmeriti horizontalno rastojanje između dve tačke koje definišu mereni vremenski interval i preračunati ga u vreme u skladu sa podelom vremenske ose. Pri tom treba proveriti da li je potenciometar za kontinualnu promenu podele vremenske ose u kalibrisanom položaju i u kome je položaju preklopnik za povećavanje rezolucije vremenske ose.

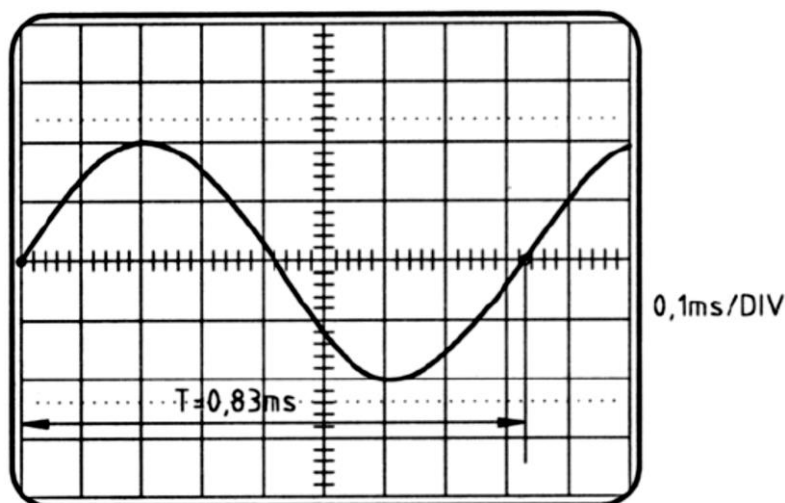
Podesiti podele naponske i vremenske ose tako da se očitavanje rastojanja može izvršiti što tačnije.

Pogodnim horizontalnim i vertikalnim pozicioniranjem dovesti sliku u položaj da se očitavanje može izvršiti na centralnoj horizontalnoj liniji graduacije.

Očitati rastojanje između tačaka koje definišu mereni interval vremena i preračunati ga u vreme u skladu sa podelom vremenske ose.

Na primer perioda sinusnog signala na sl.60 je: 8 DIV + 1,5 fina podeoka. Ako je pozicija TIME/DIV prekidača $(0,1 \text{ ms})/\text{DIV}$ (jedan fini podeok $(0,1 \text{ ms})/5 = 0,02 \text{ ms}$), $[K_x = (0,1 \text{ ms})/\text{DIV}]$ trajanje periode je:

$$8 \cdot 0,1 + 1,5 \cdot 0,02 = 0,83 \text{ ms} .$$



Sl.60: Merenje trajanja periode sinusnog signala

Merenje fazne razlike

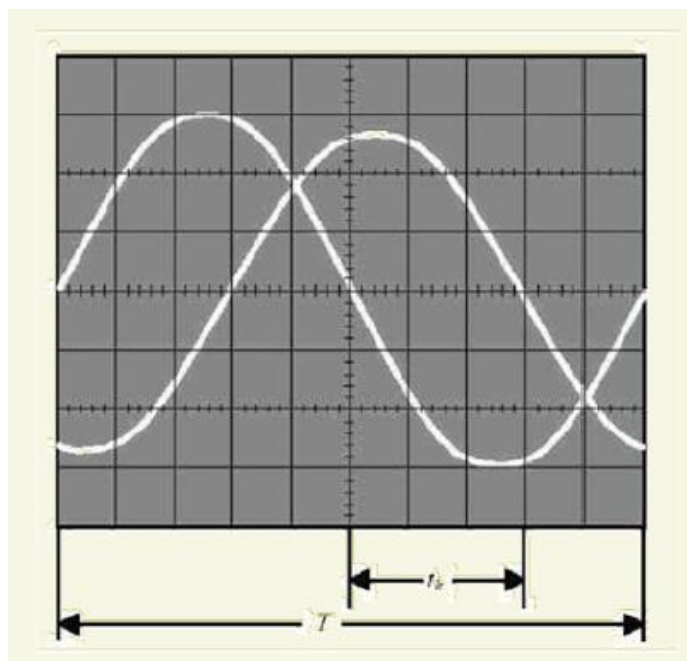
Fazna razlika se može meriti osciloskopom na dva načina:

- Neposrednim posmatranjem dva signala dvokanalnim osciloskopom i
- u *XY* režimu fazni odnosi mogu se meriti primenom Lisažuovih figura.

Merenje fazne razlike između dva sinusoidalna signala se može svesti na merenje periode signala (T) i vremenske razlike između dva susedna uzlazna ili silazna prolaska kroz nulu tih signala (t_k).

Fazna razlika se tada izračunava kao:

$$\varphi = \frac{t_k}{T} 360^\circ$$



Merenje periode i frekvencije

Merenje periode se svodi na merenje vremenskog intervala na dijagramu posmatranog signala. Na ekranu osciloskopa treba obezbediti prikazivanje jedne cele periode signala. Treba očitati rastojanje između početka i kraja posmatrane

periode (za ovu svrhu je pogodno koristiti presečne tačke sa centralnom horizontalnom linijom graduacije ekrana) i izmereno rastojanje preračunati u vreme u skladu sa podelom vremenske ose.

Ako je rastojanje između dva uzlazna prolaska kroz nulu posmatranog signala

$$l = 6,4 \text{ DIV},$$

A vremenska baza je podešena na vrednost: $K_{vb} = (10 \text{ ms})/\text{DIV}$,
[$K_x = (10 \text{ ms})/\text{DIV}$]

Perioda ovog signala je:

$$T = l \cdot K_{vb} = [6,4 \text{ DIV}] \cdot [(10 \text{ ms})/\text{DIV}] = 64 \text{ ms},$$

A frekvencija

$$f = 1/T = 1/(64 \cdot 10^{-3}) = 15,625 \text{ Hz}.$$