Merenja

3. predavanje

Upotrebne karakteristike mernih instrumenata

Normalni uslovi određuju granice merene veličine unutar kojih se može primeniti merni uređaj.

Granični uslovi su granične vrednosti normalnih uslova, tj. vrednosti merene veličine za koje je još uvek moguće merenje bez degradacije instrumenta.

Referentni uslovi su tačno zadati uslovi u kojima se mora obaviti merenje – baždarenje.

Metrološke karakteristike mernih sredstava

Metrološke karakteristike mernih sredstava su u principu: kvalitativni i kavantitativni pokazatelji sposobnosti i ograničenja mernog sredstva kada je ono uključeno u merni proces

Metrološke karakteristike mogu podeliti na:

- STATČKE KARAKTERISTIKE i

  u slučaju konstantnih ili sporopromenljivih veličina
- DINAMIČKE KARAKTERISTIKE.

  u slučaju brzopromenljivih veličina

Merni opseg i raspon
Merni opseg (Range)

Merni opseg je skup vrednosti merene veličine za koje je greška merenja unutar dozvoljenih granica.

Dinamički opseg merenja se određuje kao odnos najmanje i najveće vrednosti koji mogu da se mere. Ovaj opseg se iskazuje u dB tj. $\mathbf{20\log (I_{max}/I_{min})}$.

Merni raspon je razlika gornje i donje granične vrednosti opsega.

Statičke karakteristike mernih sredstava

- Različite statičke karakteristike jednog mernog sredstva mogu se odrediti u okviru mernog procesa koji se naziva statička kalibracija, koji je potrebno periodično ponavljati Ova kalibracija podrazumeva priključenje poznatog, konstantnog ulaznog signala i posmatranje rezultujućeg odziva.

- Statičke karakteristike mernog sredstva su:

  tačnost, preciznost, razlaganje, linearnost, osetljivost, pokretljivost, stabilnost, histerezis, ulazna i izlazna impedansa.

Tačnost (accuracy)

Tačnost mernog sredstva je sposobnost mernog sredstva da pokazuje vrednosti koje su bliske pravoj vrednosti.

Pri tome obično ne znamo pravu vrednost, pa koristimo konvencionalnu ili dogovorenu vrednost. S obzirom na korišćenje dogovorene vrednosti neophodno je pri definisanju tačnosti govoriti o grešci.

U zadnje vreme se često umesto tačnosti definiše merna nesigurnost (*measurement uncertainity*)

Merna nesigurnost

Parametar pridružen rezultatu merenja koji karakteriše disperziju vrednosti koje bi razumno mogle da se pripišu merenoj veličini.

Dok tačnost definiše odstupanje od idealne statičke karakteristike, merna nesigurnost obuhvata i sistematske i slučajne greške.

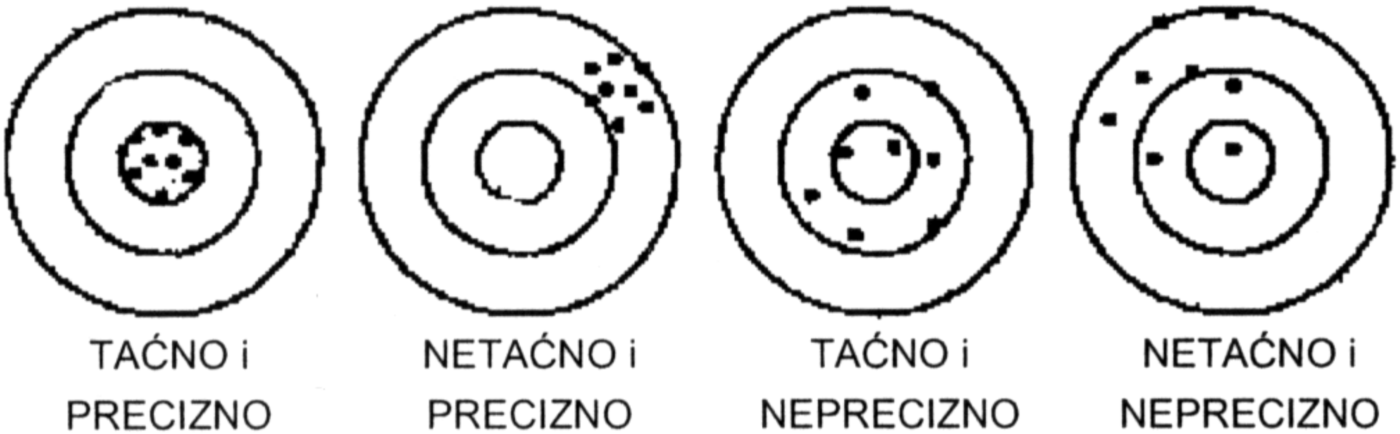
Preciznost

Preciznost mernog sredstva je sposobnost mernog sredstva da pokazuje vrednosti koje su međusobno bliske.

Način koji na najbolji način pokazuje preciznost je standardna devijacija. Standardna devijacija je statistička mera ponovljivosti merenja i definiše se kao:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

važno je razlikovati preciznost od tačnosti kao što je prikazano na slici.



Razlaganje

Razlaganje mernog sredstva je kvantitativni pokazatelj sposobnosti mernog sredstva da jasno razlučuje veoma bliske vrednosti merene veličine

Razlaganje mernog sredstva je sposobnost razlikovanja bliskih vrednosti.

Ako se radi o uređaju sa analognom indikacijom onda je najmanji podeok moć razlaganja, a ako se radi o digitalnom očitavanju, tada je jedinica poslednje cifre karakteristika razlaganja.

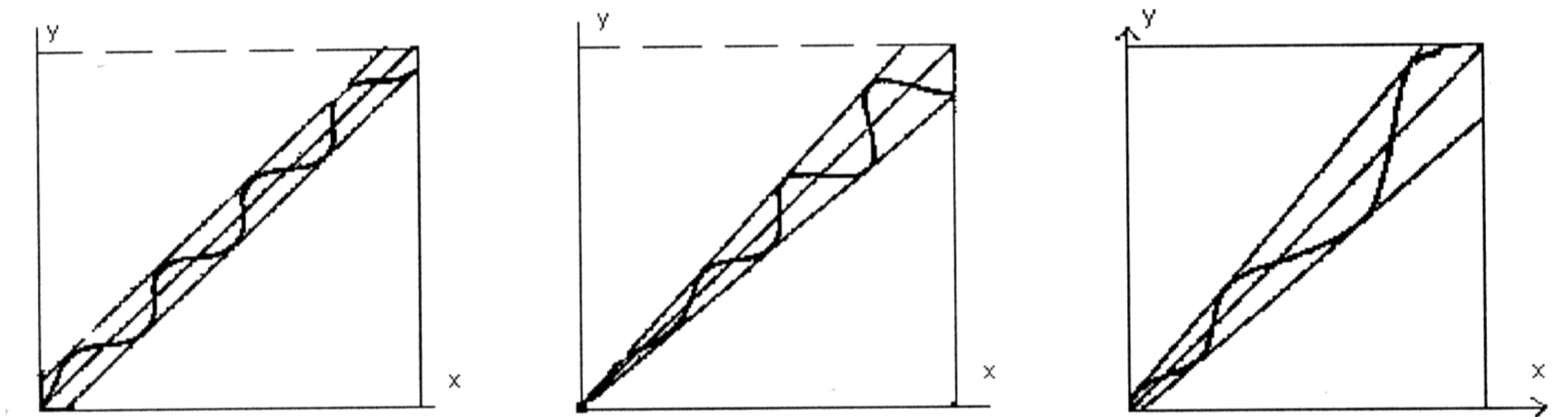
Potrebno je uvek definisati razlaganje u odnosu na opseg merenja, npr. **1 mV** u odnosu na **U = 135 V**. Često se taj odnos definiše kao odnos najmanje mere i opsega instrumenta, odnosno skretanje pune skale u procentima. Kada se radi o digitalnom instrumentu tada je od interesa jedinica poslednje cifre u odnosu na broj cifara.

Linearnost

Linearnost je sposobnost mernog sredstva da generiše odziv kao linearnu funkciju ulaznog signala.

U zavisnosti od odnosa izlaznog signala od ulaznog, imamo sledeće vrste linearnosti:

- linearnost nezavisna od ulaznog signala
- linearnost proporcionalna ulaznom signalu i
- linearnost delimično proporcionalna ulaznom signalu.



Greška linearnosti je maksimalno odstupanje odziva mernog sredstva od optimalne prave, dobijene povlačenjem kroz merne tačke kalibracije.

Greška linearnosti se određuje maksimalnim odstupanjem od optimalne prave. Greška linearnosti se definiše kao:

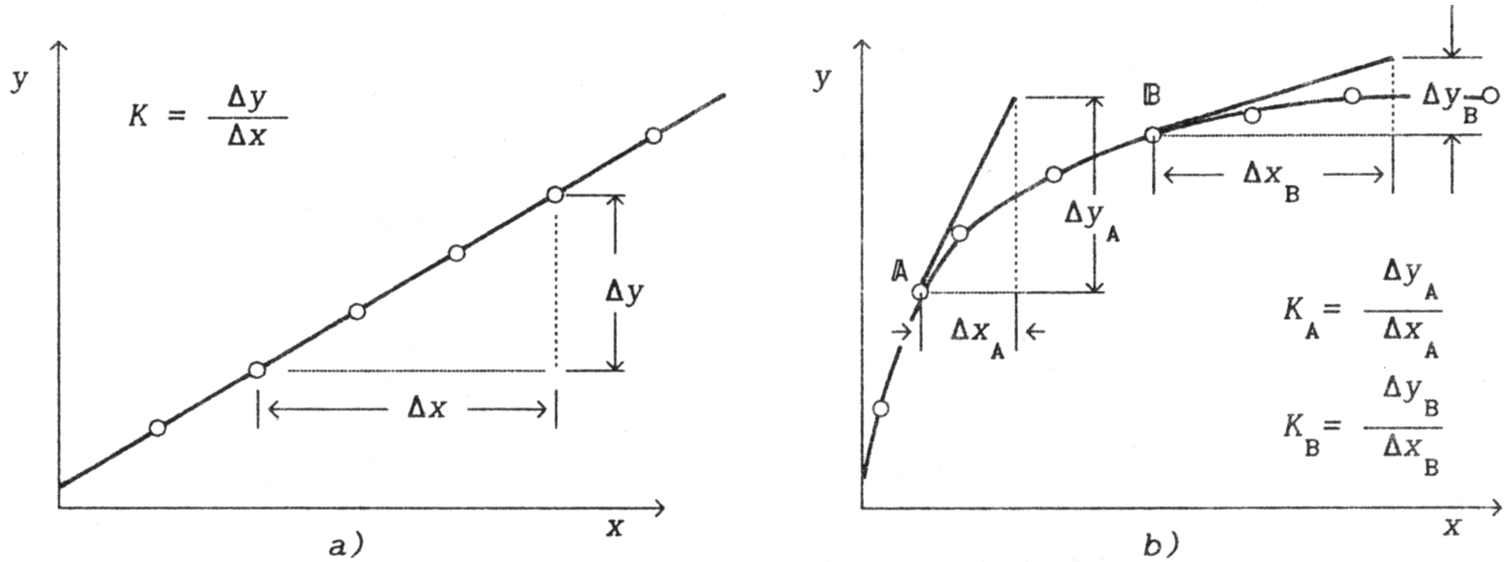
$$G_i = \frac{\max\left|y_i - (ax_i + b)\right|}{y_{\max}} * 100$$

U poslednjoj jednačini je $\boldsymbol{y}_{\mathrm{i}}$ izmerena i-ta vrednost za $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ ulaz, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{max}}$ najveća vrednost izlaza koja može da se izmeri uređajem, a $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nagib i odsečak optimalne prave.

Osetljivost mernog sistema

Osetljivost mernog sredstva je količnik priraštaja odziva mernog sredstva i odgovarajućeg priraštaja ulaznog signala

Ovako definisana osetljivost naziva se i statička osetljivost, i takođe se određuje iz podataka dobivenih statičkom kalibracijom. Vidi se da se osetljivost predstavlja nagibom kalibracione krive, ako je ordinata data u stvarnim mernim jedinicama. Kada je kalibraciona kriva linearna, osetljivost $\boldsymbol{K}$ je konstantna, međutim ako je odnos između izlaznog i ulaznog signala nelinearna funkcija osetljivost se menja sa vrednošću ulazne veličine.



Slika 3.6. Osetljivost a) linearnog i b) nelinearnog mernog sredstva

Osetljivost mernog sistema je odnos promene izlaza s obzirom na promenu ulaza

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokretljivost mernog sistema

Pokretljivost mernog sredstva je sposobnost mernog sredstva da odgovori na male promene vrednosti ulaznog signala.

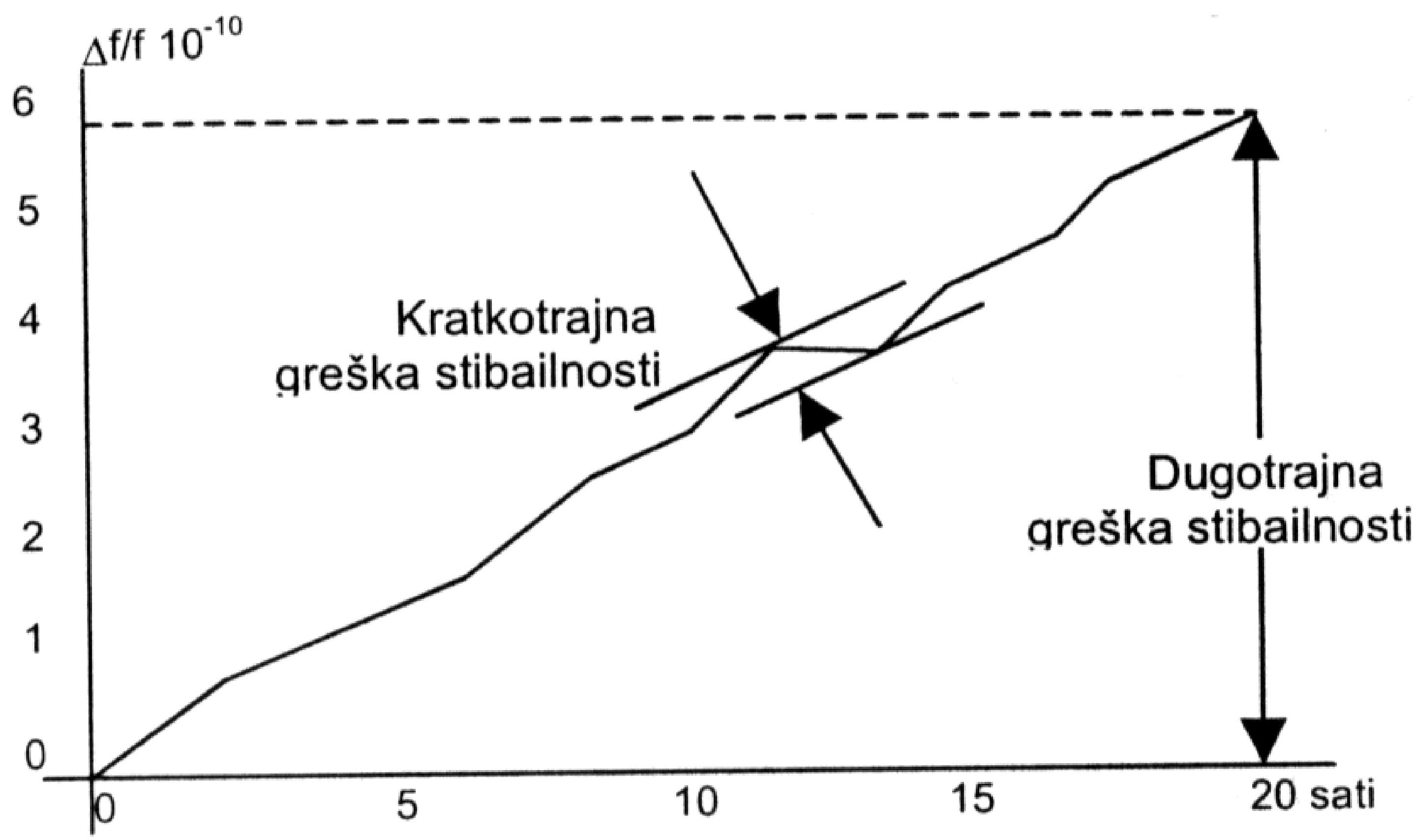
Pokretljivost mernog sistema je određena pragom, odnosno veličinom promene ulaznog signala koja će dovesti do inicijalnog pomeraja.

Kvantitativno se može prag pokretljivosti definisati i kao proizvod najnižeg mernog opsega i razlaganja. Tako na primer, kod digitalnog voltmetra sa 4 cifara (digita), najnižeg mernog opsega 100 mV i razlaganja 1/10000, prag pokretljivosti je jednak 100 mV/10000 = 0,01 mV.

Stabilnost

Stabilnost mernog sredstva je sposobnost mernog sredstva da održava konstantnim svoje metrološke karakteristike.

Stabilnost uređaja se definiše u odnosu na razne promene, ali se pre svega odnosi na promene u vremenu. Govorimo o dugotrajnim i kratkotrajnim greškama stabilnosti. npr. $2 \cdot 10^{-8}$ godišnje, a i kratkotrajnim greškama, npr, $1 \cdot 10^{-10}$ na deset sekund



Δf/f 10^-10
6
5
4
3
2
1
0
Kratkotrajna
greška stibailnosti
Dugotrajna
greška stibailnosti
0
5
10
15
20 sati

Ponovljivost

Ponovljivost mernog sredstva je sposobnost mernog sredstva da daje, u definisanim uslovima upotrebe, veoma bliske odzive pri ponavljanju istog ulaznog signala.

Pri analizi ponovljivosti posmatramo grešku koja se dobija kada na ulaz dovodimo vrlo precizno istu vrednost.

Greška ponovljivosti se definiše kao razlika maksimalne i minimalne vrednosti odziva, za najmanje 5 uzastopnih primena istog ulaznog signala, koji odgovara punom mernom opsegu.

$$G_p(\%) = \frac{x_M - x_m}{x_{\max}} \cdot 100$$

gde je:

$\boldsymbol{x_M}$ *-maksimalna vrednost odziva mernog sredstva*

$\boldsymbol{x_m}$ *-minimalna vrednost odziva mernog sredstva, a*

x_{max}*-vrednost punog mernog opsega tj. kraja skale.*

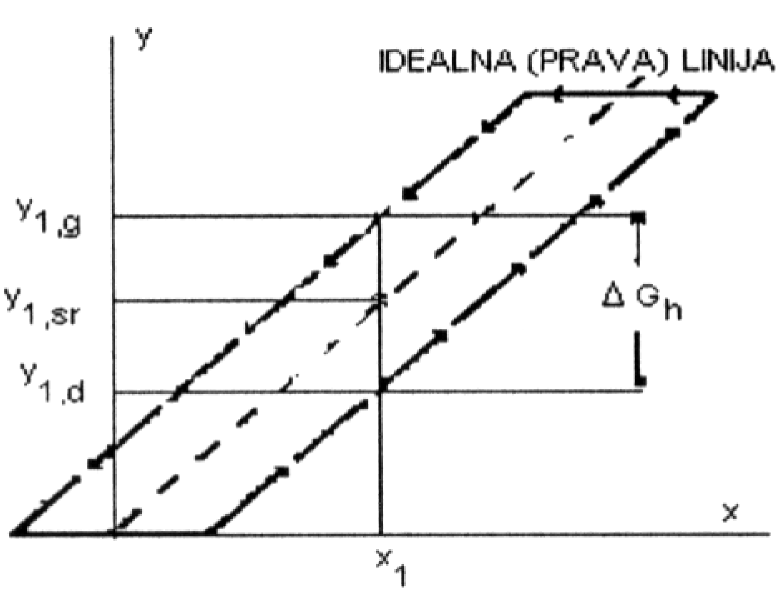
Histerezis

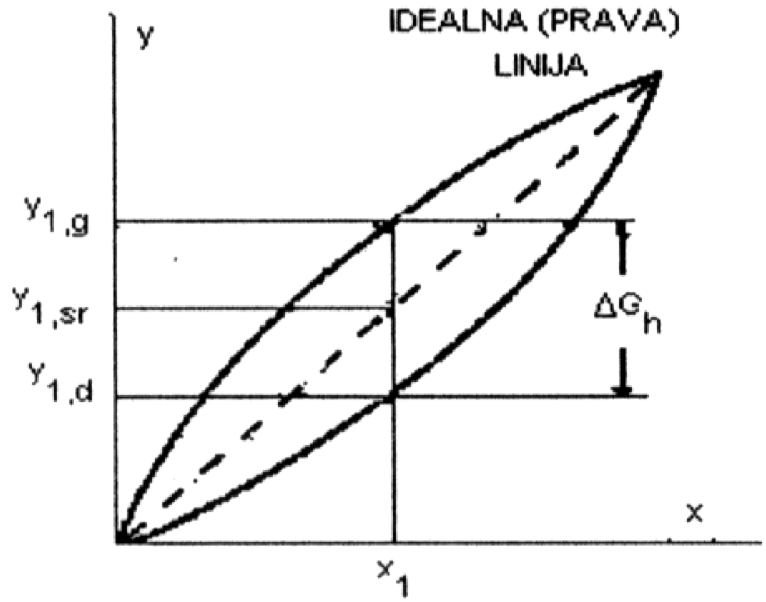
Histerezis mernog sredstva je osobina mernog sredstva da njegov odziv na dati ulazni signal zavisi od redosleda prethodnih ulaznih signala.

Histerezis je pojava koja dovodi do nepovoljnog pokazivanja instrumenta u zavisnosti od načina promene ulazne veličine pri merenju. Mera histerezisa je maksimalna razlika izlaznih vrednosti koje se dobijaju za istu ulaznu vrednost.

$$G_H = \frac{y_g - y_d}{y_{\max}} \cdot 100$$

gde su $\boldsymbol{y_g}$ i $\boldsymbol{y_d}$ izmerene vrednosti za isti ulazni signal.


y
IDEALNA (PRAVA) LINIJA
y1,g
y1,sr
y1,d
ΔGh
x
x1


y
IDEALNA (PRAVA)
LINIJA
y1,g
y1,sr
y1,d
ΔGh
x
x1

Ulazna impedansa mernog sredstva

Ulazna impedansa mernog sredstva je kompleksno opterećenje, jednako odnosu napona primenjenog na ulazne priključke i struje koja utiče u ulazne priključke, koje dato merno sredstvo predstavlja za mrežu koja se meri ili ispituje.

Od interesa je ulazna impedansa uređaja za merenje, i izlazna impedansa materijalizovane mere.

Dinamičke karakteristike

Kada je merni element deo sistema za upravljanje najčešće ga nije dovoljno opisati njegovom statičkom karakteristikom, već je potrebno uzeti u obzir i njegove dinamičke karakteristike.

Model instrumenta, tj. matematički izraz koji povezuje ulaz i izlaz se može aproksimirati linearnom kombinacijom izvoda ulaznog signala

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = b_0 x$$

broj $\boldsymbol{n}$ određuje red prenosne funkcije

Sistem nultog reda ne unosi nikakvu dinamičku grešku merenja bez obzira na brzinu promene ulaznog signala. Drugim rečima, ne postoji nikakvo kašnjenje izlaznog signala niti izobličenje u poređenju sa ulaznim signalom.

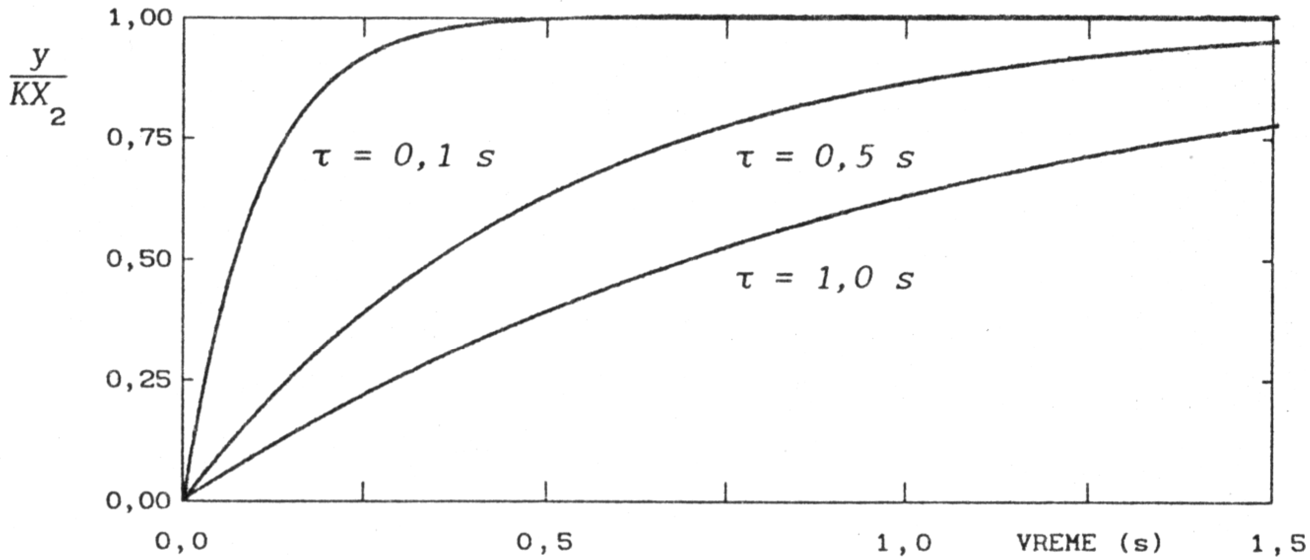
Za $\boldsymbol{n} = 0$ dobijamo nulti red tj.

$$y = \frac{b_0}{a_0} x$$

i koeficijent $\boldsymbol{b_0/a_0}$ se naziva statička osetljivost.

Ako je red $\boldsymbol{n} = 1$, dobijamo funkciju prenosa prvog reda:

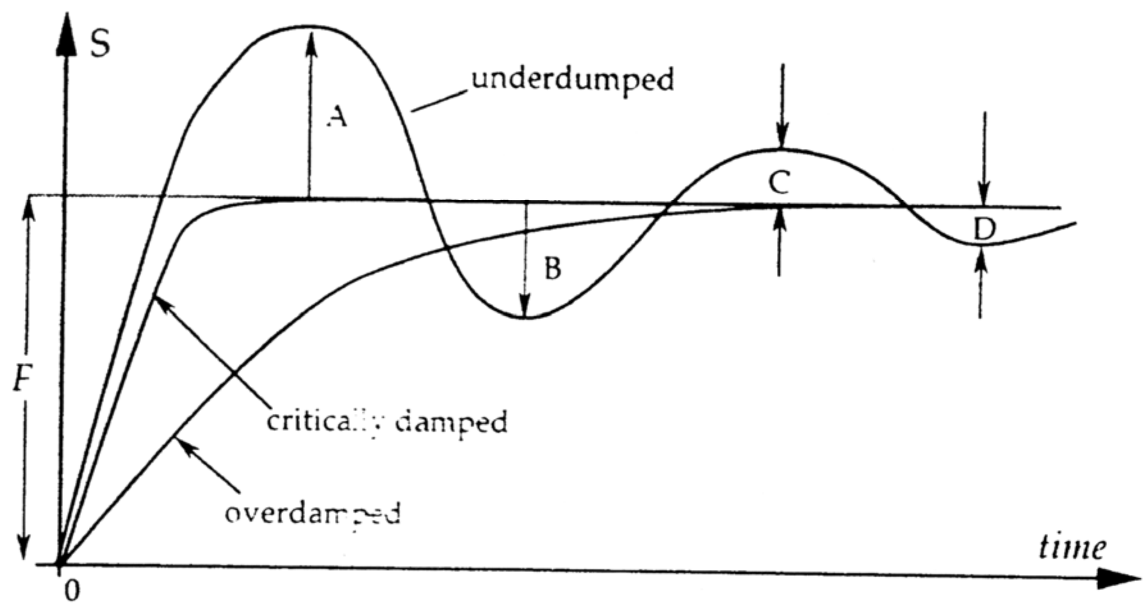
$$\frac{a_1}{a_0}\frac{dy}{dx} + y = \frac{b_0}{a_0}x$$



Slika 3.13. Odziv mernog sredstva prvog reda na odskočnu funkciju za različite vremenske konstante

Za vrednost $\boldsymbol{n} = 2$, posmatramo sistem drugog reda (vrlo čest slučaj u merenjima), i imamo:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x$$



A Statistička obrada rezultata merenja

Zadatak obrade rezultata višestruko ponovljenih merenja konstantne fizičke veličine jeste:

- procena prave vrednosti merene veličine i
- procena merne nesigurnosti korigovanog rezultata merenja

Korigovanje aritmetičke sredine za poznate sistematske greške, kao i određivanje sistematske komponente merne nesigurnosti obavlja se na osnovu mernog iskustva, posedovanja potrebnih tehničkih podataka i kalibracije mernih sredstava.

Ponavljajući merenja jedne iste konstantne veličine pod istim uslovima više puta, koristeći se pri tome mernim sredstvima sa dovoljno velikim razlaganjem, dobijaju se različiti rezultati merenja. Ukoliko se može poći od pretpostavke da su sve sistematske greške eliminisane u potpunosti, ovom statističkom analizom se dobija najverovatnija prava vrednost merene veličine i ukupna merna nesigurnost. U tom cilju potrebno je definisati sledeće pojmove:

- aritmetička sredina rezultata merenja,
- standardna devijacija,
- standardna devijacija aritmetičke sredine,

Aritmetička sredina rezultata merenja

Pod pretpostavkom, da su na neki način eliminisane sve sistematske greške, razlike u pojedinačnim rezultatima merenja posledica su slučajnih grešaka merenja. Ako se pojedinačni rezultati merenja obeleže sa:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

može se sa sigurnošću smatrati jedino to, da se prava vrednost merene veličine x_0, nalazi negde između najmanje i najveće vrednosti niza pojedinačnih rezultata merenja.

Ukoliko se sa Δx_i, obeleži stvarna apsolutna greška pojedinačnog merenja koja je jednaka:

$$\Delta x_i = x_i - x_0$$

onda se u posmatranom slučaju višestruko ponovljenih merenja javlja niz stvarnih apsolutnih grešaka slučajnog porekla, i to:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0$$

$$\ldots$$

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

Sabiranjem levih i desnih strana jednakosti dobijamo:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n - n \cdot x_0$$

odakle je prava vrednost merene veličine jednaka

$$x_0 = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) - \frac{1}{n}\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\right)$$

Prvi član sa desne strane znaka jednakosti je aritmetička sredina rezultata merenja iznosi

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)$$

ili

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sada se može napisati da je prava vrednost merene veličine jednaka:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

Odnosno

$$x_0 = \bar{x} - \varepsilon$$

gde je ε aritmetička sredina stvarnih apsolutnih grešaka pojedinačnih merenja.

relacija se može pisati u obliku:

$$x_0 = \bar{x} \pm |\varepsilon|$$

Prema Gausovoj teoriji slučajnih grešaka, pri proučavanju uticaja slučajnih grešaka na rezultat merenja, treba poći od dve pretpostavke, koje možemo smatrati i aksiomima:

1. Pri velikom broju ponovljenih merenja, jednako verovatno nastaju slučajne greške jednakih vrednosti ali suprotnog predznaka.
2. Verovatnoća pojavljivanja malih grešaka veća je od verovatnoće pojavljivanja velikih grešaka.

Na osnovu prve pretpostavke može se zaključiti da će pri dovoljno velikom broju ponovljenih merenja granična vrednost ε težiti nuli, tj.

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon \to 0$$

pa sledi da je:

$$x_0 \approx \overline{x}$$

Na osnovu prethodnih možemo zaključiti da pri višestruko ponovljenim merenjima konstantne fizičke veličine, upravo aritmetička sredina rezultata merenja najbolja aproksimacija prave vrednosti merene veličine

Aritmetička sredina populacije i uzorka

Definicija aritmetičke sredine odnosi na određeni broj vrednosti posmatrane, odnosno merene veličine, koji u principu može biti dvojak.

U prvom slučaju, ovaj broj može biti veoma veliki, teoretski, to je beskonačan broj rezultata ponovljenih merenja fizičke veličine, i tada se radi o:

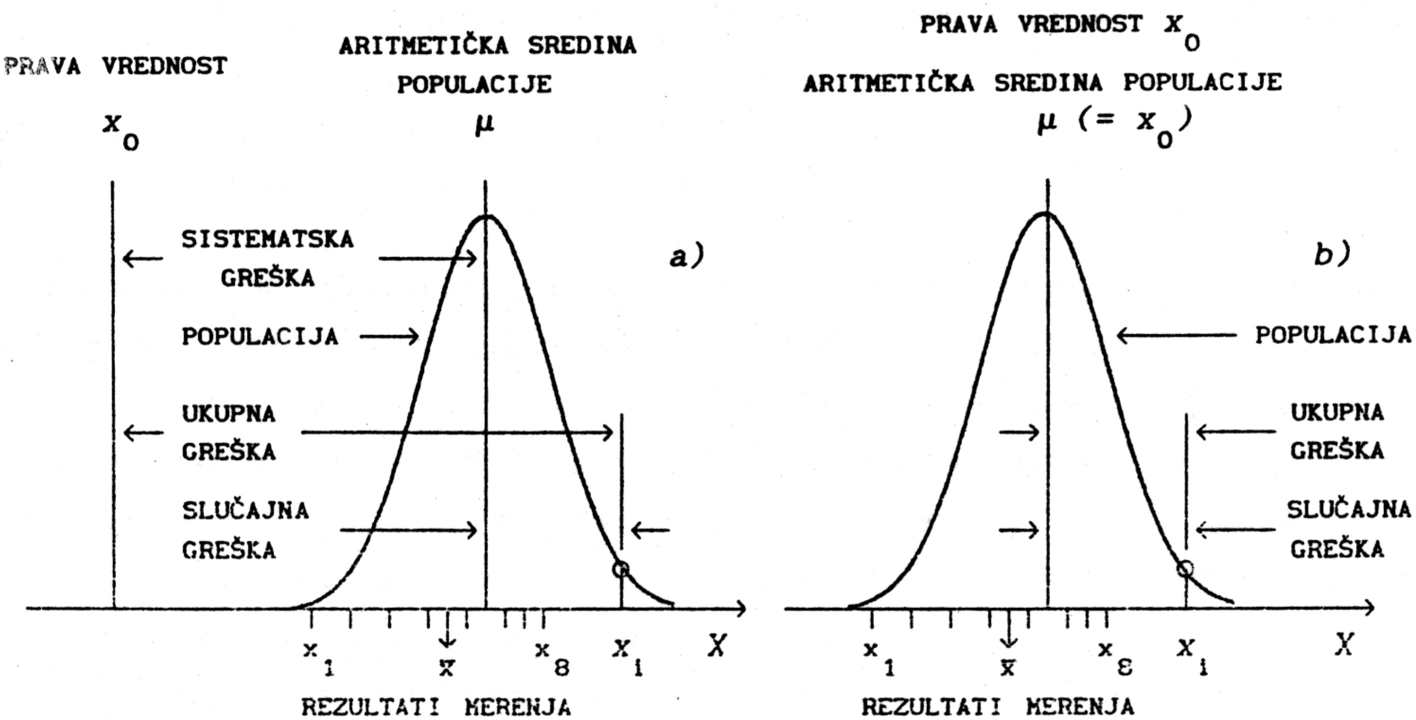
populaciji, koja označava potpun skup vrednosti posmatrane veličine. *Ako se definicija aritmetičke sredine primeni na populaciju tada se govori o aritmetičkoj sredini populacije.*

U drugom slučaju, ograničeni broj rezultata merenja formira samo

uzorak iz populacije, što znači da se u statističkoj analizi koristi deo populacije, izabran na takav način, da je on u potpunosti predstavnik te populacije sa svim njenim karakteristikama. Ovaj reprezentativni uzorak obezbeđuje se postupkom nazvanim slučajno uzorkovanje. Pri tome broj rezultata merenja posmatrane veličine ***n*** je ograničen broj, koji odgovara realnim mogućnostima merne prakse i iznosi najviše nekoliko desetina.

Ako se definicija aritmetičke sredine primeni na uzorak, tada se govori o aritmetičkoj sredini uzorka.

Zadatak statistike je da matematičkim razmatranjima uzorka proceni karakteristike populacije, iz koje je uzet uzorak, tj. da prema poznatom uzorku proceni vrednost nepoznatog parametra populacije



Slika 6.1. Greška merenja a) u prisustvu sistematskih grešaka, b) pri eliminisanim sistematskim greškama

Prikaz greške merenja, uz pretpostavljenu normalnu raspodelu slučajnih grešaka, dat je na slici.

- prikazana greška merenja u prisustvu sistematskih grešaka,
- prikazana greška merenja kada su sistematske greške eliminisane.

U prvom slučaju prava vrednost merene veličine nije jednaka aritmetičkoj sredini populacije, i odstupa od nje za (ukupnu) sistematsku grešku, dok je greška merenja jednaka zbiru (ukupne) sistematske greške i slučajne greške.

Standardna devijacija

Za procenu preciznosti nekog merenja koristi se standardna devijacija, koja se još naziva i standardno odstupanje ili srednja kvadratna greška. Prema definiciji:

Standardna devijacija je ona greška, koja bi, kada bi se javila u svih ***n*** pojedinačnih merenja, dala istu sumu kvadrata grešaka, kao i suma kvadrata stvarnih apsolutnih grešaka.

Ovako definisana standardna devijacija za veliki broj ponovljenih merenja, za koji možemo reći da teži beskonačnoj vrednosti, obeležava se simbolom σ**,** i na osnovu prethodne definicije, važi sledeća relacija:

$$n\sigma^2 = (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \ldots + (x_n - x_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2$$

Odakle je:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2$$

što daje statističku veličinu koja se naziva varijansa ili disperzija, koja se obeležava sa σ^2, i koja je jednaka kvadratu standardne devijacije.

Standardnu devijaciju možemo predstaviti u obliku:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$$

koja ima značajnu prednost u odnosu na varijansu, s obzirom da je data u istim jedinicama kao i izmerena vrednost, dok s druge strane varijansa ima svoju prednost kod računanja, zbog svoje aditivnosti.

Da bi smo definisali standardnu devijaciju sa podacima koje je realno moguće prikupiti u mernom procesu, potrebno je uspostaviti vezu između stvarnih grešaka $\Delta x_i = x_i - x_0$, i prividnih grešaka merenja koje definišemo kao:

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

Izraz za standardnu devijaciju ***s***, za seriju od ***n*** merenja iste veličine.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

odnosno

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

U mernoj praksi, za standardnu devijaciju veoma je pogodno koristiti relaciju koja se lako izvodi iz gornje jednačine kvadriranjem izraza u zagradi:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]}$$

Standardna devijacija populacije i uzorka

Veoma često se u literaturi sreće naziv "standardna devijacija pojedinačnog merenja" koji se odnosi kako na formulu za σ, tako i za formulu za s. Time se želi istaći da je ova statistčka veličina vezana za jedno merenje, odnosno da je karakteristika svakog od obavljenih pojedinačnih merenja. Međutim ovaj naziv dovodi do dvosmislenosti i zabune, jer je pojam "standardna devijacija" upravo karakteristika raspodele grupe rezultata merenja, a ne jednog individualnog merenja. Standardna devijacija ne može biti određena za jedan rezultat merenja koji nije deo grupe rezultata merenja. Potvrda ovog stanovišta je, i da se često kaže da standardna devijacija opisuje merenje koje će se tek obaviti (ili bilo koje već ranije obavljeno).

Standardna devijacija populacije definisana je relacijom:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu\right)^2}$$

u kojoj je broj merenja ***N*** veoma veliki, i statistički teži beskonačnosti, a umesto prave vrednosti merene veličine $\boldsymbol{x_0}$, imamo aritmetičku sredinu populacije μ.

A standardna devijacija uzorka definisana je relacijom:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

u kojoj je aritmetička sredina rezultata merenja u stvari aritmetička sredina uzorka, što je statistički gledano istovetno.

Standardna devijacija aritmetičke sredine

Posmatrajući aritmetičku sredinu rezultata merenja poznato je da se ona razlikuje od tačne vrednosti x_0 za neku grešku merenja ε. Poznavajući prirodu slučajnih grešaka vidi se da će ova greška biti utoliko manja, ukoliko je veći broj merenja n. Iako se odmah može reći da je nesigurnost aritmetičke sredine rezultata merenja manja od nesigurnosti bilo kog pojedinačnog merenja, postoji mogućnost da se njena procena egzaktno izvede.

Ako pretpostavimo da su pojedinačne stvarne apsolutne greške vrlo male, možemo napisati:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}$$

odakle se vidi da greška aritmetičke sredine rezultata merenja opada sa korenom iz broja ponovljenih merenja ***n***. Ova greška naziva se standardna devijacija aritmetičke sredine

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_0\right)^2}$$

$$x_0 = \bar{x} \pm \left|\frac{s}{\sqrt{n}}\right| = \bar{x} \pm \left|s_{\bar{x}}\right|$$