Merenja

4. predavanje

Obrada rezultata indirektno merene veličine

Pored direktnih merenja u mernoj praksi jednako su značajna i indirektna merenja, gde se ne meri veličina koja nas interesuje, već druge veličine koje su sa njom povezane nekom funkcionalnom i poznatom zavisnošću. Kako je svaka od ovih direktno merenih veličina poznata sa definisanom greškom, zadatak se svodi na određivanje greške indirektno merene veličine, na osnovu poznavanja grešaka pojedinih direktno merenih veličina.

S obzirom na različite oblike grešaka merenja direktno merenih veličina razlikujemo:

- Sistematsku grešku indirektno merene veličine,
- Standardnu devijaciju indirektno merene veličine,
- Graničnu grešku indirektno merene veličine,

Sistematska greška indirektno merene veličine

Ako su greške merenja veličina x_i sistematske, odnosno, ako je uticaj slučajnih grešaka u odnosu na sistematske zanemarljivo mali, tada je potrebno odrediti sistematsku grešku indirektno merene veličine. Vrednosti sistematskih grešaka direktno merenih veličina mogu, na primer, biti poznate iz rezultata kalibracije.

U opštem slučaju kada je indirektno merena veličina y funkcija više međusobno nezavisnih direktno merenih veličina x_i, i ako su poznate sistematske greške pojedinih direktno merenih veličina Δx_i, pri čemu je u svakom pojedinačnom slučaju $\Delta x_i << x_i$, sistematska greška indirektno merene veličine može se odrediti primenom totalnog diferencijala funkcije y, i aproksimacijom diferencijalnih priraštaja odgovarajućim greškama, pa je:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

odnosno:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)$$

Gde je $\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$

parcijalna greška veličine y prouzrokovana greškom Δx_i . Dakle, sistematska greška indirektno merene veličine y jednaka je zbiru njenih parcijalnih grešaka.

Standardna devijacija indirektno merene veličine

Ako je s_i standardna devijacija direktno merene veličine x_i onda se standardna devijacija indirektno merene veličine y dobija zamenom odgovarajućih slučajnih grešaka direktno merenih veličina Δx_i standardnim devijacijama s_i, što znači da je za standardnu devijaciju indirektno merene veličine

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_1} \cdot s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_2} \cdot s_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_n} \cdot s_n\right)^2}$$

odnosno

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial \overline{\overline{x}}_i} \cdot s_i \right)^2}$$

Izraz za relativnu standardnu devijaciju indirektno merene veličine je:

$$r_y = \frac{s_y}{\overline{\overline{y}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dy}{d\overline{\overline{x}}_i} \cdot \frac{s_i}{\overline{\overline{y}}} \right)^2}$$

Standardna devijacija nekih složenih funkcija iz merne prakse

Za slučajeve koji se najčešće javljaju u mernoj praksi standardna devijacija aritmetičke sredine indirektno merene veličine, kao i odgovarajuća relativna standardna devijacija su:

- za slučaj zbira niza direktno merenih veličina

$$\left(y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$$

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \sqrt{\frac{1}{\overline{y}^2}\left(s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2\right)}$$

- zbir dve direktno merene veličine $\left(y = x_1 + x_2\right)$

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 \cdot \overline{x}_1^2 + r_2^2 \cdot \overline{x}_2^2}}{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$$

- razlika dve direktno merene veličine $\left(y = x_1 - x_2\right)$

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 \cdot \overline{x}_1^2 + r_2^2 \cdot \overline{x}_2^2}}{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}$$

- proizvod dve direktno merene veličine $\left(y = x_1 \cdot x_2\right)$

$$s_y = \sqrt{\overline{x}_2^{\,2} \cdot s_1^2 + \overline{x}_1^{\,2} \cdot s_2^2}$$

$$r_y = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

količnik dve direktno merene veličine $\left(y = \frac{x_1}{x_2} \right)$

$$s_y = \sqrt{\frac{s_1^2}{\bar{x}_2^2} + \frac{\bar{x}_1^2 \cdot s_2^2}{\bar{x}_2^4}}$$

$$r_y = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

Granična greška indirektno merene veličine

Pri praktičnim merenjima često nismo u situaciji da poznajemo prave vrednosti grešaka direktno merenih veličina ako, na primer, nije izvršena kalibracija odgovarajućih mernih sredstava, ili statistička analiza njihovih rezultata merenja, pa tada raspolažemo samo tehničkim karakteristikama korišćenih mernih sredstava iz uputstva proizvođača. Na taj način su jedino poznate najveće dopuštene greške koje deklariše proizvođač mernog sredstva, i koje se u ovim razmatranjima nazivaju granične greške direktno merenih veličina $x_{i,max}$.

Do granične greške indirektno merene veličine $\Delta y_{i,max}$, dolazi se kada se u sistematsku grešku indirektno merene veličine određenu primenom totalnog diferencijala funkcije $\boldsymbol{y}$, zamene $\Delta \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}$ sa $\Delta \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i,max}}$, pa je granična greška tzv. najnepovoljnijeg slučaja (sve $\Delta \boldsymbol{x}$ imaju isti znak)

$$\Delta y_{\max} = \pm \left\{ \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_{1,\max} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_{2,\max} \right| + \ldots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_{n,\max} \right| \right\}$$

odnosno
$$\Delta y_{\max} = \pm \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_{i,\max} \right|$$

znači,

$$y = f\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$$

granična greška funkcije više promenljivih jednaka je zbiru apsolutnih vrednosti pojedinih parcijalnih diferencijala iste funkcije.

Praktična vrednost granične greške je u njenoj primeni za sigurnu procenu vrednosti indirektno merene veličine, jer će se ona u svakom slučaju nalaziti u tim granicama.

$$y = \overline{y} \pm \left|\Delta y_{\max}\right|$$

S obzirom na objektivno nerealno veliku, ovako definisanu, graničnu grešku, u praktičnoj upotrebi se češće preporučuje statistička granična greška, koja se dobija iz već definisane najverovatnije greške, u kojoj su greške direktno merenih veličina Δx_i zamenjene sa graničnim greškama direktno merenih veličina $\Delta x_{i,max}$. Na ovaj način se definišu znatno uže granice indirektno merene veličine kao:

$$y = \overline{y} \pm \Delta y_{N,\max}$$

gde je statistička granična greška data kao:

$$\Delta y_{N,\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_{1,\max}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_{2,\max}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_{n,\max}\right)^2}$$

Metode merenja

Metoda merenja predstavlja skup teoretskih i praktičnih postupaka, koji su uključeni u izvršenje merenja u skladu sa datim principom merenja.

Merni rezultat je proizvod mernog procesa, za koji se kaže da predstavlja pojedinačnu realizaciju specificirane metode merenja. U specifikaciji metode merenja sadržani su potrebni standardi, merna oprema, i merni pribor, način na koji oni treba da budu povezani, uslovi pod kojima treba da se obavljaju praktična merenja, postupak po kojem se obavljaju merenja, itd.

Metoda merenja treba uvek da bude jasno navedena, tako da se lako može proceniti nesigurnost metode, i tako utvrditi da li se rezultati merenja mogu dobiti sa potrebnom tačnošću.

Merne metode, se grupišu na sledeći način

Direktna i indirektna metoda merenja

Prema načinu dobijanja brojne vrednosti merene veličine u mernom procesu, metode merenja se mogu podeliti na:

- direktnu metodu merenja i
- indirektnu metodu merenja

koje se definišu na sledeći način

Direktna metoda merenja predstavlja metodu merenja gde se brojna vrednost merene veličine dobija direktno (neposredno), a ne merenjem drugih veličina funkcionalno vezanih za nju.

Metoda merenja ostaje direktna čak i ako je neophodno dopunsko merenje u cilju određivanja vrednosti uticajnih veličina, zbog unošenja odgovarajućih korekcija.

Primer direktne metode merenja je merenje električne struje ampermetrom

Indirektna metoda merenja predstavlja metodu merenja gde se brojna vrednost merene veličine dobija merenjem drugih veličina funkcionalno vezanih za nju.

Kao primer indirektne metode merenja, može se navesti merenje električne otpornosti merenjem električnog napona i električne struje, ili merenje specifične otpornosti provodnika, koje se zasniva na merenjima njegove otpornosti, dužine i površine poprečnog preseka.

Podela metoda merenja

- Metoda neposrednog ocenjivanja i
- metoda poređenja

Metoda neposrednog ocenjivanja

Metoda neposrednog ocenjivanja, zove se, ako se radi o analognom instrumentu:

- **metoda skretanja**,

a ako se radi o digitalnom instrumentu:

- **metoda odbrojavanja**

Pri merenju metodom neposrednog ocenjivanja brojna vrednost merene veličine neposredno se određuje mernim instrumentom.

na primer, meri se struja ampermetrom, napon voltmetrom itd.

Brojna vrednost merene veličine neposredno se određuje:

- očitavanjem na skali na osnovu skretanja kazaljke, ili
- Na bazi pokazivanja displeja koje je proporcionalno intenzitetu merene veličine.

Metoda podešavanja stanja

- Pri ovakvim metodama oprema ili deo opreme se dovodi u rezonanciju, ili u neko drugo prepoznatljivo stanje podešavanjem parametara strujnih krugova.

Metoda poređenja

Metoda poređenja ili komparativna metoda zasnovana je na poređenju vrednosti merene veličine sa poznatom vrednošću iste veličine ili sa poznatom vrednošću neke druge veličine (ili više njih) koja je u funkcionalnoj zavisnosti sa merenom veličinom, i obuhvata sledeće metode:

- nulta metoda,
- diferencijalna metoda,
- metoda zamene i
- metoda poređenja.

- **Nulta metoda**, je metoda merenja gde se razlika merene veličine i promenljive poznate iste veličine dovodi na nulu. Pri postignutom uravnoteženju merni instrument – detektor nule pokazuje nulu, i od njegove osetljivosti zavisi tačnost merenja. Tipični primeri nulte metode su kompenzacione metode merenja električnih veličina i merenja pomoću mernih mostova.

- **Diferencijalna metoda ili metoda razlike** je metoda merenja gde se meri razlika između merene veličine i iste veličine poznate vrednosti vrlo bliske vrednosti merene veličine. Kako je ovu malu razliku najčešće moguće odrediti sa veoma malom greškom, Metoda zamene predstavlja metodu merenja gde se merena veličina zamenjuje istom veličinom poznate vrednosti, tako odabranom da indikatorski instrument daje isto pokazivanje. Ova metoda se koristi kod merenja otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti.

Metoda direktnog poređenja predstavlja metodu merenja gde se merena veličina neposredno poredi sa istom veličinom poznate vrednosti. Ovo je metoda koja se najčešće koristi kod kalibracije mernih sredstava gde se poredi pokazivanje proveravanog mernog sredstva i pokazivanje etalona.

Pri praktičnim merenjima, kao najjednostavnija, najviše se koristi **metoda neposrednog ocenjivanja,** dok **metode poređenja** daju tačnije rezultate, ali su zato složeniji, pa se stoga prvenstveno koriste pri laboratorijskom radu.

.

Definicije električnih veličina koje se najčešće mere

Definicija napona

Razlika potencijala (V_A - V_B) može da se piše u obliku:

$$V_A - V_B = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Integral na desnoj strani jednačine naziva se električni napon, ili obično samo napon između tačaka A i B. Prema tome pojam napona i pojam potencijalne razlike u elektrostatičkom polju su ekvivalentni.

Jedinica za razliku potencijala između dve tačke, odnosno napona između dve tačke, je volt (V).

Napon između dve tačke u vremenski promenljivom električnom i magnetskom polju definiše se kao linijski integral vektora jačine ukupnog električnog polja od jedne do druge tačke:

$$U_{AB} = \int_{A}^{B} \left(\vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind} \right) \cdot d\vec{l}$$

Lako je zaključiti da napon $\boldsymbol{U_{AB}}$ zavisi od putanje između tačaka A i B.

Voltmetri mere napon između dve tačke definisane gornjom relacijom. Zaključujemo da u slučaju električnih mreža sa vremenski promenljivim strujama mereni napon između dve tačke u principu može da zavisi od oblika provodnika kojima je voltmetar vezan za te tačke. Ovaj efekat obično nije veliki, ali važno je razumeti da on uvek postoji, i da ima slučajeva gde je znatan.

Definicija električne struje

Kada se veliki broj električnih opterećenja pod dejstvim električnog polja kreće na organizovan način, takvo organizovano kretanje električnih opterećenja nazvano je električna struja.

Električna struja može biti vremenski nepromenljiva, takvu električnu struju nazvaćemo **vremenski konstantna električna struja**.

Organizovano kretanje električnih opterećenja može da bude i vremenski promenljivo, takva električna struja naziva se **vremenski promenljiva električna struja**.

Jedinica za električnu struju je amper (A)

Definicija električne snage

Posmatrajući definicije i prirodu rada u fizici, vidi se da vreme za koje se rad vrši nije uzeto u obzir. Prirodno je da je nekad potrebno voditi računa o brzini vršenja rada, odnosno o vremenu za koje se rad vrši. Ako se rad izvrši u vremenskom intervalu, onda se odnos rada i vremena zove snaga i beleži se sa P. Snaga je skalarna veličina, što se slaže sa činjenicom da se dobiva deljenjem rada, kao skalarne veličine vremenom, koje je takođe skalar.

U elektrotehnici poznajemo aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu.

Prividna snaga jednaka je proizvodu efektivnih vrednosti napona i struje.

$$S = UI$$

(Moduo kompleksne snage naziva se prividna snaga prijemnika).

$$\underline{S} = P + jQ = UI\cos\phi + jUI\sin\phi = UIe^{j\phi}$$

Jedinica za prividnu električnu snagu je volt-amper (VA)

Reaktivna snaga prijemnika predstavlja amplitudu onog dela snage prijemnika koji opisuje periodičnu razmenu energije između prijemnika i generatora.

Gde je ϕ fazna razlika između napona i struje.

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin\phi = UI \sin\phi$$

Jedinica za reaktivnu električnu snagu je volt-amper reaktivni (VAr)

Aktivna snaga prijemnika predstavlja srednju snagu prijemnika.

Gde je ϕ fazna razlika između napona i struje.

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\phi = UI \cos\phi$$

Jedinica za aktivnu električnu snagu je vat (W)

Definicija otpornosti

Električna otpornost je osobina materijala kojim (do neke mere) sprečava proticanje električne struje, i električnu snagu pretvara u toplotu.

Otpornost R otpornika bilo kog oblika data je

$$R = \int_{1}^{2} \rho \cdot \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

gde vektor ***w*** ima dimenziju 1/(površina), a smer i intenzitet mu se menjaju od tačke do tačke u otpornom delu. Vidimo da otpornost ne zavisi od jačine struje kroz otpornik, mada može zavisiti od drugih faktora, na primer od temperature. Za takve otpornike kod kojih otpornost ne zavisi od jačine struje odnosno od napona između njegovih priključaka kažemo da su linearni. Ako ovaj uslov nije ispunjen kažemo da je otpornik nelinearan.

Jedinica za električnu otpornost je om (Ω)

Definicija kapacitivnosti

Kapacitivnost kondenzatora je konstanta koja se obeležava sa C.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Zavisi od oblika, dimenzija i međusobnog položaja dva tela koji obrazuju kondenzator i od osobine dielektrika između tela ukoliko tela nisu u vakuumu ili vazduhu. Najčešće kapacitivnost kondenzatora ne zavisi od opterećenja Q, odnosno od napona U između njegovih elektroda.

Jedinica za kapacitivnost je farad (F)

Definicija induktivnosti

Samoinduktivnost i međusobna induktivnost.

Međusobna induktivnost je konstanta koja zavisi od međusobnog položaja dve strujne konture, od njihovog oblika dimenzija i osobina materijala koja ispunjavaju okolni i međuprostor.

Sopstvena induktivnost je konstanta koja zavisi samo od oblika, dimenzija (strujne)konture i magnetskih osobina sredine.

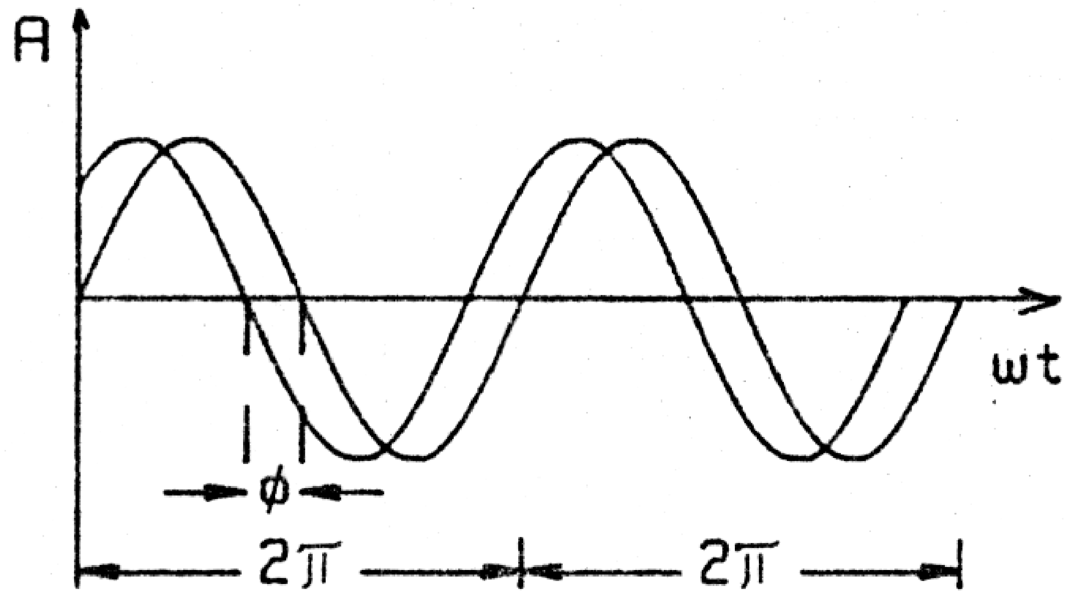
Jedinica za samoinduktivnost je ista kao i za međusobnu induktivnost tj. henri (H)

Definicija fazne razlike

Merenje faze je jedan aspekt poređenja dva signala koji imaju isti oblik i istu frekvenciju, koji uključuje saznavanje da li se ponavljanja signala dešavaju u tačno istom trenutku ili je jedan razmešten od drugoga po vremenskoj osi.

Kada su sinusne krive iste frekvencije, koje predstavljaju napon i struju, pomerene jedna u odnosu na drugu, tako da im se nule i maksimumi vremenski ne poklapaju između napona i struje postoji fazna razlika.

Pomak duž vremenske ose može biti izražen kao deo periode signala, i to najčešće u obliku radijana ili stepeni podrazumevajući kao punu periodu 2π, odnosno 360°.



Slika 2.3. Fazni stav kod sinusoidnih signala.

Definicija frekvencije

Frekvencija je brzina kojom se ponavlja oblik merenog signala u vremenu, brojna vrednost frekvencije je recipročna vrednost trajanja jedne periode u sekundama.

Jedinica za frekvenciju je herc (Hz)

Karakteristike merenih signala u vremenskom domenu

Signale možemo podeliti u dve velike grupe:

- deterministički i
- stohastički signali.

Deterministički signali su oni signali čije promene se mogu definisati u funkciji vremena.

Osnovna osobina determinističkih signala je da se njihova vrednost može zadati (odrediti) u bilo kom trenutku kako u prošlosti tako i u budućnosti.

Stohastičkim signalima nazivamo one signale čija promena u vremenu se ne može definisati na osnovu nekih zakonitosti, čije promene su slučajne.

Stohastički sigali su realizovane karakteristike nekog slučajnog događaja, i možemo ih okarakterisati njihovim statističkim osobinama.

Deterministički signali dele se na:

- statičke
- periodične i
- neperiodične signale

Statički signali

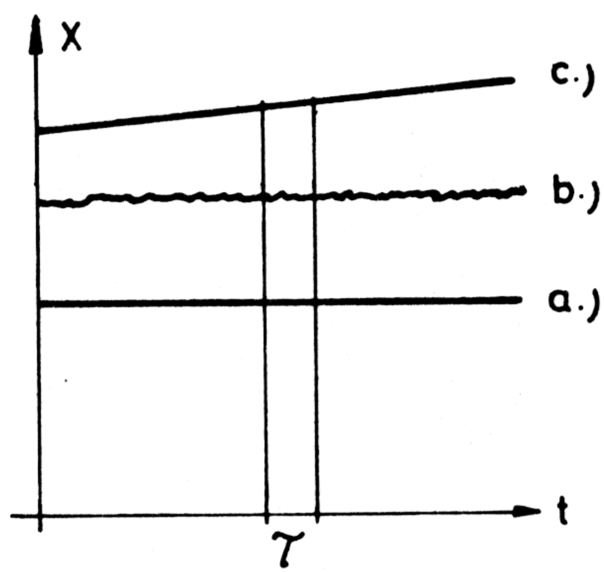
Statički signali su najjednostavnija vrsta determinističkih signala

$$x(t) = C_0$$

U energetici zovemo ih jednosmerna struja, jednosmerni napon itd. Merenje takvih signala nije komplikovan zadatak, pošto se isti ne menjaju u vremenu.

- na rezultat merenja ne utiču dinamičke karakteristike mernog sredstva
- imamo dovoljno vremena da izvršimo merenja.

U praksi statički signali nisu uvek savršeno statičke, u mernoj tehnici smatraju se jednosmernim i neki kvazi-statički signali čije oscilacije se nalaze unutar granica tačnosti merenja, ili čije promene u vremenu su tako spore da u toku vremenskog intervala koji je potreban da se izvrši merenje ostaju unutar granica tačnosti merenja.



1.4.6 ábra

Periodični signali

Signal je periodičan ukoliko $x(t) = x(t+T)$.

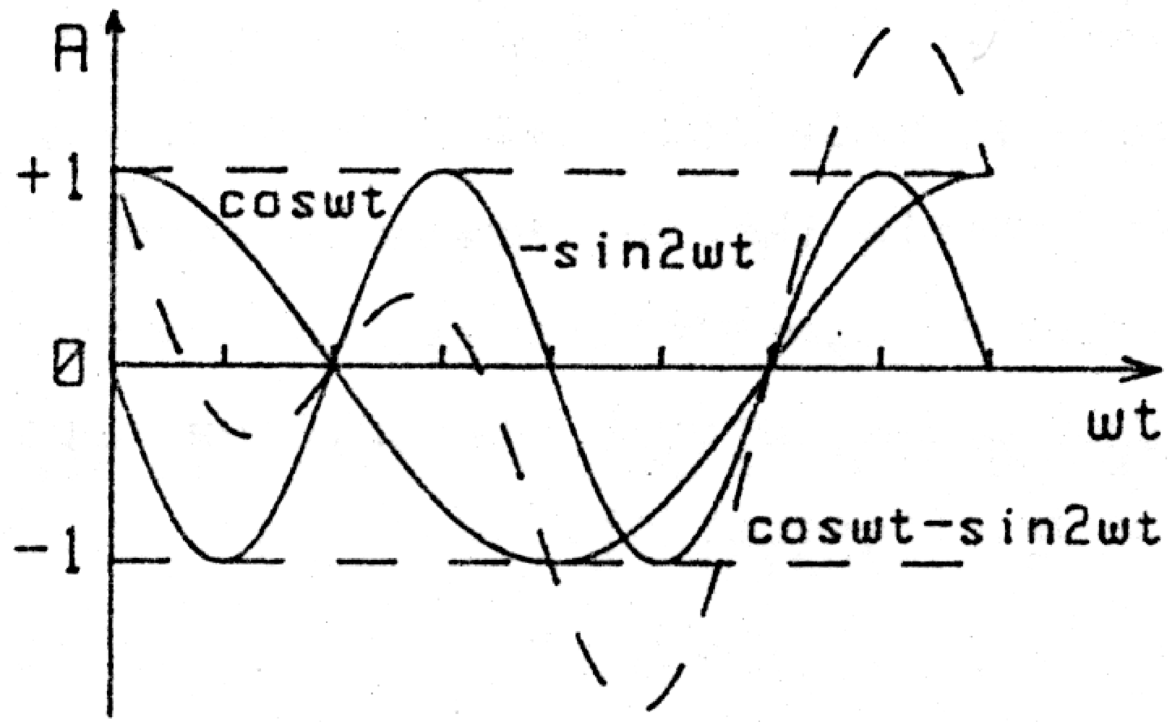
Najmanje vreme $\boldsymbol{T}$ koji zadovoljava jednačinu je vreme periode, periodičnog ponavljanja. Frekvencija osnovnog harmonika je:

$$f_1 = 1/T$$

Periodični signali energetike su u većini sinusnog oblika, pošto je i sam mrežni napon približno sinusnog oblika. Do pojave viših harmonika može da dovede:

- zasićenost magnetnih krugova električnih mašina,
- nesavršenost obrtnih mašina,
- isprekidana struja tiristorskih regulatora
- prelazne pojave prilikom prekidanja većih struja.

Viši harmonici su takve sinusne (cosinusne) komponente funkcije koji imaju ceo broj puta veću kružnu frekvenciju od osnovnog harnomika, i sabrani sa osnovnim harmonikom dovode do izobličenja signala.

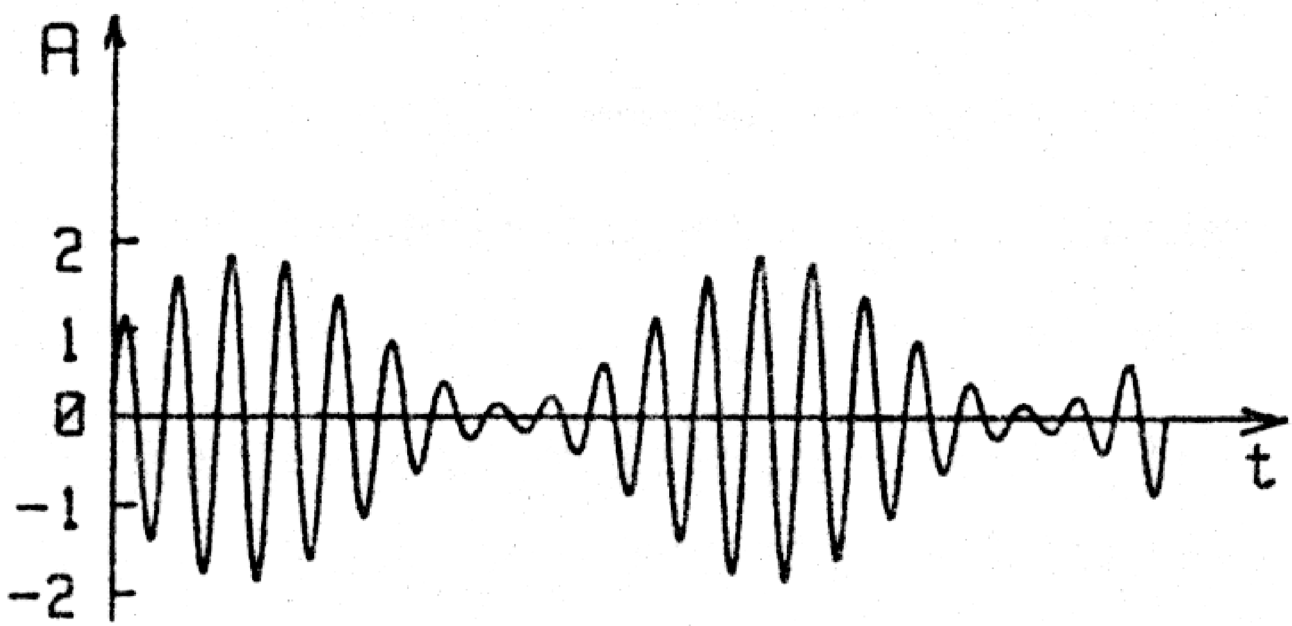


Neperiodični signali

Kvazi-periodični ili skoro periodični signali nastaju kao rezultat proizvoda dva signala različite frekvencije

"Paketi talasa" kvaziperiodičnih signala nisu identični, signal u stvari nije periodičan.

Druga grupa neperiodičnih signala su tranzijentni signali, koji se odigravaju samo jednom.


A
2
1
0
-1
-2
t

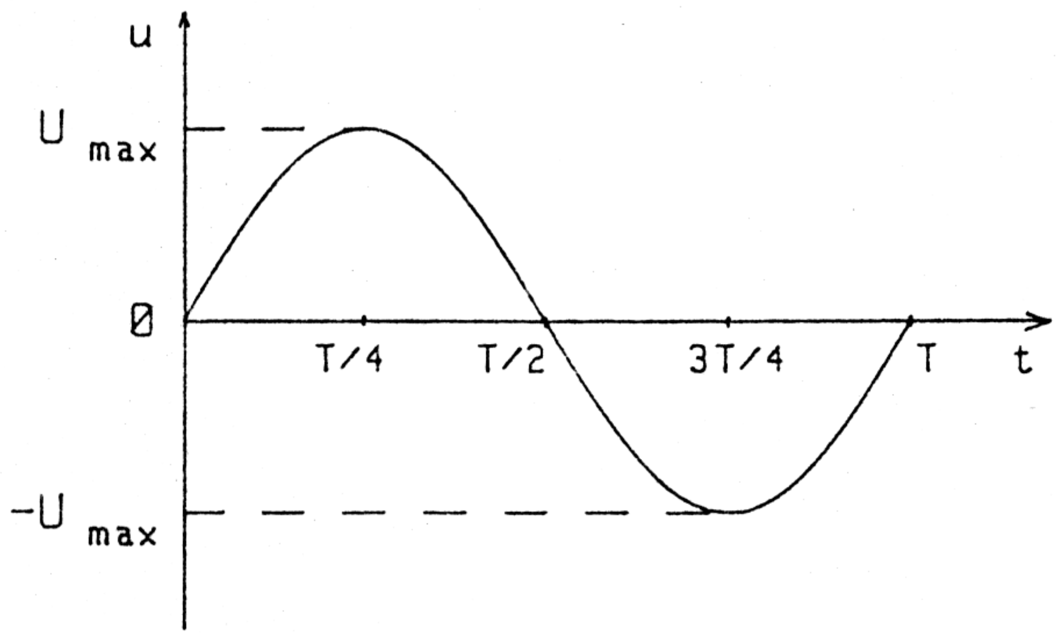
Sile koje se javljaju kao propratni elementi električnih pojava

- **Elektrostatičke sile**
- **Sila između dva strujna elementa**
- **Magnetska sila**
- **Indukovana elektromotorna sila**
- **Džulov zakon**
- **Sila na naelektisanu česticu koja se kreće u elektromagnetnom polju**
- **itd.**

Karakteristične vrednosti sinusoidnog talasnog oblika

S obzirom na veliku važnost koju ima tačno razlikovanje ulaznih signala naizmenične struje, kao i pravilno odabiranje mernog postupka odnosno mernog instrumenta, potrebno je na primeru sinusnog signala, koji je najtipičniji predstavnik signala naizmenične struje, razmotriti različite vrednosti kojima se može takav signal karakterisati. Ovo je usko vezano sa pravilnim izborom mernog instrumenta, jer merenje svake od prikazanih vrednosti zahteva poseban merni instrument.

Jedna perioda napona sinusnog signala, sa svojim karakterističnim veličinama prikazana je na slici



Slika 2.9. Prostoperiodični sinusoidni napon

Prostoperiodična promena napona data je u obliku relacije:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{U_{max}}\, \boldsymbol{sin}(\omega t + \varphi)$$

Gde je:

- $u(t)$ -trenutna vrednost napona ,
- U_{max} -maksimalna (vršna) vrednost napona, ili amplituda
- ω -kružna frekvencija *($\omega = 2\pi f = 2\pi/T$)*,
- φ -početna faza,
- t -nezavisno promenljiva, vreme .

Moguće je definisati sledeće karakteristične vrednosti za sinusoidni napon:

- **Maksimalna (vršna) vrednost napona** jednaka je U_{max}, i označava se sa U_v, pa je :

$$U_v = U_{max}$$

- **Dvostruka vršna vrednost napona** jednaka je zbiru apsolutnih vrednosti U_{max}, i - U_{max}, označava se sa U_{vv}, i jednaka je

$$U_{vv} = 2U_{max}$$

Srednja vrednost napona određuje se iz površine između krive i apscisne ose, označava se sa $\boldsymbol{U_{sr}}$ i jednaka je

$$U_{sr} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} u(t)\,dt$$

kako je kod sinusoidnog signala srednja vrednost napona u toku jedne periode jednaka nuli (jer su površine iznad i ispod apscisne ose jednake), srednja vrednost se najčešće određuje u toku polovine periode, pa je tada:

$$U_{sr} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_{\max} \sin \omega t \cdot dt = \frac{2}{\pi} U_{\max}$$

Efektivna vrednost napona sinusoidnog signala definiše se na osnovu ekvivalentnog toplotnog efekta jednosmernog električnog napona, tj. efektivna vrednost naizmeničnog napona jednaka je jednosmernom naponu koji generiše istu količinu toplote u nekom otporniku kao i posmatrani naizmenični napon.

Za jednosmerni napon, ova toplota direktno je proporcionalna snazi razvijenoj u otporniku, koja se može predstaviti kao:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

gde je:

- P -snaga potrošena u otporniku
- R -otpornost
- U -jednosmerni napon na otporniku.

Analogno tome, a u skladu sa definicijom efektivne vrednosti napona, za naizmenični napon, toplota koja se razvija u otporniku proporcionalna je srednjoj snazi u otporniku, koja se može predstaviti kao:

$$P_{sr} = \frac{U_{ef}^2}{R}$$

gde je:

- Psr -srednja snaga potrošena u otporniku
- Uef -efektivna vrednost primenjenog naizmeničnog napona.

Sa druge strane, po definiciji srednja snaga koja se javlja zbog prisustva nekog naizmeničnog napona jednaka srednjoj vrednosti trenutne snage potrošnje u otporniku, dobijenoj posmatranjem u toku celog broja perioda naponskog talasnog oblika, što se može prikazati kao:

$$P_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\,dt$$

gde je:

- ***T*** - perioda talsnog oblika
- $\boldsymbol{u^2(t)/R}$ - trenutna snaga

Izjednačavanjem relacija, dobija se efektivna vrednost naizmeničnog napona, izračunata kao kvadratni koren srednje vrednosti kvadrata trenutnih vrednosti napona, unutar periode talasnog oblika napona.

Označena je sa $\boldsymbol{U_{ef}}$, i jednaka je:

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$$

Zamenom i rešavanjem dobija se

$$U_{ef} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Neophodno je ponovo ukazati, što se vidi iz definicije, da efektivna vrednost napona nema smisla osim u slučaju periodičnog naponskog talasnog oblika.

Prema navedenim relacijama, moguće je lako odrediti odnose između vršne, srednje i efektivne vrednosti napona sinusoidnog signala, i to su:

$$U_{\max} = \frac{\pi}{2} U_{sr} = \sqrt{2} U_{ef} \cong 1.57 U_{sr} = 1.41 U_{ef}$$

$$U_{sr} = \frac{2}{\pi} U_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U_{ef} \cong 0.64 U_{\max} = 0.90 U_{ef}$$

$$U_{ef} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} U_{sr} \cong 0.71 U_{\max} = 1.11 U_{sr}$$

Isto razmatranje važi i za struju sinusnog oblika:

$$i(t) = I_m \sin \omega t.$$