

# **Potsetnik iz merenja elektro sa rešenim zadacima**

**Radna verzija 2014.**

# 1. Merne jedinice

## Definicije pojmova koje se odnose na merenu veličinu

- **Fizička veličina** je osobina pojave, tela ili supstance koja može da se razlikuje kvalitativno i odredi kvantitativno.
- **Merna jedinica** je određena veličina, usvojena dogovorom, koja se koristi za kvantitativno izražavanje veličina iste dimenzije.
- **Oznaka merne jedinice** je dogovoreni simbol kojim se označava merna jedinica.
- **Vrednost veličine** je veličina izražena brojnomošću i odgovarajućom jedinicom.

- **Ugao u ravni**

Jedinica ugla u ravni je radijan. Radian je ugao u ravni između dva poluprečnika kruga koja na njegovom obimu isecaju luk dužine jednak poluprečniku.

- **Prostorni ugao**

Jedinica prostornog ugla je steradian. Steradian je prostorni ugao sa temenom u središtu lopte, koji na površini lopte zahvata površinu jednaku površini kvadrata određenog poluprečnikom te lopte.

## Predmeci SI

Faktor	Naziv predmetka	Oznaka	Faktor	Naziv predmetka	Oznaka
$10^1$	deka	da	$10^{-1}$	deci	d
$10^2$	hekto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	mega	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	tera	T	$10^{-12}$	piko	p
$10^{15}$	peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	eksa	E	$10^{-18}$	ato	a
$10^{21}$	zeta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	jota	Y	$10^{-24}$	jokto	y

## Primeri:

### 1.1

*Struja kroz otpornik je  $10\ 000 \times 10^{-8}$  kA, pad napona na otporniku je  $0,0001 \times 10^{-4}$  MV, kolika je otpornost u  $\mu\Omega$ ?*

*Az ellenálláson folyó áram  $10\ 000 \times 10^{-8}$  kA, a feszültségés  $0,0001 \times 10^{-4}$  MV, hány  $\mu\Omega$  az ellenállás értéke?*

- Odgovor:

$$I = 10\ 000 \cdot 10^{-8} \text{ kA} = 10^4 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3 \text{ A} = 10^{-1} \text{ A} = 0,1 \text{ A}$$

$$U = 0,0001 \cdot 10^{-4} \text{ MV} = 10^{-4} \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 \text{ V} = 10^{-2} \text{ V} = 0,01 \text{ V}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1} \Omega$$

$$10^{-1} \Omega = 10^{-1} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-6}} \Omega = \frac{10^{-1} \cdot (10^{-6} \cdot \Omega)}{10^{-6}} = \frac{10^{-1} \mu\Omega}{10^{-6}} = 10^5 \mu\Omega$$

$$R = 10^5 \mu\Omega = 100000 \mu\Omega$$

## 1.2

**Struja kroz otpornik je  $50\ 000 \times 10^{-7} \text{ kA}$ , pad napona na otporniku je  $0,001 \times 10^{-4} \text{ MV}$ , kolika je otpornost u  $\mu\Omega$ ?**

**Az ellenálláson folyó áram  $50\ 000 \times 10^{-7} \text{ kA}$ , a feszültségésés  $0,001 \times 10^{-4} \text{ MV}$ , hány  $\mu\Omega$  az ellenállás értéke?**

- Odgovor:

$$I = 50000 \cdot 10^{-7} \text{ kA} = 5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \text{ A} = 5 \cdot 10^0 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

$$U = 0,001 \cdot 10^{-4} \text{ MV} = 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 \text{ V} = 10^{-1} \text{ V} = 0,1 \text{ V}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10^{-1}}{5} = 2 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$2 \cdot 10^{-2} \Omega = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot (10^{-6} \Omega)}{10^{-6}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \mu\Omega}{10^{-6}} = 2 \cdot 10^4 \mu\Omega$$

$$R = 2 \cdot 10^4 \mu\Omega = 20000 \mu\Omega$$

## 1.3

**Struja kroz otpornik je  $25\ 000 \times 10^{-2} \text{ mA}$ , pad napona je  $0,001 \times 10^{-4} \text{ MV}$ , kolika je snaga otpornika u  $\text{mW}$ ?**

**Az ellenálláson folyó áram  $25\ 000 \times 10^{-2} \text{ mA}$ , a feszültségésés  $0,001 \times 10^{-4} \text{ MV}$ , hány  $\text{mW}$  az ellenállás teljesítménye?**

- Odgovor:

$$I = 25000 \cdot 10^{-2} \text{ mA} = 2,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ A} = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ A}$$

$$U = 0,001 \cdot 10^{-4} \text{ MV} = 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 \text{ V} = 10^{-1} \text{ V}$$

$$P = U \cdot I = 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

$$2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot (10^{-3} \text{ W})}{10^{-3}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mW}}{10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^1 \text{ mW}$$

$$P = 2,5 \cdot 10^1 \text{ mW} = 25 \text{ mW}$$

## 1.4

**Koliko je stepeni jedan radijan?**

**Hány fok egy radián?**

- Odgovor:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57,296^\circ$$

## 1.5

**Koliko je radijana jedan stepen?**

**Hány radián egy fok?**

- Odgovor:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow 1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0,017453292 \text{ rad}$$

### 1.6

**Koliko je radijana jedan obrtaj?**

**Hány radián egy fordulat?**

- Odgovor:

$$1 \text{ obrtaj} = 2\pi \text{ rad}$$

### 1.7

**Koliko je obrtaja jedan radijan?**

**Hány fordulat egy radián?**

- Odgovor:

$$2\pi \text{ rad} = 1 \text{ obrtaj} \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} = 0,159155 \text{ obrtaja}$$

## 2. Greške

### Vrste grešaka kod merenja

Bez obzira na različitost uzroka koji dovode do grešaka merenja, ipak se one mogu svrstavati u tri osnovne grupe, i to:

- grube greške merenja,
- sistematske greške merenja i
- slučajne greške merenja.

### Greška merenja

Osnovni cilj merenja je, da se posredstvom odgovarajućih mernih sredstava, kao rezultat merenja dobije prava vrednost merene veličine.

Razlika između izmerene vrednosti merene veličine i njene prave vrednosti naziva se greška rezultata merenja ili skraćeno greška merenja. U zavisnosti od načina predstavljanja greške merenja, kao imenovan ili neimenovan broj, razlikujemo:

- apsolutnu i
- relativnu grešku.

**Apsolutna greška merenja** je razlika između rezultata merenja i prave vrednosti merene veličine.

Izražena u jedinicama merene veličine, ona je određena relacijom:

$$G_a = x - x_0$$

Gde je:

- $x$  izmerena vrednost,
- $x_0$  prava vrednost merene veličine.

Iz relacije se vidi da je apsolutna greška algebarska veličina i da je pozitivna kada je izmerena vrednost veća od prave vrednosti, a negativna kada je izmerena vrednost manja od prave vrednosti.

**Relativna greška merenja** jednaka je odnosu apsolutne greške merenja i prave vrednosti merene veličine.

**Relativna greška merenja** određena je relacijom:

$$G_r = \frac{G_a}{x_0} = \frac{x - x_0}{x_0}$$

iz koje se vidi da je relativna greška merenja neimenovan broj.

Ako smo do dogovorene prave vrednosti merene veličine došli pomoću aritmetičke sredine niza merenja, onda imamo sledeće relacije za apsolutnu i relativnu grešku merenja:

$$G_a = x_i - \bar{x}$$

$$G_r = \frac{G_a}{x} = \frac{x_i - \bar{x}}{x}$$

Gde je:

$x_i$      jedan od rezultata merenja iz niza ponovljenih merenja,  
 $\bar{x}$      aritmetička sredina rezultata merenja.

Uobičajeno je da se relativna greška merenja izražava u procentima kao:

$$G_r(\%) = \frac{x_i - \bar{x}}{x} \cdot 100$$

## Najveća dopuštena greška mernog sredstva

**Najveća dopuštena greška mernog sredstva** je najveća greška mernog sredstva, dozvoljena tehničkom specifikacijom mernog sredstva, metrološkim propisima ili drugom regulativom, vezanom za dato sredstvo.

Ova metrološka karakteristika mernog sredstva može biti data na više načina i to kao:

- čisto relativna greška,
- čisto apsolutna greška,
- složena greška.

**Čisto relativna greška** je oblika:

$$G_{nd} = \pm X\% pv$$

gde oznak "**pv**" znači "od pokazane vrednosti", "od očitane vrednosti" ili "od ulazne vrednosti" za merne instrumente tj. "od postavljene vrednosti" za generatore i "od nazivne vrednosti" za mere.

**Čisto apsolutna greška** je oblika:

$$G_{nd} = \pm Y\%ks$$

gde oznaka "**ks**" znači "od kraja skale", "od pune skale", ili "od opsega".

**Složena greška** je oblika:

za analogne (voltmetre):

$$G_{nd} = \pm(X\%pv + Y\%ks + Z_1mV)$$

za digitalne instrumente :

$$G_{nd} = \pm(X\%pv + Y\%ks + Z_2dig)$$

gde zadnji sabirak u obe relacije za najveću dopuštenu grešku označava dodatnu najveću dopuštenu apsolutnu grešku datu kao fiksni broj jedinica merene veličine kod analognih instrumenata, ili kao fiksni broj cifara za digitalne instrumente.

Definicije za **X**, **Y** i **Z** :

$$Y\%ks = \frac{x - x_0}{x_{\max}} \cdot 100 \qquad X\%pv = \frac{x - x_0}{x_0} \cdot 100$$

$$Z_1mV = x - x_0(mV) \qquad Z_2dig = x - x_0(dig)$$

Gde je:

- x**        izmerena vrednost,
- x<sub>0</sub>**     usvojena prava vrednost,
- x<sub>max</sub>**    kraj skale.

## **Klasa tačnosti**

**Klasa tačnosti** je klasa mernog instrumenta koji zadovoljava određene metrološke zahteve potrebne za održavanje grešaka u određenim granicama.

Klasa određenog instrumenta se definiše jednačinom:

$$K = \left| \frac{G_{nda}}{x_{\max}} \right| \cdot 100$$

merni instrumenti se svrstavaju u klase tačnosti 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; i 5.

## Primeri:

### 2.1

Za dati skup podataka  $(x_i, y_i)$  gde su  $x_i$  vrednosti ulaznog signala, a  $y_i$  odgovarajuća pokazivanja mernog sredstva, odrediti optimalnu pravu koristeći metodu najmanjih kvadrata, i izračunati grešku linearnosti za merni opseg 0 do 5.

	$x_i$		$y_i$
	1,0		1,2
	1,6		2,0
	3,4		2,4
	4,0		3,5
	5,2		3,5
$\sum(x_i)$	15,2	$\sum(y_i)$	12,6

### Rešenje:

Kako se radi o linearnosti mernog sredstva, može se smatrati da je ulazni signal precizno poznat, pa se svako odstupanje od linearnosti pripisuje izlaznoj veličini, tj. pokazivanjima mernog sredstva. Stoga se iz metode najmanjih kvadrata bira prvi slučaj, kada se minimiziraju kvadrati vertikalnih rastojanja od kalibracione tačke do optimalne prave.

Kako se traže parametri jednačine  $y = ax + b$ , koja predstavlja optimalnu pravu, znajući njihove odgovarajuće relacije izračunavaju se prvo sledeće relacije:

	$x_i y_i$		$x_i^2$
	1,2		1,0
	3,2		2,56
	8,16		11,56
	14,0		16,0
	18,2		27,04
$\sum(x_i y_i)$	44,76	$\sum(x_i^2)$	58,16

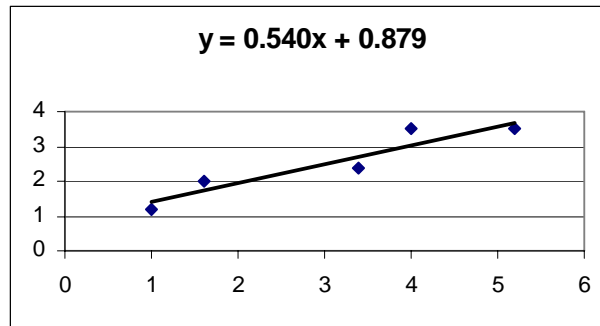
Za  $n = 5$  dobija se

$$a = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \sum(x_i) \cdot \sum(y_i)}{n \cdot \sum(x_i^2) - [\sum(x_i)]^2} = \frac{5 \cdot 44,76 - 15,2 \cdot 12,6}{5 \cdot 58,16 - (15,2)^2} = 0,540$$

$$b = \frac{\sum(y_i) \cdot \sum(x_i^2) - \sum(x_i) \cdot \sum(x_i y_i)}{n \cdot \sum(x_i^2) - [\sum(x_i)]^2} = \frac{12,6 \cdot 58,16 - 15,2 \cdot 44,76}{5 \cdot 58,16 - (15,2)^2} = 0,879$$

Tako optimalna prava ima jednačinu:

$$y = 0,540x + 0,879$$



**Slika 2.5** Optimalna prava dobijena metodom najmanjih kvadrata

Da bismo izračunali grešku linearnosti potrebno je dalje odrediti rastojanja  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_1 = y_1 - (a x_1 + b) = 1,2 - (0,540 \times 1,0 + 0,879) = -0,219$$

$$\varepsilon_2 = y_2 - (a x_2 + b) = 2,0 - (0,540 \times 1,6 + 0,879) = 0,257$$

$$\varepsilon_3 = y_3 - (a x_3 + b) = 2,4 - (0,540 \times 3,4 + 0,879) = -0,315$$

$$\varepsilon_4 = y_4 - (a x_4 + b) = 3,5 - (0,540 \times 4,0 + 0,879) = 0,461$$

$$\varepsilon_5 = y_5 - (a x_5 + b) = 3,5 - (0,540 \times 5,2 + 0,879) = -0,187$$

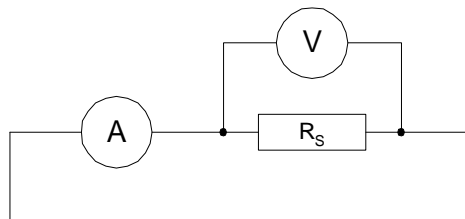
Znajući definiciju greške linearnosti, utvrđuje se da ona za  $i = 1, 2, 3, 4$  i  $5$  iznosi:

$$G_1 = \frac{\max\{|\varepsilon_i|\}}{y_{\max}} \cdot 100\% = \frac{0,461}{5} \cdot 100\% = 9,22\%$$

## 2.2

(a) Voltmetar sa ulaznom otpornošću od  $200 \text{ k}\Omega$  povezuje se na nepoznati otpornik  $R_s$ . Voltmetar pokazuje  $250 \text{ V}$ , a miliampermetar (veoma male unutrašnje otpornosti) povezan na red sa nepoznatim otpornikom pokazuje  $10 \text{ mA}$ . Odrediti prividnu otpornost, i grešku merenja nastalu zbog efekta opterećenja voltmetra.

(b) Ako su isti voltmetar i ampermetar povezani sa drugim nepoznatim otpornikom i pokazuju  $100 \text{ V}$  i  $2 \text{ A}$ , respektivno, odrediti grešku opterećenja u ovom slučaju.



**Slika 2.10** Uz primer 2.2

**Rešenje:**

(a) Ukupna otpornost u kolu,  $R_U$ , je:

$$R_U = \frac{U}{I} = \frac{250}{10 \cdot 10^{-3}} = 25 \text{ k}\Omega$$



Zanemarujući otpornost miliampermetra, prividna vrednost nepoznatog otpornika,  $R_p$ , iznosi isto toliko tj.:

$$R_p = R_U = 25 \text{ k}\Omega$$

Kako je voltmetar vezan paralelno sa nepoznatim otpornikom imamo:

$$\frac{1}{R_U} = \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_V}$$

gde je  $R_S$  stvarna otpornost otpornika, a  $R_V$  je ulazna otpornost voltmetra, pa je:

$$R_S = \frac{R_U \cdot R_V}{R_V - R_U} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 - 25 \cdot 10^3} = 28,56 \text{ k}\Omega$$

Stoga je greška opterećenja,  $G_{opt}$ , izračunata u procentima jednaka:

$$G_{opt} = \frac{R_p - R_S}{R_S} \cdot 100 = \frac{25 \cdot 10^3 - 28,56 \cdot 10^3}{28,56 \cdot 10^3} \cdot 100 = -12,46 \%$$

gde znak "-" pokazuje da efekat opterećenja smanjuje stvarnu vrednost otpornika.

(b) U drugom slučaju ukupna otpornost u kolu je:

$$R_U = \frac{100}{2} = 50 \Omega$$

Zanemarujući unutrašnju otpornost miliampermetra imamo sledeća izračunavanja:

$$R_p = 50 \Omega$$

$$R_S = \frac{R_U \cdot R_V}{R_V - R_U} = \frac{50 \cdot 200 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 - 50} = 50,0125 \Omega$$

$$G_{opt} = \frac{R_p - R_S}{R_S} \cdot 100 = \frac{50 - 50,0125}{50,0125} \cdot 100 = -0,025 \%$$

Vidi se, da voltmetar sa visokom ulaznom impedansom može pokazivati nekorektan napon, kada je priključen na dve tačke kola sa visokom otpornošću, zbog efekta opterećenja (a), dok isti voltmetar daje znatno pouzdanije pokazivanje, sa zanemarljivom greškom opterećenja, kad je povezan u dve tačke kola sa malom otpornošću (b).

### 2.3

Koliko iznosi najveća dopuštena greška voltmetra za mernu tačku u kojoj je ulazni napon 6 V, ako je najveća dopuštena greška  $\pm 1\%$  *pv* (gde oznaka "*pv*" znači "od pokazane vrednosti").

#### Rešenje:

Imamo da je najveća dopuštena apsolutna greška  $G_{nda}$ :

$$G_{nda} = D_{ndr} \cdot x = \pm 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 6V = \pm 0,06V$$

gde je:  $G_{ndr}$  najveća dopuštena relativna greška.

### 2.4

Koliko iznosi najveća dopuštena apsolutna i relativna greška voltmetra za mernu tačku u kojoj je ulazni napon 6 V, na mernom opsegu 10 V, ako je najveća dopuštena greška  $\pm 1\%$  *ks* (gde oznaka "*ks*" znači "od kraja skale", "od pune skale" ili "od opsega").

#### Rešenje:

Najveća dopuštena apsolutna greška iznosi:

$$G_{nda} = \pm Y\% ks = \pm 1\% ks = \pm 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 10V = \pm 0,1V$$

A najveća dopuštena relativna greška iznosi:

$$G_{ndr}(\%) = \pm \frac{G_{nda}}{x} \cdot 100 = \pm \frac{0,1V}{6V} \cdot 100 = \pm 1,7\%$$

### 2.5

Koliko iznosi najveća dopuštena apsolutna i relativna greška voltmetra za mernu tačku u kojoj je ulazni napon 6 V, na mernom opsegu 10 V, ako je najveća dopuštena greška  $\pm(1\% pv + 1\% ks)$ .

#### Rešenje:

Koristeći relaciju:

$$G_{nda} = \pm(X\% pv + Y\% ks) = \pm \left( 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 6V + 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 10V \right) = \pm 0,16V$$

dobijamo najveću apsolutno dopuštenu grešku. Za dobijanje najveće dopuštene relativne greške koristi se relacija:

$$G_{ndr}(\%) = \pm \frac{G_{nda}}{x} \cdot 100 = \pm \frac{0,16V}{6V} \cdot 100 = \pm 2,7\%$$

## 2.6

Koliko iznosi najveća dopuštena apsolutna i relativna greška analognog voltmetra za mernu tačku u kojoj je ulazni napon 6 V, na mernom opsegu 10 V, ako je najveća dopuštena greška greška  $\pm(1 \% pv + 1 \% ks + 10 \text{ mV})$ .

### Rešenje:

Koristeći relaciju:

$$G_{nda} = \pm(X \% pv + Y \% ks + Z_1 \text{ mV}) = \pm\left(1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 6V + 1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 10V + 10 \text{ mV}\right) = \pm 0,17V$$

dobijamo najveću apsolutno dopuštenu grešku. Za dobijanje najveće dopuštene relativne greške koristi se relacija:

$$G_{ndr}(\%) = \pm \frac{G_{nda}}{x} \cdot 100 = \pm \frac{0,17V}{6V} \cdot 100 = \pm 2,8\%$$

## 2.7

Koliko iznosi najveća dopuštena apsolutna greška i relativna greška digitalnog voltmetra sa 4 ½ digita, za mernu tačku u kojoj je ulazni napon 6 V, na mernom opsegu 10 V ako je najveća dopuštena greška  $\pm(0,2 \% pv + 0,1 \% ks + 5 \text{ dig})$ .

### Rešenje:

Za rešenje ovog zadatka je potrebno znati odnose između 1 digita, procenta do kraja skale (što važi za bilo koji opseg) i razlaganja u voltima za merni opseg od 10 V za dati digitalni voltmetar od 4 ½ digita. Ovi odnosi dati su u tabeli 2.1:

D V M	Displej	1 digit =	1 digit =
3 ½	10,00	0,1 % ks	10 mV
4 ½	10,000	0,01 % ks	1 mV
5 ½	10,000 0	0,001 % ks	100 μV
6 ½	10,000 00	0,000 1 % ks	10 μV
7 ½	10,000 000	0,000 01 % ks	1 μV

Za najveću dopuštenu grešku za digitalni voltmetar važi:

$$G_{nda} = \pm(X \% pv + Y \% ks + Z_2 \text{ dig}) = \pm\left(0,2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 6V + 0,1 \cdot \frac{1}{100} \cdot 10V + 5 \text{ mV}\right) = \pm 0,027V$$

Za najveću dopuštenu relativnu grešku dobija se:

$$G_{ndr} = \pm \frac{G_{nda}}{x} \cdot 100 = \pm \frac{0,027V}{6V} \cdot 100 = \pm 0,45\%$$

## 2.8

Naponski merni opseg vatmetra je  $MO_{WU} = 300 \text{ V}$ , a strujni opseg je  $MO_{WI} = 1 \text{ A}$ . Maksimalni otklon kazaljke je  $\alpha_{\max} = 150$  podeoka. Klasa tačnosti instrumenta  $K = 0,2$ . Pri otklonu kazaljke od  $\alpha = 30$  podeoka, odrediti konstantu instrumenta  $C_W$  i relativnu grešku merenja  $G_{r\%}$ !

A wattméter feszültség méréshatára  $MO_{WU} = 300 \text{ V}$ , az áram méréshatára  $MO_{WI} = 1 \text{ A}$ . A mutató maximális kitérése  $\alpha_{\max} = 150$  osztás. A műszer pontossági osztálya  $K = 0,2$ . Ha a mutató kitérése  $\alpha = 30$  osztás, határozza meg a műszerállandót  $C_W$  és a mérés  $G_{r\%}$  relatív hibáját!

- Odgovor:

$$C_W = \frac{MO_{WU} \cdot MO_{WI}}{\alpha_{\max}} = \frac{300 \cdot 1}{150} = 2 \frac{W}{\text{pod.}}$$

$$K = 0,2 \Rightarrow G_{SV\%} = \pm 0,2 \%$$

$$G_{r\%} = G_{SV\%} \frac{\alpha_{\max}}{\alpha} = \pm 0,2 \frac{150}{30} = \pm 1 \%$$

## 3. Statistička obrada rezultata merenja

Zadatak obrade rezultata višestruko ponovljenih merenja konstantne fizičke veličine jeste:

- procena prave vrednosti merene veličine i
- procena merne nesigurnosti korigovanog rezultata merenja.

Ukoliko se može početi od pretpostavke da su sve sistematske greške eliminisane u potpunosti, ovom statističkom analizom se dobija najverovatnija prava vrednost merene veličine i ukupna merna nesigurnost. U tom cilju potrebno je definisati sledeće pojmove:

- aritmetička sredina rezultata merenja,
- standardna devijacija i
- standardna devijacija aritmetičke sredine.

Aritmetička sredina rezultata merenja iznosi

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Prema Gausovoj teoriji slučajnih grešaka, pri proučavanju uticaja slučajnih grešaka na rezultat merenja, treba početi od dve pretpostavke, koje možemo smatrati i aksiomima:

1. Pri velikom broju ponovljenih merenja, jednako verovatno nastaju slučajne greške jednakih vrednosti ali suprotnog predznaka.
2. Verovatnoća pojavljivanja malih grešaka veća je od verovatnoće pojavljivanja velikih grešaka.

Pri višestruko ponovljenim merenjima konstantne fizičke veličine, upravo aritmetička sredina rezultata merenja najbolja je aproksimacija prave vrednosti merene veličine.

Definicija aritmetičke sredine odnosi na određeni broj vrednosti posmatrane, odnosno merene veličine, te u principu može biti dvojaka.

Ovaj broj može biti veoma veliki. Teoretski, to je beskonačan broj rezultata ponovljenih merenja fizičke veličine, i tada se radi o:

**populaciji**, koja označava potpun skup vrednosti posmatrane veličine. *Ako se definicija aritmetičke sredine primeni na populaciju tada se govori o aritmetičkoj sredini populacije.*

Ograničeni broj rezultata merenja formira samo **uzorak iz populacije**, što znači da se u statističkoj analizi koristi deo populacije, izabran na takav način, da je on u potpunosti predstavnik te populacije sa svim njenim karakteristikama. Ovaj reprezentativni uzorak obezbeđuje se postupkom nazvanim slučajno uzorkovanje. Pri tome broj rezultata merenja posmatrane veličine  $n$  je ograničen broj, koji odgovara realnim mogućnostima merne prakse i iznosi najviše nekoliko desetina.

*Ako se definicija aritmetičke sredine primeni na uzorak, tada se govori o aritmetičkoj sredini uzorka.*

**Standardna devijacija** je ona greška, koja bi, kada bi se javila u svih  $n$  pojedinačnih merenja, dala istu sumu kvadrata grešaka, kao i suma kvadrata stvarnih apsolutnih grešaka.

**Standardnu devijaciju možemo predstaviti u obliku:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$$

Data je u istim jedinicama kao i izmerena vrednost.

Da bi smo definisali standardnu devijaciju sa podacima koje je realno moguće prikupiti u mernom procesu, potrebno je uspostaviti vezu između stvarnih grešaka:

$$\Delta x_i = x_i - x_0,$$

i prividnih grešaka merenja koje definišemo kao:

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

Izraz za standardnu devijaciju  $s$ , za seriju od  $n$  merenja iste veličine:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2}$$

Odnosno:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

U mernoj praksi, za standardnu devijaciju veoma je pogodno koristiti relaciju koja se lako izvodi iz gornje jednačine kvadriranjem izraza u zagradi:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}$$

Standardna devijacija populacije definisana je relacijom:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

u kojoj je broj merenja  $N$  veoma veliki i statistički teži beskonačnosti, a umesto prave vrednosti merene veličine  $x_0$ , imamo aritmetičku sredinu populacije  $\mu$ .

A standardna devijacija uzorka definisana je relacijom:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

u kojoj je aritmetička sredina rezultata merenja u stvari aritmetička sredina uzorka, što je statistički gledano istovetno.

## Standardna devijacija aritmetičke sredine

Ako pretpostavimo da su pojedinačne stvarne apsolutne greške vrlo male, možemo napisati:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}$$

odakle se vidi da greška aritmetičke sredine rezultata merenja opada sa korenom iz broja ponovljenih merenja  $n$ . Ova greška naziva se standardna devijacija aritmetičke sredine

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}$$

$$x_0 = \bar{x} \pm \left| \frac{s}{\sqrt{n}} \right| = \bar{x} \pm |s_{\bar{x}}|$$

## Obrada rezultata indirektno merene veličine

**S obzirom na različite oblike grešaka merenja direktno merenih veličina razlikujemo:**

- sistematsku grešku indirektno merene veličine,

- standardnu devijaciju indirektno merene veličine  $y$
- graničnu grešku indirektno merene veličine.

U opštem slučaju kada je indirektno merena veličina  $y$  funkcija više međusobno nezavisnih direktno merenih veličina  $x_i$ , i ako su poznate sistematske greške pojedinih direktno merenih veličina  $\Delta x_i$ , pri čemu je u svakom pojedinačnom slučaju  $\Delta x_i \ll x_i$ , sistematska greška indirektno merene veličine može se odrediti primenom totalnog diferencijala funkcije  $y$ , i aproksimacijom diferencijalnih priraštaja odgovarajućim greškama, pa je:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

odnosno:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)$$

Gde je

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$$

parcijalna greška veličine  $y$  prouzrokovana greškom  $\Delta x_i$ . Dakle, sistematska greška indirektno merene veličine  $y$  jednaka je zbiru njenih parcijalnih grešaka.

### Standardna devijacija indirektno merene veličine

Ako je  $s_i$  standardna devijacija direktno merene veličine  $x_i$  onda se standardna devijacija indirektno merene veličine  $y$  dobija zamenom odgovarajućih slučajnih grešaka direktno merenih veličina  $\Delta x_i$  standardnim devijacijama  $s_i$ , što znači da je za standardnu devijaciju indirektno merene veličine

$$s_y = \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot s_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot s_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot s_n \right)^2}$$

odnosno

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot s_i \right)^2}$$

Izraz za relativnu standardnu devijaciju indirektno merene veličine je:

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{dy}{dx_i} \cdot \frac{s_i}{y} \right)^2}$$

### Standardna devijacija nekih složenih funkcija iz merne prakse

Za slučajeve koji se najčešće javljaju u mernoj praksi standardna devijacija aritmetičke sredine indirektno merene veličine, kao i odgovarajuća relativna standardna devijacija su:

- za slučaj zbira niza direktno merenih veličina:

$$(y = x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \sqrt{\frac{1}{y^2} (s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)}$$

- zbir dve direktno merene veličine:

$$(y = x_1 + x_2)$$

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 \cdot x_1^2 + r_2^2 \cdot x_2^2}}{x_1 + x_2}$$

- razlika dve direktno merene veličine:

$$(y = x_1 - x_2)$$

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 \cdot x_1^2 + r_2^2 \cdot x_2^2}}{x_1 - x_2}$$

- proizvod dve direktno merene veličine:

$$(y = x_1 \cdot x_2)$$

$$s_y = \sqrt{x_2^2 \cdot s_1^2 + x_1^2 \cdot s_2^2}$$

$$r_y = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

- količnik dve direktno merene veličine:

$$\left( y = \frac{x_1}{x_2} \right)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{s_1^2}{x_2^2} + \frac{x_1^2 \cdot s_2^2}{x_2^4}}$$

$$r_y = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

## Granična greška indirektno merene veličine

Pri praktičnim merenjima često nismo u situaciji da poznamo prave vrednosti grešaka direktno merenih veličina ako, na primer, nije izvršena kalibracija odgovarajućih mernih



sredstava ili statistička analiza njihovih rezultata merenja, pa tada raspoložemo samo tehničkim karakteristikama korišćenih mernih sredstava iz uputstva proizvođača. Na taj način su jedino poznate najveće dopuštene greške koje deklarirše proizvođač mernog sredstva i koje se u ovim razmatranjima nazivaju granične greške direktno merenih veličina  $x_{i,\max}$ .

Do granične greške indirektno merene veličine  $\Delta y_{\max}$ , dolazi se kada se u sistematsku grešku indirektno merene veličine određenu primenom totalnog diferencijala funkcije  $y$ , zamene  $\Delta x_i$  sa  $\Delta x_{i,\max}$ , pa je granična greška tzv. najnepovoljnijeg slučaja (sve  $\Delta x$  imaju isti znak):

$$\Delta y_{\max} = \pm \left\{ \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_{1,\max} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_{2,\max} \right| + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_{n,\max} \right| \right\}$$

odnosno

$$\Delta y_{\max} = \pm \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_{i,\max} \right|$$

Praktična vrednost granične greške je u njenoj primeni za sigurnu procenu vrednosti indirektno merene veličine, jer će se ona u svakom slučaju nalaziti u tim granicama:

$$y = \bar{y} \pm |\Delta y_{\max}|$$

S obzirom na objektivno nerealno veliku, ovako definisanu, graničnu grešku, u praktičnoj upotrebi se češće preporučuje statistička granična greška, koja se dobija iz već definisane najverovatnije greške, u kojoj su greške direktno merenih veličina  $\Delta x_i$  zamenjene sa graničnim greškama direktno merenih veličina  $\Delta x_{i,\max}$ . Na ovaj način se definišu znatno uže granice indirektno merene veličine kao:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{N,\max}$$

gde je statistička granična greška data kao:

$$\Delta y_{N,\max} = \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_{1,\max} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_{2,\max} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_{n,\max} \right)^2}$$

## Primeri:

### 3.1

*Wheastonovim mostom izvršeno je pet merenja jednog otpora pod istim okolnostima. Dobivene su vrednosti: 1483, 1478, 1482, 1485 i 1480 oma. Kolika je najverovatnija vrednost merenog otpora, zatim standardna devijacija s pojedinačnog merenja i standardna devijacija s  $\bar{x}$  aritmetičke sredine?*

Najverovatnija vrednost merenog otpora je aritmetička sredina:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1483 + 1482 + 1485 + 1480 + 1478}{5} = 1481.6 \Omega$$

Standardna devijacija:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5-1} [(1483 - 1481.6)^2 + (1482 - 1481.6)^2 + (1485 - 1481.6)^2 + (1480 - 1481.6)^2 + (1478 - 1481.6)^2]}$$

$$s = 2.7 \Omega$$

Standardna devijacija aritmetičke sredine:

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.7}{\sqrt{5}} = 1.2 \Omega$$

### 3.2

**Od otpornika čija je standardna devijacija 0,4% treba složiti serijsku kombinaciju od 10 otpornika. Kolika je procentualna standardna devijacija takve kombinacije?**

Standardna devijacija zbira  $y = x_1 + \dots + x_n$  je:

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_{10}^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + \dots + s_{10}^2}}{x_1 + \dots + x_{10}} = \frac{\sqrt{r_1^2 x_1^2 + \dots + r_{10}^2 x_{10}^2}}{x_1 + \dots + x_{10}}$$

za  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  te za  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ .

$$r_y = \frac{r_n}{\sqrt{n}} = \frac{0.4}{\sqrt{10}} = 0.127 \%$$

### 3.3

**Otpornici od 10 oma imaju standardnu devijaciju 0,2%, a otpornici od 100 oma standardnu devijaciju 2%. Koliku procentualnu standardnu devijaciju ima paralelna, odnosno serijska kombinacija, takva dva otpornika?**

Paralelna kombinacija:

$$R_1 = 10 \Omega; \quad r_1 = 0,2\%$$

$$R_2 = 100 \Omega; \quad r_2 = 2\%$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad x_1 = \frac{1}{R_1} \quad x_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$r_y = \frac{\sqrt{x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{0.1^2 \cdot 0.2^2 + 0.01^2 \cdot 2^2}}{0.1 + 0.01} = 0.257\%$$

Serijska kombinacija:

$$R = R_1 + R_2 \quad x_1 = R_1 \quad x_2 = R_2$$

$$r_y = \frac{\sqrt{x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{10^2 \cdot 0.2^2 + 100^2 \cdot 2^2}}{10 + 100} = 1.82\%$$

### 3.4

**Kondenzatori kapaciteta 1  $\mu\text{F}$  imaju standardnu devijaciju 1%, a kondenzatori od 0,2  $\mu\text{F}$  imaju standardnu devijaciju 5%. Kolika je procentualna standardna devijacija paralelne i serijske kombinacije takva dva kondenzatora?**

Paralelna kombinacija:

$$C_1 = 1 \mu\text{F} \quad r_1 = 1\% \\ C_2 = 0,2 \mu\text{F} \quad r_2 = 5\%$$

$$C = C_1 + C_2 \quad x_1 = C_1 \quad x_2 = C_2$$

$$r_y = \frac{\sqrt{x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{1^2 \cdot 1^2 + 0.2^2 \cdot 5^2}}{1 + 0.2} = 1.18\%$$

Serijska kombinacija:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad x_1 = \frac{1}{C_1} \quad x_2 = \frac{1}{C_2}$$

$$r_y = \frac{\sqrt{x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{1^2 \cdot 1^2 + 5^2 \cdot 5^2}}{1 + 5} = 4.17\%$$

### 3.5

**Dužina neke njive iznosi 400 metara, a širina 180 metara. Pri merenju dužine moglo je najviše da se pogreši za 20 cm, a pri merenju širine 15 cm. (Naći površinu.) Odrediti ukupnu relativnu grešku.**

Do graničnih grešaka indirektno merene veličine dolazi se primenom sledeće formule:

$$\Delta y_{\max} = \pm \left\{ \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_{1,\max} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_{2,\max} \right| + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \Delta x_{n,\max} \right| \right\}$$

odnosno:

$$\Delta y_{\max} = \pm \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_{i,\max} \right|$$

Granična greška za slučaj proizvoda niza direktno merenih veličina ( $y = a \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot \dots \cdot x_n^t$ )

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a \cdot p \cdot x_1^{p-1} \cdot x_2^q \cdot \dots \cdot x_n^t$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a \cdot q \cdot x_1^p \cdot x_2^{q-1} \cdot \dots \cdot x_n^t$$

...

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = a \cdot t \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot \dots \cdot x_n^{t-1}$$

$$\Delta y_{\max} = \pm \left( a \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot \dots \cdot x_n^t \right) \left\{ p \cdot \frac{\Delta x_{1,\max}}{x_1} + q \cdot \frac{\Delta x_{2,\max}}{x_2} + \dots + t \cdot \frac{\Delta x_{n,\max}}{x_n} \right\}$$

$$y_{\max \%} = \frac{\Delta y_{\max}}{y} = \pm \left\{ p \cdot \frac{\Delta x_{1,\max}}{x_1} + q \cdot \frac{\Delta x_{2,\max}}{x_2} + \dots + t \cdot \frac{\Delta x_{n,\max}}{x_n} \right\}$$

U našem slučaju

$$x_1 = 400 \text{ m}, \quad x_2 = 180 \text{ m}, \quad \Delta x_{1\max} = 20 \text{ cm}, \quad \Delta x_{2\max} = 15 \text{ cm},$$

$$y = x_1 \cdot x_2 = 400 \cdot 180 = 72\,000 \text{ m}^2$$

$$y_{\max \%} = \frac{\Delta y_{\max}}{y} = \pm \left\{ \left| \frac{\Delta x_{1,\max}}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_{2,\max}}{x_2} \right| \right\}$$

$$y_{\max \%} = \frac{\Delta y_{\max}}{y} = \pm \left\{ \left| \frac{0.2}{400} \right| + \left| \frac{0.15}{180} \right| \right\} = \pm (0.0005 + 0.00083) = \pm 0.00133 = \pm 0.133\%$$

### 3.6.

**Od kondenzatora kapacitivnosti  $C = 2,2 \mu\text{F}$  čija je standardna devijacija 5% treba složiti paralelnu kombinaciju od 16 kondenzatora. Kolika je procentualna standardna devijacija takve kombinacije?**

- Odgovor:

Standardna devijacija zbira  $y = x_1 + x_2$ .

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{x_1 + x_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 x_1^2 + r_2^2 x_2^2}}{x_1 + x_2}$$

za  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$$C_{ekv} = C_1 + C_2 + \dots + C_{16} = 16C$$

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_{16} = 16x$$

za  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ .

$$s_y = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$r_y = \frac{s_y}{y} = \frac{\sqrt{s_1^2 + \dots + s_{16}^2}}{x_1 + \dots + x_{16}} = \frac{\sqrt{r_1^2 x_1^2 + \dots + r_{16}^2 x_{16}^2}}{x_1 + \dots + x_{16}} = \frac{\sqrt{16 \cdot r_1^2 x_1^2}}{16 \cdot x_1} = \frac{r}{\sqrt{16}}$$

$$r_y = \frac{r_n}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = 1,25\%$$

## 4. Osnovne vrste električnih mernih instrumenata

U ovom izlaganju pažnja je posvećena instrumentima sa:

- pokretnim kalemom,
- pokretnim gvožđem i
- elektrodinamičkim instrumentima

Na instrumentu su uobičajeno navedeni osnovni elementi o instrumentu: klasa tačnosti, vrsta struje koju instrument meri (jednosmerna, naizmenična), probojni napon, položaj instrumenta pri merenju i slično.

Osnovni princip rada je mehaničko dejstvo merene veličine na pokretni deo instrumenta. Ovo dejstvo rezultuje relativnom kretanjem pokretnog dela sa pričvršćenom kazaljkom u odnosu na nepokretni deo instrumenta.

### Instrument sa pokretnim kalemom i nepokretnim magnetom (Deprez)

Pokretni kalem u čijim provodnicima teče merena struja nalazi se u (homogenom) magnetnom polju stalnog magneta. Ukoliko u magnetnom polju indukcije  $\mathbf{B}$ , u provodniku dužine  $\mathbf{l}$ , teče struja  $\mathbf{I}$ , onda upravno na  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{I}$  nastaje elektromehaničko delovanje sile.

Magnetski moment koji deluje na pokretni deo instrumenta proporcionalan jednosmernoj struji kroz kalem. Ugao skretanja kazaljke  $\alpha$  proporcionalan je struji  $\mathbf{I}$ . Magnetskom momentu se suprotstavlja otporni moment (opruga) koja se bira tako da momenat bude linearno zavistan od ugla okretanja.

Ako se ovakav instrument koristi za merenje promenljive struje kazaljka će samo ako su promene spore pratiti promene (pozitivnu poluperiodu promena, negativnu ne može ni fizički zbog konstrukcije) sa greškom koja zavisi od dinamičkih (inercijalnih) karakteristika uređaja. Ako su promene struje brze instrument će pokazivati srednju vrednost struje. Pri primeni ovakvog uređaja za merenje naizmjenične (prostoperiodične) struje, čija srednja vrednost je nula, instrument će pokazivati manje ili veće oscilacije oko nule.

## Instrumenti sa pokretnim gvoždem

Instrumenti sa pokretnim gvoždem funkcionišu tako što u polju koje stvara struja u kalemu se pokreće meko gvožđe. Pomeranje (obrtnje) je rezultat privlačne sile na meko gvožđe u blizini namotaja ili odbijanja istoimenih polova magneta. Meko gvožđe postaje magnet u magnetskom polju. Kod ovih instrumenata opruga obezbeđuje uravnoteženje kao što to već opisano kod instrumenta sa pokretnim kalemom.

Ugao skretanja kazaljke je srazmeran kvadratu merene jednosmerne struje, te mu je skala kvadratna. S obzirom da konstrukcijom može da se utiče na oblik i relativni položaj mekog gvožđa u odnosu na namotaj može da se dobije i linearna skala u opsegu od 20% do 100% do punog skretanja.

Zbog inercije pokretni deo instrumenta ne može pratiti brze promene već zauzima položaj određen srednjom vrednošću momenta usled magnetskog polja i opruge.

Skretanje instrumenta je srazmerno kvadratu efektivne vrednosti bez obzira da li se radi o prostoperiodičnoj ili nekoj drugoj zavisnosti struje. Ovakvi instrumenti nose oznaku true RMS ili tačna efektivna vrednost.

## Elektrodinamički instrumenti

Elektrodinamički instrumenti se realizuju primenom dva kalema. Magnetski moment potiče od uzajamnog dejstva dva polja, oba nastala kao posledica promenljive u mernim kalemovima. Jedan kalem je nepokretan, a drugi pokretan. Struje u kalemovima su nezavisne. Nepokretan kalem koji generiše magnetsko polje u kome se okreće pokretan (manji) kalem se konstruiše tako da formira skoro homogeno magnetsko polje i ravnomeran fluks bez obzira na položaj pokretnog kalema. Ravnoteža pokretnog kalema se obezbeđuje spiralnom oprugom koristeći ranije opisanu strukturu.

Ako se mehaničkom konstrukcijom postigne da promena koeficijenta međusobne induktivnosti bude konstantna pri obrtnju (u ograničenom opsegu obrtnja) dobijamo da je trenutna vrednost magnetskog momenta proporcionalna proizvodu trenutnih vrednosti struja kroz kalemove.

Zbog inercije instrument ne može da prati brze promene struja pa će skretanje odgovarati srednjoj vrednosti obrtnog momenta.

Ako su struje u kalemovima prostoperiodične, a njihove efektivne vrednosti  $I_1$ ,  $I_2$  i fazna razlika  $\phi$  dobijamo:

$$M_1 = k I_1 I_2 \cos \phi$$

Ako posmatramo jednosmerne struje fazna razlika je nula.

## Primeri:

### 4.1

**Kako glasi jednačina skretanja instrumenta sa kretnim kalemom i šta se iz nje može zaključiti?**

- Skretanje je  $\alpha = KI$ . Pošto je  $I$  na prvom stepenu, znači da se instrument može upotrebiti samo za merenje jednosmernih struja. Iz istog razloga izlazi da će mu skala biti ravnomerna.

### 4.2

**Kako zavisi skretanje instrumenta sa kretnim gvoždem od struje i kakve su posledice toga?**

- Zavisi od kvadrata struje, što znači da može da meri i naizmeničnu struju. Osim toga, njegova će skala biti kvadratna - neravnomerna.

### 4.3

**Može li se menjati oblik skale kod instrumenata sa kretnim gvoždem?**

- Može, davanjem pogodnog oblika komadu kretnog gvožđa.

### 4.4

**Kakve su prednosti i mane instrumenata sa kretnim gvoždem?**

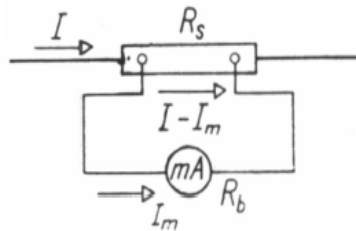
- Jevtiniji su i izdržljiviji. Manje su precizni od instrumenata sa kretnim kalemom ili od instrumenata sa pokretnim magnetom.

## Proširivanje mernog opsega

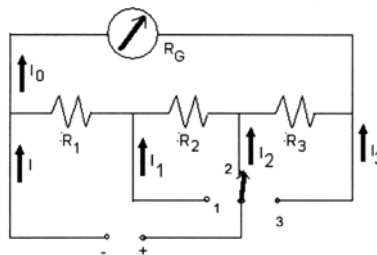
Upotreba šanta

$$R_s(I - I_m) = R_b I_m$$

$$R_s = \frac{I_m}{I - I_m} R_b$$



Uobičajeno je da se instrumenti prave sa više opsega merenja, koji se biraju preklopnikom. Od nekoliko poznatih električnih šema najviše se koristi univerzalni ili Eyrtonov šant, koji je prikazan na slici.br: 4.2.



Slika br.4.2: Eyrtonov šant

Jednostavnim algebarskim operacijama koje se dobijaju primenom Kirhofovih zakona mogu se odrediti otpornosti koje treba koristiti da bi se dobili određeni opsezi za merenje.

Struja kroz instrument ako je preklopnik u položaju 1:

$$I_{01} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_G}$$

Struja kroz instrument, ako je preklopnik u položaju 2:

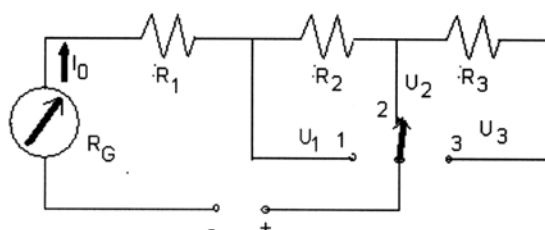
$$I_{02} = I \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_G}$$

Struja kroz instrument, ako je preklopnik u položaju 3:

$$I_{03} = I \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_G}$$

Koristeći prethodne jednačine moguće je za date vrednosti struje  $I$ , poznatu unutrašnju otpornost  $R_G$  i struju maksimalnog otklona  $I_0$  odrediti otpore  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Slično ampermetrima i voltmetri se prave tako da rade u više opsega, a na slici br.4.4 je prikazana najčešća šema povezivanja predotpornika



Slika br.4.4: Voltmetar sa predotpornicima

Najveći napon koji možemo priključiti na ampermetar je:

$$U_0 = R_G I_0$$

pa koristeći napred navedene vrednosti za struju maksimalnog otklona  $I_0$  i unutrašnju otpornost instrumenta  $R_G$  dobijamo  $U_0$  u opsegu koji je manji od 1 V.

Povezivanjem predotpornika dobijamo prošireni opseg za merenje i on iznosi:

$$U = (R_p + R_G) I_0$$

odakle je lako izračunati otpornost  $R_p$  koju treba koristiti za proširenje opsega .

#### 4.5

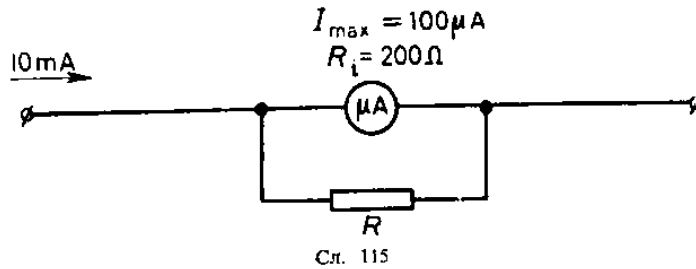
**Šta je to "moć umnožavanja šanta"?**

- To je neimenovani broj koji pokazuje koliko je puta, pri upotrebi šanta, veća merena struja od one vrednosti koja se pročita na skali instrumenta, to jest od one koja protiče kroz instrument.

#### 4.6

**Instrument skrene do kraja kada kroz njega protiče struja od 100  $\mu A$ . Unutrašnja otpor mu je 200 oma. Naći otpor šanta koji treba da mu se veže paralelno, pa da pri prolasku struje od 10 mA skrene do kraja.**





$$I_a = 100 \mu\text{A}$$

$$R_a = 200 \Omega$$

$$I = 10 \text{ mA}$$

$$R_s = ? \Omega$$

$$I_a \cdot R_a = I_s \cdot R_s$$

$$I_a + I_s = I \quad \Rightarrow \quad I_s = I - I_a$$

$$I_a \cdot R_a = (I - I_a) \cdot R_s \quad \Rightarrow \quad R_s \cdot \frac{I_a \cdot R_a}{I - I_a} = \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{(10000 - 100) \cdot 10^{-6}} = \frac{200}{99} = 2,0202 \Omega$$

#### 4.7

**Paralelno instrumentu čiji su podaci  $R_a = 600 \Omega$   $I_{max} = 100 \mu\text{A}$  vezan je otpornik od  $1 \Omega$ . Kolika struja protiče kroz kolo u koje je uključen ovakav instrument kad mu kazaljka skrene do 60-tog podeoka, to jest pokazuje  $60 \mu\text{A}$ .**

Kada na instrumentu proteče struja od  $I_a = 60 \mu\text{A}$ , pad napona na ampermetru je

$$U_a = I_a \cdot R_a = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 600 = 36 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 36 \text{ mV}$$

Ako je pad napona na šantu 36 mV struja će biti:

$$I_s = \frac{U_a}{R_i} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{1} = 36 \text{ mA}$$

$$I_a + I_s = I \quad \Rightarrow \quad I = 36 \cdot 10^{-3} + 60 \cdot 10^{-6} = 36060 \mu\text{A} \cong 36 \text{ mA}$$

Kroz kolo tada protiče struja  $I = 36060 \mu\text{A}$  ili cca 36 mA.

#### 4.8

**Može li se prednja veza staviti u kolo kroz koje protiče struja od 130 mA?**

$$I_a \cdot R_a = I_s \cdot R_s$$

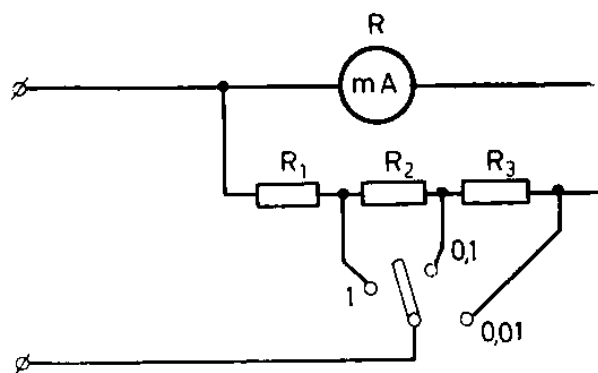
$$I_a + I_s = I \quad \Rightarrow \quad I_s = I - I_a$$

$$I_a = I \frac{R_s}{R_a + R_s} = 130 \cdot 10^{-3} \frac{1}{600 + 1} = 216 \mu\text{A}$$

Ne sme pošto bi kroz instrument prolazila struja od 216  $\mu\text{A}$ , pa bi mogao da pregori.

## 4.9

Proračunati Ajron-Materov (Ayron-Mather) šant za struje od 0,01 do 0,1 i 1 A pri upotrebi instrumenta od  $I_i = 1 \text{ mA}$  punog skretanja i  $R_i = 100 \Omega$



Ср. 116

$$I_1 = 10 \text{ mA}$$

$$I_2 = 100 \text{ mA}$$

$$I_3 = 1000 \text{ mA}$$

$$U_i = R_i \cdot I_i$$

$$U_i = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot (I_1 - I_i)$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) = \frac{R_i \cdot I_i}{(I_1 - I_i)} = \frac{100 \cdot 1}{10 - 1} = \frac{100}{9} \Omega$$

$$(R_i + R_3) \cdot I_i = (R_1 + R_2) \cdot (I_2 - I_i)$$

$$(R_i + R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_i = (R_1 + R_2) \cdot I_2$$

$$R_1 + R_2 = \frac{(R_i + R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_i}{I_2} = \frac{1}{100} \left( \frac{100}{9} + 100 \right) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1000}{9} = \frac{10}{9} \Omega$$

$$(R_i + R_2 + R_3) \cdot I_i = R_1 \cdot (I_3 - I_i)$$

$$(R_i + R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_i = R_1 \cdot I_3$$

$$R_1 = \frac{(R_i + R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_i}{I_3} = \frac{1}{1000} \left( \frac{100}{9} + 100 \right) = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1000}{9} = \frac{1}{9} \Omega$$

$$R_2 = \frac{10}{9} - \frac{1}{9} = 1 \Omega$$

$$R_3 = \frac{100}{9} - \frac{10}{9} = 10 \Omega$$

$$R_1 = \frac{1}{9} \Omega$$

$$R_2 = 1 \Omega$$

$$R_3 = 10 \Omega$$

#### 4.10

**Kako se vezuje ampermetar, a kako voltmetar?**

- Ampermetar se vezuje redno, a voltmetar paralelno.

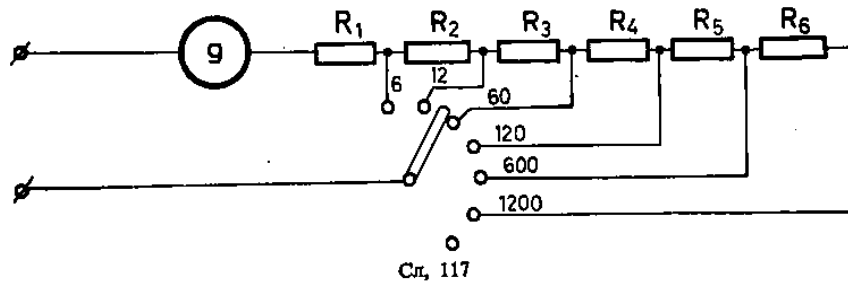
#### 4.11

**Kakav unutrašnji otpor treba da ima dobar ampermetar, a kakav dobar voltmetar i zašto?**

- Ampermetar treba da ima što je moguće manji unutrašnji otpor.
- Voltmetar treba da ima što je moguće veći unutrašnji otpor.
- Razlog tome je da treba da unose što je moguće manji poremećaj u strujno kolo u kojoj se vrši merenje.

#### 4.12

**Dat je instrument  $R_i = 5000 \Omega$  i  $I_{max} = 0,5 \text{ mA}$  Proračunati potrebne dodatne otpore da bi se mogao upotrebiti za merenje napona od 6, 12, 60, 120, 600, i 1200 volti.**



1. Ako želimo da merimo 1200 V.

$$R_i + \sum_{j=1}^6 R_j = \frac{1200}{I_{max}} = \frac{1200}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 2.400.000 \Omega$$

2. Ako želimo da merimo 600 V.

$$R_i + \sum_{j=1}^5 R_j = \frac{600}{I_{max}} = \frac{600}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 1.200.000 \Omega$$

3. Ako želimo da merimo 120 V.

$$R_i + \sum_{j=1}^4 R_j = \frac{120}{I_{max}} = \frac{120}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 240.000 \Omega$$

4. Ako želimo da merimo 60 V.

$$R_i + \sum_{j=1}^3 R_j = \frac{60}{I_{max}} = \frac{60}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 120.000 \Omega$$

5. Ako želimo da merimo 12 V.

$$R_i + \sum_{j=1}^2 R_j = \frac{12}{I_{max}} = \frac{12}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 24.000 \Omega$$

6. Ako želimo da merimo 6 V.

$$R_i + R_1 = \frac{6}{I_{max}} = \frac{6}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 12.000 \Omega$$

$$R_6 = 2.400.000 - 1.200.000 = 1.200.000 \Omega$$

$$R_5 = 1.200.000 - 240.000 = 960.000 \Omega$$

$$R_4 = 240.000 - 120.000 = 120.000\Omega$$

$$R_3 = 120.000 - 24.000 = 96.000\Omega$$

$$R_2 = 24.000 - 12.000 = 12.000\Omega$$

$$R_1 = 12.000 - 5.000 = 7.000\Omega$$

#### 4.13

*Na red sa instrumentom od  $R_i = 5000 \Omega$  i  $I_{max} = 5 \text{ mA}$  dodat je otpor od  $8000 \Omega$ , pa sve zajedno priključeno na napon od  $220 \text{ V}$ . Može li se ovakvim instrumentom meriti tako visok napon?*

$$I = \frac{U}{R + R_i} = \frac{220}{8000 + 1000} = \frac{220}{9000} = 24.444 \text{ mA}$$

Pošto je struja koja teče kroz instrument veća od dozvoljene sa ovim instrumentom ne može da se meri napon od  $220 \text{ V}$ . Dodati otpor nije dovoljno velik.

#### 4.14

*Pomoću voltmetra otpora  $1000 \Omega/V$  i opsega  $500$  volti izmerimo da napon praznog hoda na izlazu ispravljača iznosi  $300 \text{ V}$ . Unutrašnji otpor ispravljača je  $100 \text{ k}\Omega$ . Koliki je napon praznog hoda i kolika je greška pri merenju sa ovakvim instrumentom?*

Ukupan unutrašnji otpor voltmetra je

$$R_i = 500 \cdot 1000 = 500 \text{ k}\Omega$$

Pad napona na instrumentu je  $300 \text{ V}$ . Struja kroz instrument je:

$$I_i = U_i / R_i = 300 / (0,5 \cdot 10^6) = 0,6 \text{ mA}$$

Pad napona na unutrašnjem otporu ispravljača je:

$$I_i \cdot R_i = 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^3 = 60 \text{ V.}$$

Napon praznog hoda ispravljača iznosi:  $360 \text{ V}$ .

Vrednost apsolutne greške je:

$$G_a = 300 - 360 = -60 \text{ V}$$

Vrednost relativne greške je:

$$G_r = \frac{G_a}{360} = \frac{-60}{360} = -0.16666 = -16.67\%$$

#### 4.15

*Ponoviti isto merenje sa instrumentom od  $40000 \Omega/V$ , a istog opsega merenja. Koliko će on pokazati i kolika će se greška načiniti?*

Ukupan unutrašnji otpor voltmetra je:

$$R_i = 500 \cdot 40000 = 20 \text{ M}\Omega$$

Struja u mernom krugu je:

$$I_i = \frac{U}{R + R_i} = \frac{360}{0,1 \cdot 10^6 + 20 \cdot 10^6} \cong 18 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 18 \mu\text{A}$$

Pad napona na unutrašnjem otporu ispravljača je:

$$U_i = I_i \cdot R_i = 18 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^3 = 1,8 \text{ V}$$

Voltmetar će pokazati  $358,2 \text{ V}$ .

Greška usled nesavršenosti instrumenta je:

$$G_r = \frac{U_i}{U} \cdot 100\% = \frac{-1,8}{360} \cdot 100\% = -0,5\%$$

#### 4.16

**Kako se vrši pretvaranje naizmeničnih u jednosmerne struje radi merenja?**

- Pomoću ispravljača.

#### 4.17

**Koje vrednosti naizmeničnog napona razlikujemo?**

- maksimalnu vrednost,
- trenutnu vrednost,
- srednju vrednost
- dvostruku vršnu vrednost napona – vrednost od vrha do vrha (peak to peak) –  $U_{ppm}$ ,
- srednju apsolutnu vrednost  $i$
- efektivnu vrednost.

#### 4.18

**Izvesti srednju i efektivnu vrednost dvostranu usmerene sinusne funkcije!**

Srednja vrednost napona određuje se iz površine između krive i apscisne ose, označava se sa  $U_{sr}$ , i jednaka je:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Kako je kod sinusoidnog signala srednja vrednost napona u toku jedne periode jednaka nuli (jer su površine iznad i ispod apscisne ose jednake), srednja vrednost se najčešće određuje u toku polovine periode, pa je tada:

$$U_{sr} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_{\max} \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_{\max}$$

Efektivna vrednost napona sinusoidnog signala definiše se na osnovu ekvivalentnog toplotnog efekta jednosmernog električnog napona, tj. efektivna vrednost naizmeničnog napona jednaka je jednosmernom naponu koji generiše istu količinu toplote u nekom otporniku kao i posmatrani naizmenični napon.

Za jednosmerni napon ova toplota direktno je proporcionalna snazi razvijenoj u otporniku, koja se može predstaviti kao:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

gde je:

- P - snaga potrošena u otporniku,
- R - otpornost  $i$
- U - jednosmerni napon na otporniku.

Analogno tome, a u skladu sa definicijom efektivne vrednosti napona, za naizmenični napon, toplota koja se razvija u otporniku proporcionalna je srednjoj snazi potrošenoj u otporniku, koja se može predstaviti kao:

$$P_{sr} = \frac{U_{ef}^2}{R}$$

gde je:

- $P_{sr}$  -srednja snaga potrošena u otporniku,  
 $R$  -otpornost i  
 $U_{ef}$  -efektivna vrednost primenjenog napona.

Sa druge strane imamo da je po definiciji srednja snaga koja se javlja zbog prisustva nekog naizmeničnog napona jednaka srednjoj vrednosti trenutne snage potrošene na otporniku, dobijenoj posmatranjem u toku celog broja perioda naponskog talasnog oblika, što se može prikazati kao:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt$$

gde je :

- $T$  -perioda talasnog oblika a  
 $u^2(t)/R$  -trenutna snaga.

Izjednačavanjem relacija za srednju snagu dobija se efektivna vrednost naizmeničnog napona, izračunata kao kvadratni koren srednje vrednosti kvadrata trenutnih vrednosti napona, unutar periode talasnog oblika napona. Označena je sa  $U_{ef}$  i jednaka je:

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

rešavanjem dobija se da je:

$$U_{ef} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

Neophodno je ponovo ukazati, što se vidi iz definicije, da efektivna vrednost nekog naizmeničnog napona nema simisla osim u slučaju periodičnog naponskog talasnog oblika.

#### 4.19

***Mogu li strujni i naponski transformatori da se ostave neopterećeni?***

- Naponski transformator može.
- Strujni transformator ne može pošto bi se prekomerno zagrevao, a napon na njegovim krajevima porastao bi preko dozvoljene granice.

#### 4.20

***Data je redna veza kondenzatora  $C_1 = 5 \text{ nF}$  i  $C_2 = 80 \text{ nF}$ . Paralelno većem kondenzatoru vezan je voltmetar koji pokazuje  $250 \text{ V}$ . Koliki je napon na krajevima cele sprege?***

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2$$

kod redne veze kondenzatora naboj (opterećenje) na oba kondenzatora je isto odnosno:

$$Q_1 = Q_2$$

iz ovoga sledi:

$$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$$

$$U_1 = C_2 \cdot U_2 / C_1 = 80 \cdot 10^{-9} \cdot 250 / (5 \cdot 10^{-9}) = 4000 \text{ V}$$

$$U = U_1 + U_2 = 250 + 4000 = 4250 \text{ V}$$

Napon sprege je 4250 V.

#### 4.21

*U čemu se sastoji način rada elektrodinamičkog instrumenta?*

- Rad elektrodinamičkog instrumenta zasniva se na delovanju struje koja protiče kroz jedan kalem na struju koja protiče kroz drugi kalem.

#### 4.22

*Kako zavisi skretanje elektrodinamičkog instrumenta od struje i kakve su posledice toga?*

- Skretanje je srazmerno kvadratu struje. To znači da mu je skala kvadratična, da može da meri naizmenične struje i da će mu pokazivanje biti srazmerno efektivnim vrednostima struje bez obzira na njen oblik.

#### 4.23

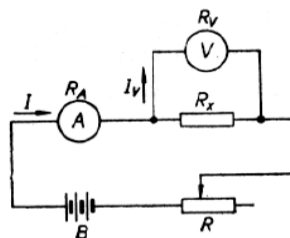
*Šta se sve meri elektrodinamičkim instrumentima?*

- Njihova konstrukcija može se tako podesiti da služe kao ampermetri, voltmetri, vatmetri i  $\cos \varphi$ -metri.

## 5. Merenje otpornosti

### Merenje otpornosti U-I metodom

Ova metoda zasniva se na primeni Omovog zakona. Ako je otpor vezan na izvor napona, onda kroz njega protiče struja  $I = U/R$ . Merenjem struje i napona može se prema tome naći otpor. Međutim, ovde postoje dve mogućnosti vezivanja ampermetra i voltmetra. Oba načina daju izvesnu grešku, pa se merenjem po ovoj metodi uvek čini sistematska greška.



Slika 9.56. Mjerenje djelatnog otpora mjerenjem napona i struje (naponski spoj)

U prvom slučaju struja koju ampermetar pokazuje je zbir struja koje prolaze kroz otpor  $R_x$  i struje koja prolazi kroz voltmetar, mada je potrebno poznavati samo vrednosti struje koja prolazi kroz otpor  $R_x$ . Odatle prolazi da je tačna vrednost otpora u ovom slučaju:

$$R = \frac{U}{I' - I_v}$$

Voltmetar meri stvaran napon koji vlada na krajevima otpora  $R_x$  dok ampermetar meri veću struju od one koja teče kroz taj otpor i jednaku zbiru struja kroz otpor ( $I$ ) i kalem voltmetra ( $I_v$ )

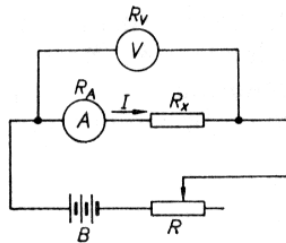
$$I' = I + I_v$$

Računska vrednost otpora ( $R'$ ), dobijena na osnovu rezultata ovog merenja biće uvek manja od stvarne vrednosti otpora:

$$R' = \frac{U}{I'} < R = \frac{U}{I} \quad \text{pošto je} \quad I' > I$$

Apsolutna greška koja se pri takvom merenju čini može se naći kao razlika:

$$\Delta R = R' - R = \frac{R_v R}{R_v + R} - R = \frac{R_v R - R_v R - R^2}{R_v + R} = -\frac{R^2}{R_v + R}$$



Slika 9.57. Mjerenje djelatnog otpora mjerenjem napona i struje (strujni spoj)

U drugom slučaju voltmetar ne meri pad potencijala samo na otporu, već ukupan napon na otporu  $R_x$  i unutrašnjem otporu ampermetra. Odatle izlazi da je tačna vrednost otpora u ovom slučaju:

$$R = \frac{U' - u_a}{I}$$

Gde je sa  $u_a$  označen pad potencijala na ampermetru. Ako sa  $R_a$  označimo unutrašnji otpor ampermetra, sa  $U'$  napon koji meri voltmetar, sa  $R_v$  otpor voltmetra, a sa  $U$  napon koje stvarno vlada na krajevima otpora  $R_x$ , apsolutna greška u ovom slučaju biće:

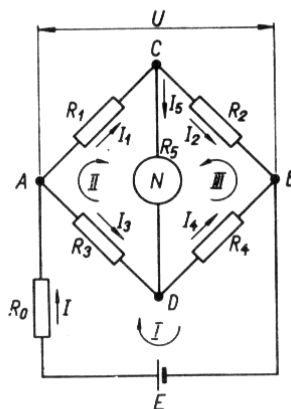
$$\Delta R = R' - R = \frac{U'}{I} - \frac{U}{I} = \frac{U' - U}{I} = \frac{R_a I}{I} = R_a$$

## Vitstonov most (Wheatstone)

Merenje impedanse - otpora pomoću Vitstonovog (Wheatstone) mosta vrši se nultom metodom, i tako, tačnost je velika.

Vitstonov most je merni most sa četiri grane, namenjen merenju otpornosti otpornika koje se nalazi u jednoj grani, dok ostale tri grane čine otpornici od kojih je bar jedan podesiv.





Slika 6.2. Cjelokupni spoj Wheatstoneova mosta

Obično se za tu svrhu uzimaju dekadne kutije otpora. U jednoj dijagonali mosta nalazi se instrument za kontrolisanje struje, a u drugoj dijagonali izvor napona. Izvor može biti, ako se mere omski otpori, galvanski element ili akumulator. Ako se umesto aktivnih otpora upotrebe prividni otpori, mostom se mogu meriti takođe i reaktivni otpori. Tada napajanje treba vršiti naizmeničnom strujom.

Vitstonov most se koristi za pogonska i laboratorijska merenja otpora srednjih i visokih vrednosti. Jačina struje u pojedinim granama zavisi od vrednosti otpora u tim granama, a određenom kombinacijom otpora može se postići da kroz nulindikator ne teče struja. Tada nema pada napona na nulindikatore, pa su jednaki padovi napona na otpornicima  $R_1$  i  $R_3$ , a isto tako i padovi napona na otpornicima  $R_2$  i  $R_4$ :

$$I_1 R_1 = I_3 R_3$$

$$I_2 R_2 = I_4 R_4$$

Zbog  $I_5 = 0$  biće:  $I_1 = I_2$  i  $I_3 = I_4$ , pa sse deljenjem ovih jednačina dobija:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Nepoznati otpor možem se odrediti iz izraza:

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

Vidi se da je za određivanje nepoznatog otpora potrebno poznavati samo jedan od preostala tri otpora ( $R_2$ ) i odnos druga dva otpora ( $R_3/R_4$ ).

Ravnoteža mosta neće se promeniti ako međusobno zamenimo priključke izvora napona i nulindikatora. To je lako uvideti, jer jednačinu uslova ravnoteže možemo preurediti u oblik:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

Promena napona ne utiče na ravnotežu mosta, ipak treba paziti da se izborom prevelikog napona ne preopterećete otpornici u mostu i prouzrokuje promena njihova otpora.

## Primeri:

### 5.1

**Merenjem otpora prema slici 170a (voltmetar ispred ampermetra) izmereno je  $I = 0,5 \text{ A}$ ;  $U' = 15 \text{ V}$ . Naći tačnu vrednost otpora ako se zna da je  $R_a = 0,2 \Omega$ , kao i grešku koja se pri merenju čini?**

- Odgovor:

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U'}{I} = \frac{15}{0,5} = 30 \Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R = \frac{U' - u_a}{I} = \frac{U' - R_a \cdot I}{I} = \frac{U'}{I} - R_a = \frac{15}{0,5} - 0,2 = 29,8 \Omega$$

Relativna greška je:

$$G_{r\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{\frac{U'}{I} - \frac{U' - R_a \cdot I}{I}}{\frac{U' - R_a \cdot I}{I}} \cdot 100 = \frac{R_a \cdot I}{U' - R_a \cdot I} \cdot 100 = \frac{0,2 \cdot 0,5}{15 - 0,2 \cdot 0,5} \cdot 100 = \frac{10}{14,9} = 0,671\%$$

### 5.2

**Ponoviti isti zadatak za slučaj da je otpor ampermetra je  $R_a = 2 \Omega$ , a vrednosti za napon i struju iste.**

- Odgovor:

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U'}{I} = \frac{15}{0,5} = 30 \Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R = \frac{U' - u_a}{I} = \frac{U' - R_a \cdot I}{I} = \frac{U'}{I} - R_a = \frac{15}{0,5} - 2 = 28 \Omega$$

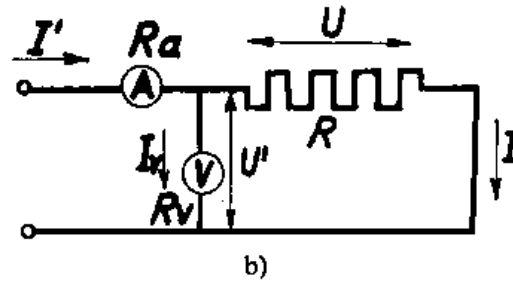
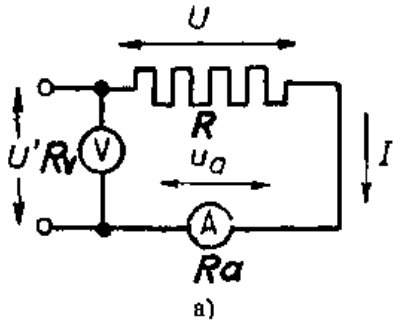
Relativna greška je:

$$G_{r\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{\frac{U'}{I} - \frac{U' - R_a \cdot I}{I}}{\frac{U' - R_a \cdot I}{I}} \cdot 100 = \frac{R_a \cdot I}{U' - R_a \cdot I} \cdot 100 = \frac{2 \cdot 0,5}{15 - 2 \cdot 0,5} \cdot 100 = \frac{100}{14} = 7,143\%$$

### 5.3

**Da li na rezultat merenja po slici 170 a. utiče unutrašnji otpor voltmetra?**

- Odgovor: Ne.



Сл. 170 a, b

#### 5.4

Merenjem otpora prema slici 170b. (ampermetar ispred voltmetra) izmereno je  $I' = 30 \text{ mA}$ ;  $U = 20 \text{ V}$ . Naći tačnu vrednost otpora kao i grešku koja se pri merenju čini. Za merenje napona upotrebljen je univerzalni instrument kod koga je unutrašnji otpor  $20\,000 \Omega/V$  na opsegu od  $60 \text{ V}$ .

- Odgovor:

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U}{I'} = \frac{20}{30 \cdot 10^{-3}} = 666,667 \Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R' = \frac{R \cdot R_v}{R + R_v} \Rightarrow R = \frac{R' \cdot R_v}{R_v - R'} = \frac{666,667 \cdot (60 \cdot 20000)}{60 \cdot 20000 - 666,667} = 667,037 \Omega$$

Unutrašnji otpor instrumenta je  $R_v = 60 \cdot 20000 = 1,2 \text{ M}\Omega$

Relativna greška je:

$$G_{r,\%} = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{666,667 - 667,037}{667,037} \cdot 100 = -0,0555\%$$

#### 5.5

Ponoviti isti zadatak pod 4 za slučaj upotrebe voltmetra sa  $100 \Omega/V$  a na opsegu od  $300 \text{ V}$ .

- Odgovor:

Unutrašnji otpor instrumenta je  $R_v = 300 \cdot 100 = 30 \text{ k}\Omega$

Izmerena vrednost je:

$$R' = \frac{U}{I'} = \frac{20}{30 \cdot 10^{-3}} = 666,667 \Omega$$

Tačna vrednost je:

$$R' = \frac{R \cdot R_v}{R + R_v} \Rightarrow R = \frac{R' \cdot R_v}{R_v - R'} = \frac{666,667 \cdot (300 \cdot 100)}{300 \cdot 100 - 666,667} = 681,819 \Omega$$

Relativna greška je:

$$G_r\% = \frac{R' - R}{R} \cdot 100 = \frac{666,667 - 681,819}{681,819} \cdot 100 = -2,222\%$$

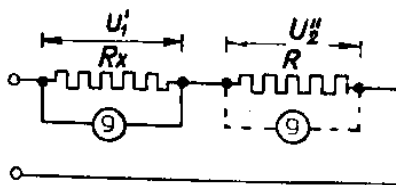
### 5.6

Da li na rezultat merenja pod 4 i 5 utiče unutrašnji otpor ampermetra?

- Odgovor: Ne.

### 5.7

Metodom voltmetra i poznatog otpora (sl.171) izmereni su napon na poznatom i nepoznatom otporu i pri tome dobijena sledeća skretanja: na poznatom otporu  $\alpha = 30^\circ$ , a na nepoznatom  $\alpha_1 = 50^\circ$ . Ako je vrednost poznatog otpora  $3 \text{ k}\Omega$ , a unutrašnji otpor voltmetra  $3000 \text{ }\Omega/\text{V}$  na skali od  $20 \text{ V}$ , naći vrednost nepoznatog otpora i relativnu grešku koja je pri tome načinjena.



- Odgovor:

Pad potencijala na nepoznatom otporu  $R_x$  je:

$$U_1' = R_x \cdot I$$

Pad potencijala na poznatom otporu  $R$  je:

$$U_2' = R \cdot I$$

Pretpostavimo da je:

$$\frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v} + R \approx R_x + \frac{R \cdot R_v}{R + R_v}$$

Iz toga sledi da se struja u kolu ne menja prilikom prebacivanja voltmetra sa jednog otpora na drugi.

$$I_1; I_2 \ll I$$

Napon na otporniku  $R_x$  je:

$$U_1 = R_v \cdot I_1$$

Napon na otporniku  $R$  je:

$$U_2 = R_v \cdot I_2$$

Odnos između struja je sledeći:

$$I_1 = I \cdot \frac{R_x}{R_v + R_x} \quad I_2 = I \cdot \frac{R}{R_v + R}$$

Sa ovom smenom su naponi:

$$U_1 = R_v \cdot I_1 = R_v \cdot I \cdot \frac{R_x}{R_v + R_x}$$

$$U_2 = R_v \cdot I_2 = R_v \cdot I \cdot \frac{R}{R_v + R}$$

$$R_{xt} = R \cdot \frac{U_1'}{U_2}$$

$$R_{xm} = R \cdot \frac{U_1}{U_2} = 3 \cdot 10^3 \cdot \frac{30}{50} = 1.8 \cdot 10^3 \Omega$$

$$R_v = 20 \cdot 3000 = 60 \text{ k}\Omega$$

Relativna greška je:

$$G_{r\%} = \frac{R_{xm} - R_{xt}}{R_{xt}} = \frac{R \cdot \frac{U_1}{U_2} - R \cdot \frac{U_1'}{U_2'}}{R \cdot \frac{U_1'}{U_2'}} = \frac{\frac{U_1}{U_2} - \frac{U_1'}{U_2'}}{\frac{U_1'}{U_2'}} = \frac{R_v \cdot I \cdot \frac{R_x}{R_v + R_x} - \frac{I \cdot R_x}{R}}{\frac{I \cdot R_x}{R}} =$$

$$= \frac{\frac{R_x \cdot (R_v + R)}{R \cdot (R_v + R_x)} - \frac{R_x}{R}}{\frac{R_x}{R}} = \frac{(R_v + R)}{(R_v + R_x)} - 1 = \frac{(R - R_x)}{(R_v + R_x)} = \frac{3000 - 1800}{60000 + 1800} = 1.942\%$$

## 5.8

**Ponoviti zadatak pod 7 kad su skretanja bili  $\alpha = 30$  podeoka, a  $\alpha_1 = 28$  podeoka!**

- Odgovor:

Vrednost merenog otpora je

$$R_{xm} = R \cdot \frac{\alpha}{\alpha_1} = 3 \cdot 10^3 \cdot \frac{30}{28} = 3,214 \cdot 10^3 \Omega$$

$$G_{r\%} = \frac{(R - R_x)}{(R_v + R_x)} \cdot 100 = \frac{3000 - 3214}{60000 + 3214} \cdot 100 = -0.339\%$$

## 5.9

**Izračunati sistematsku grešku merenja otpornosti U-I metodom za oba moguća spoja, ako je unutrašnja otpornost voltmetra  $R_v = 10 \text{ k}\Omega$ , unutrašnja otpornost ampermetra  $R_a = 2 \Omega$ , mereni otpor  $R = 100 \Omega$ . Nacrtati izabranu šemu merenja, gde je sistematska greška merenja manja!**

**Számítsa ki az ellenállás U-I módszerrel történő mérésének rendszeres hibáját mindkét lehetséges kapcsolás esetére, ha a voltméter belső ellenállása  $R_v = 10 \text{ k}\Omega$ , amperméter belső ellenállása  $R_a = 2 \Omega$ , a mért ellenállás pedig  $R = 100 \Omega$ . Rajzolja le a kiválasztott sémát, ahol a mérés rendszeres hibája kisebb.**

Odgovor:

U slučaju naponske veze apsolutna vrednost greške je:

$$G_{a1} = -\frac{R^2}{R + R_v} = -\frac{100^2}{100 + 10000} = -0,990 \Omega$$

U slučaju strujne veze apsolutna vrednost greške je:

$$G_{a2} = R_a = 2 \Omega$$

Treba odabrati naponsku vezu. (slika 170 b)

### 5.10

*Izračunati sistematsku grešku merenja otpornosti U-I metodom za oba moguća spoja, ako je unutrašnja otpornost voltmetra  $R_v = 50 \text{ k}\Omega$ , unutrašnja otpornost ampermetra  $R_a = 0,5 \Omega$ , mereni otpor  $R = 200 \Omega$ . Nacrtati izabranu šemu merenja, gde je sistematska greška merenja manja!*

*Számítsa ki az ellenállás U-I módszerrel történő mérésének rendszeres hibáját mindkét lehetséges kapcsolás esetére, ha a voltméter belső ellenállása  $R_v = 50 \text{ k}\Omega$ , amperméter belső ellenállása  $R_a = 0,5 \Omega$ , a mért ellenállás pedig  $R = 200 \Omega$ . Rajzolja le a kiválasztott sémát, ahol a mérés rendszeres hibája kisebb.*

Odgovor:

U slučaju naponske veze apsolutna vrednost greške je:

$$G_{a1} = -\frac{R^2}{R + R_v} = -\frac{200^2}{200 + 50000} = -0,7968 \Omega$$

U slučaju strujne veze apsolutna vrednost greške je:

$$G_{a2} = R_a = 0,5 \Omega$$

Treba odabrati strujnu vezu. (slika 170 a)

### 5.11

*Voltmetrom je izmeren napon na priključcima idealnog naponskog generatora  $U_1 = 18 \text{ V}$ . Ako se sa voltmetrom povezuje na red otpornik  $R = 8 \text{ M}\Omega$  (serijsa kombinacija priključena na naponski generator), voltmetar pokazuje  $U_2 = 10 \text{ V}$ . Koliki je  $R_v$ , unutrašnji otpor voltmetra?*

*Az ideális feszültséggenerátor voltméterrel mért kapcsolófeszültsége  $U_1 = 18 \text{ V}$ . Ha a voltméterrel sorbakapcsolunk  $R = 8 \text{ M}\Omega$  ellenállást (a feszültséggenerátorra ellenállások soros kapcsolását kötöttük) a műszer mutatása  $U_2 = 10 \text{ V}$ . Határozzuk meg a voltméter  $R_v$ , belső ellenállását!*

• Odgovor:

$$I = \frac{U_1}{R + R_v} \quad U_2 = I \cdot R_v$$

$$U_2 = \frac{U_1}{R + R_v} \cdot R_v \Rightarrow R_v = R \frac{U_2}{U_1 - U_2} = 8 \cdot 10^6 \frac{10}{18 - 10} = 10 \cdot 10^6 \Omega = 10 \text{ M}\Omega$$

### 5.12

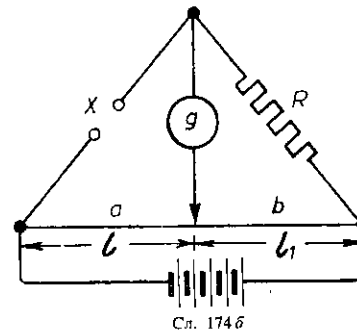
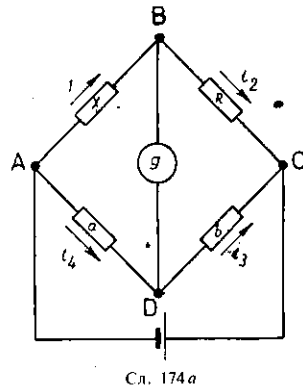
*Kakve vrste Vitstonovih mostova imamo?*

• Odgovor:

Sa kliznom žicom, to jest promenljivim odnosom  $R_a/R_b$ , a stalnim otporom  $R$ , i most sa promenljivim otporom  $R$  a stalnim odnosom  $R_a/R_b$ .

### 5.13

*Merenjem na Vitstonovom mostu prema slici 174b, nađena je ravnoteža pri  $l = 0,3 \text{ m}$  i  $l_1 = 0,4 \text{ m}$ . Ako je otpor  $R = 2000 \Omega$ , naći koliko iznosi  $R_x$ !*



- Odgovor:

$$R_x = R \cdot \frac{R_a}{R_b} = R \cdot \frac{l}{l_1} = 2000 \cdot \frac{0,3}{0,4} = 1500 \Omega$$

### 5.14

*Odnos otpora  $R_a/R_b$  je 3. Ako se mesto nepoznatog otpora stavi 600  $\Omega$ , naći vrednost otpora  $R$  na koji treba postaviti dekadnu kutiju da bi most bio u ravoteži!*

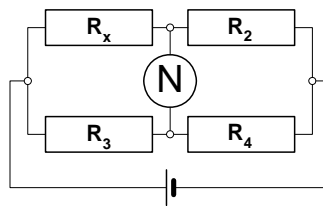
- Odgovor:

$$R_x = R \cdot \frac{R_a}{R_b} \Rightarrow R = R_x \cdot \frac{R_b}{R_a} = 600 \cdot \frac{1}{3} = 200 \Omega$$

### 5.15.

*Vitstonov most je u ravnoteži. Koliki je otpor  $R_x$ , ako je:  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$  a  $U = 15 V$ .*

*A Wheatstone híd egyensúlyban van. Mekkora  $R_x$ , ha:  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$  és  $U = 15 V$ .*



$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_4} = \frac{20 \cdot 30}{40} = 15 \Omega$$

## 6. Merenje snage

Trenutna vrednost snage je umnožak trenutne vrednosti struje i napona.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Snaga u slučaju jednosmerne struje pri naponu  $U$  i struji  $I$  može se dati sledećim umnoškom:

$$P = U \cdot I$$

U slučaju sinusnih funkcija pretpostavljajući napon efektivne vrednosti  $U$  i struje efektivne vrednosti  $I$  aktivna snaga je:

$$P = U \cdot I \cos \varphi,$$

reaktivna snaga je:

$$Q = U \cdot I \sin \varphi$$

a prividna snaga je:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

gde je  $\varphi$  fazna razlika između napona i struje, a  $\cos \varphi$  je faktor snage. U slučaju kompleksnih periodičnih signala aktivnu i reaktivnu snagu mogu da stvaraju samo komponente napona i struje iste frekvencije prema sledećem izrazu:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i I_i \cos \varphi$$

odnosno

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} U_i I_i \sin \varphi$$

gde  $i$  označava redni broj harmonijskih komponenti.

U slučaju višefaznih sistema snaga pojedinih faza može se sumirati prema sledećoj formuli:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k$$

gde je  $P_k$  snaga  $k$ -te faze, a  $n$  je broj faza.

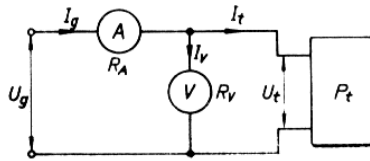
Zajednička osobina ovih definicija je da se temelje na matematičkoj operaciji množenja.

## Merenje snage kod jednosmerne struje

Merenje snage pomoću ampermetra i voltmetra. Postoje dve mogućnosti za vezu instrumenata. Snaga koja se dobije množenjem izmerenog napona i struje, veća je od prave snage za sopstvenu potrošnju instrumenta bližem opterećenju.

U prvom slučaju:

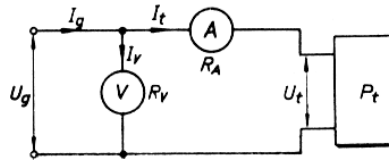




Slika 9.22. Mjerenje snage istosmjerne struje ampermetrom i voltmetrom koji je spojen na mjereni teret

$$P_t = U_t \cdot I_t = U_t (I_g - I_v) = U_t \cdot I_g - \frac{U_t^2}{R_v}$$

U drugom slučaju:

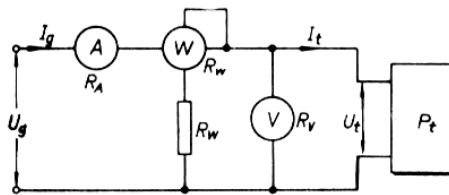


Slika 9.23. Mjerenje snage istosmjerne struje ampermetrom i voltmetrom koji je spojen na izvor

$$P_t = U_t \cdot I_t = (U_g - I_t R_A) I_t = U_g I_t - I_t^2 R_A$$

Izbor načina spajanja zavisi od otpornosti potrošača.

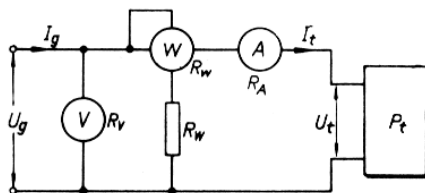
Prilikom direktnog merenja snage pomoću vatmetra takođe su moguća dva načina spajanja



Slika 9.24. Mjerenje snage vatmetrom čija je naponska grana spojena na mjereni teret

Naponska grana vatmetra može se spojiti ili na stezaljku potrošača ili na stezaljku izvora. Snaga potrošača prema slici 9.24 je:

$$P_t = P_w - \left( \frac{U_t^2}{R_v} + \frac{U_t^2}{R_w} \right)$$



Slika 9.25. Mjerenje snage vatmetrom čija je naponska grana spojena na izvor

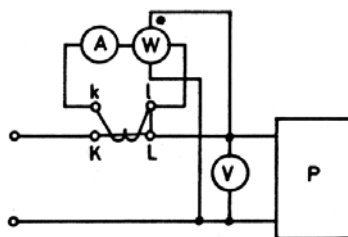
prema slici 9.25:

$$P_t = P_w - I_t^2(R_w + R_A)$$

Smer skretanja kazaljke vatmetra zavisi od redosleda priključivanja naponskih i strujnih stezaljki vatmetra. Ako zamenimo redosled naponskih stezaljki promeniće se smer skretanja kazaljke. To vredi i za strujne stezaljke. Isto tako će promena smera toka energije dovesti do promene smera skretanja kazaljke. Mjerenje snage pomoću elektrodinamičkih vatmetara primenjuje se na području nižih frekvencija.

## Merenje snage upotrebom strujnih transformatora

Strujni namotaj vatmetra i ampermetar se nalaze u sekundarnom krugu strujnog transformatora. Naponski namotaj vatmetra i voltmetar se priključuju direktno na napon.



3.6.16 ábra

Sekundarni namot strujnog transformatora se nalazi na neodređenom potencijalu koja može da bude i opasno visok. Dva namotaja vatmetra treba da se nalaze na približno istom potencijalu. Ovo određivanje potencijala izvršeno je vezom između  $L$  i  $I$  polova strujnog transformatora.

## Merenje aktivne snage pomoću dva vatmetra (Aronov spoj)

Trenutna vrednost snage u trofaznom sistemu može se odrediti sabiranjem trenutnih vrednosti snage pojedinih faza.

$$P_{mom} = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3$$

U trofaznom sistemu bez nulprovodnika suma struja sve tri faze u svakom trenutku mora biti nula!

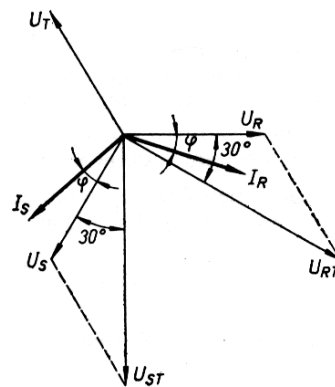
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$-i_3 = i_1 + i_2$$

$$P_{mom} = e_1 i_1 + e_2 i_2 - e_3 (i_1 + i_2)$$

$$P_{mom} = i_1 (e_1 - e_3) + i_2 (e_2 - e_3)$$

$$P = P_1 + P_2$$



Slika 9.35. Vektorski dijagram Aro-nova spoja za mjerenje djelatne snage

$$P_1 = I_R U_{RT} \cos(30^\circ - \varphi)$$

$$P_2 = I_S U_{ST} \cos(30^\circ + \varphi)$$

$$\cos(30^\circ - \varphi) = \cos 30^\circ \cos \varphi + \sin 30^\circ \sin \varphi$$

$$\cos(30^\circ + \varphi) = \cos 30^\circ \cos \varphi - \sin 30^\circ \sin \varphi$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = 0,5$$

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

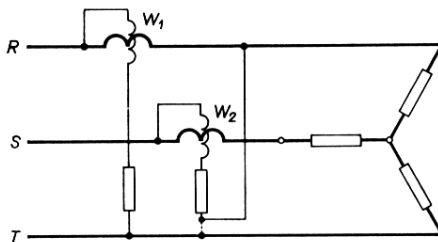
$$P_1 - P_2 = UI \sin \varphi$$

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{UI \sin \varphi}{\sqrt{3} UI \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi$$

označimo:  $\xi = \frac{P_2}{P_1}$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)^2}}$$

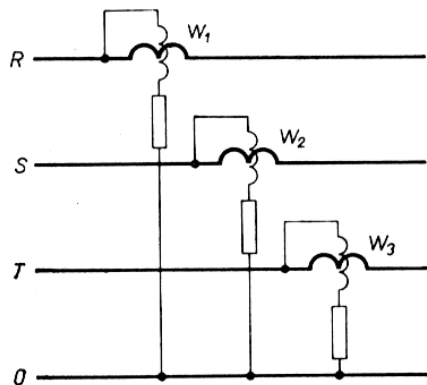
Očitavanja na vatmetrima treba numerički sabirati ili oduzimati, zavisno od faktora snage opterećenja. Kada ni približno nije poznat faktor snage moguće su zablude. Zbog toga treba voditi računa o pravilnom priključivanju, tj. mora se voditi računa o vremenskom redosledu faza, i o tome, koje su dovodne stezaljke na naponskoj i strujnoj grani vatmetra.



Slika 9.38. Kontrola pravilnog priključivanja vatmetara u Aronovu spoju

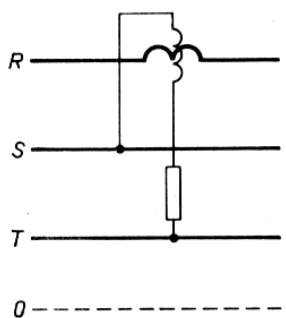
Kontrola pravilnosti priključivanja provodi se na sledeći način: Vatmetri  $W_1$  i  $W_2$  spoje se tako da imaju pozitivan otklon. Jedan od njih će pri tom dati manji otklon. Neka je to vatmetar  $W_2$ . Njegova naponska grana se odvoji od one faze u kojoj nema strujnih grana vatmetra i uključi u onu granu u kojoj je strujna grana drugog vatmetra. Ako je njegov otklon i sada pozitivan, vatmetar je bio ispravno spojen i njegovo je očitavanje trebalo pribrojati očitavanju na drugom vatmetru. Ako je obratno treba ga odbiti.

## Merenje aktivne snage trofaznih sistema metodom triju vatmetara

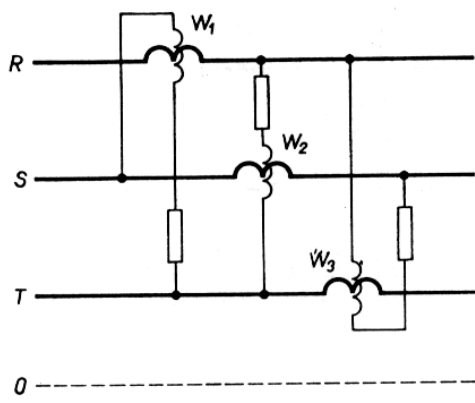


Slika 9.40. Mjerenje djelatne snage metodom triju vatmetara

## Mjerenje reaktivne snage u trofaznim sistemima



Slika 9.42. Mjerenje jalove snage trofaznog simetričnog tereta metodom jednog vatmetra



Slika 9.43. Mjerenje jalove snage metodom triju vatmetara

Merenje reaktivne snage u trofaznim sistemima može se izvesti pomoću jednosistemskih instrumenata koji mere reaktivnu snagu (varmetara), spajajući ih onako kako se spajaju vatmetri pri merenju aktivne snage u trofaznim sistemima.

Merenje reaktivne snage u trofaznim simetričnim sistemima je moguće i pomoću vatmetara, ako se njihova naponska grana priključi na napon fazno pomeren za  $90^\circ$  prema naponu koji bi imala naponska grana pri merenju aktivne snage.

U slučaju merenja reaktivne snage prema slici 9.43. reaktivna snaga trofaznog sistema se određuje prema izrazu:

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{3}}(P_{XR} + P_{XS} + P_{XT})$$

## Primeri:

### 6.1

***Zašto se merenje snage jednosmerne struje razlikuje od merenja snage kod naizmjenične struje?***

- Odgovor: Zato što kod naizmjenične struje može da nastupi fazni pomeraj između struje i napona, dok kod jednosmerne struje te pojave nema.

### 6.2

***Koje vrste snage naizmjenične struje razlikujemo i kako glase njihove jedinice?***

- Odgovor: Razlikujemo prividnu, aktivnu i reaktivnu snagu. Jedinice za njihovo merenje su : VA, Var i W.

### 6.3

***Koje slučajeve opterećenja trofaznog sistema poznajemo?***

- Odgovor: Slučaj simetričnog i nesimetričnog opterećenja.

### 6.4

***Koje slučajeve merenja snage jednosmerne struje poznajemo?***

- Odgovor: Kad je napon mreže stalan i kada nije stalan. U prvom slučaju može se upotrebiti običan ampermetar, a u drugom se merenje mora vršiti pomoću ampermetra i voltmetra ili, pak, pomoću vatmetra.

### 6.5

***Merenjem snage u simetričnom trofaznom sistemu 220/380 nađeno je da ona iznosi 2,2 kW. Ako je faktor snage  $\cos\varphi = 0,8$  naći struju svake faze!***

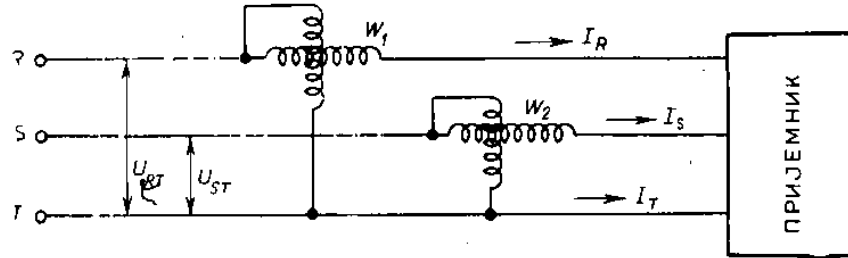
- Odgovor:

$$P = 3UI \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{P}{3U \cos \varphi} = \frac{2200}{3 \cdot 220 \cdot 0,8} = 4,167 \text{ A}$$

$$I_R = I_S = I_T = 4,167 \text{ A}$$

6.6

Dokazati da u slučaju simetričnog omskog opterećenja (to jest kada je  $\varphi = 0$ ) svaki vatmetar u Aronovoj sprezi (sl. 221) pokazuje polovinu od ukupne snage  $P_u$  koji neki sistem odaje.

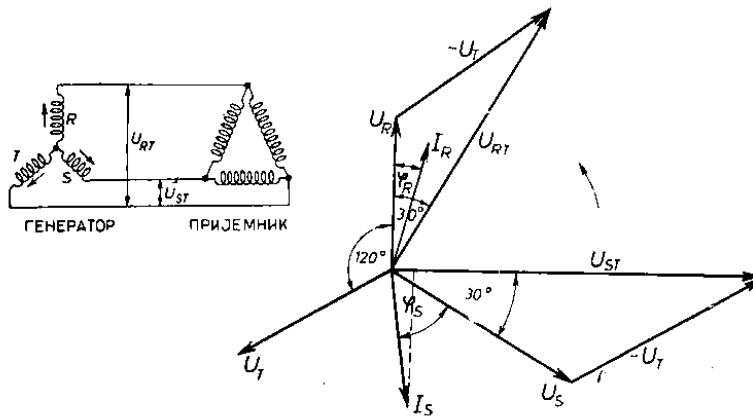


Сл. 221

• Odgovor:

Prema slici 222 vatmetar  $W_1$  meri snagu:

$$P_1 = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{RT} \cdot I_R = \frac{3}{2} U_R \cdot I_R = \frac{1}{2} P_u$$



Сл. 222

Slično prednjem biće i za vatmetar  $W_2$ :

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{ST} \cdot I_S = \frac{3}{2} U_S \cdot I_S = \frac{1}{2} P_u$$

6.7

Trofazni sistem je nesimetrično opterećen. Za merenje su upotrebljena dva vatmetra prema Aronovoj sprezi (sl. 221). Jedan od njih pokazuje 450 W a drugi 900 W. Kolika je snaga koju sistem troši?

Odgovor:

$$P_u = P_1 + P_2 = 450 + 900 = 1350 \text{ W}$$

6.8

Za trofazno nesimetrično opterećenje kod koga je  $I_T = I_S = 10$ ,  $I_R = 14,14$  A i  $\varphi_R = \varphi_T = 30^\circ$ , a  $\varphi_S = 60$ , nacrtati dijagram napona i struje za slučaj Aronove sprege prema slici 221 i objasniti kakvo će biti skretanje svakog vatmetra. Ako je napon mreže 220/380, naći snagu koju pokazuje svaki vatmetar, kao i ukupnu snagu sistema!

Odgovor:

Vatmetar  $W_1$  meri snagu:

$$P_1 = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - \varphi_R) = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - 30^\circ) = 380 \cdot 14,14 \cdot \cos 0 = 5373,2 \text{ W}$$

Vatmetar  $W_2$ :

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + \varphi_S) = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + 60^\circ) = 380 \cdot 10 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$P_u = P_1 + P_2 = 5373,2 + 0 = 5373,2 \text{ W}$$

## 6.9

*Nacrtati dijagram napona i struja za slučaj simetričnog opterećenja trofaznog sistema 220/380 kod koga je,  $P_1=803 \text{ W}$ , a  $P_2=1893 \text{ W}$ , a veza vatmetra izvedena prema slici 221. Naći jačine struje ako je faktor snage  $\cos\varphi = 0,819$ !*

Odgovor:

$$\varphi = \arccos(0,819) = \pm 35^\circ$$

$$\varphi = -35^\circ$$

Vatmetar  $W_1$  meri snagu:

$$P_1 = U_{RT} \cdot I_R \cos(30^\circ - \varphi) \Rightarrow I_R = \frac{P_1}{U_{RT} \cdot \cos(30^\circ - \varphi)} = \frac{800}{380 \cdot \cos(65^\circ)} = 5 \text{ A}$$

Vatmetar  $W_2$ :

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_S \cos(30^\circ + \varphi_S) \Rightarrow I_S = \frac{P_2}{U_{ST} \cdot \cos(30^\circ - 35^\circ)} = \frac{1893}{380 \cdot \cos(-5^\circ)} = 5 \text{ A}$$

## 6.10

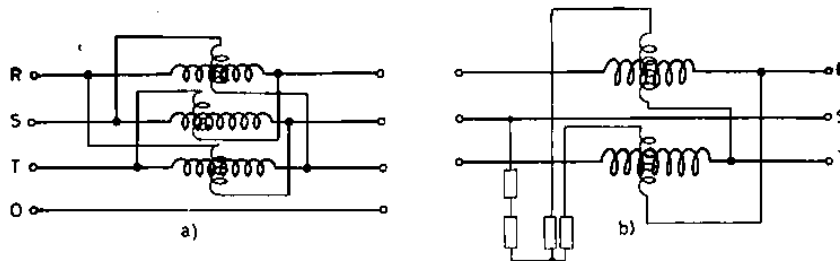
*Pri vezama prema slici 221 vatmetar II skreće na suprotnu stranu i pri tome pokazuje  $P_2=250 \text{ W}$ , dok vatmetar I skreće u pravom smeru i pokazuje  $P_1=3000 \text{ W}$ . Koliku snagu troši sistem?*

Odgovor:

$$P = P_1 - P_2 = 3000 - 250 = 2750 \text{ W}$$

## 6.11

*Naći koliku će snagu pokazati pojedini vatmetri ako su uključeni prema slici 227 za merenje reaktivne snage kad je sistem simetrično opterećen, pri čemu je  $I_R = I_T = I_S = 10 \text{ A}$ , a  $\varphi_R = \varphi_T = \varphi_S = 30^\circ$ . Napon mreže je 220/380 V. Naći ukupnu snagu sistema!*



Сл. 227 а, б

Odgovor:



$$P_1 = U_{ST} \cdot I_R \cdot \sin \varphi = 380 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 1900 \text{ W}$$

$$P_u = \sqrt{3}P_1 = \sqrt{3} \cdot 1900 = 3291 \text{ W}$$

### 6.12

**Izvršiti proveru gornjeg rezultata upotrebom vatmetara za reaktivnu snagu!**

Odgovor:

Svaki vatmetar bi izmerio reaktivnu snagu u svojoj fazi

$$P_1 = P_2 = P_3 = U_R \cdot I_R \cdot \sin \varphi = 220 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 1100 \text{ W}$$

$$P_u = 3P_1 = 3 \cdot 1100 = 3300 \text{ W}$$

### 6.13

**Naći kolika se ušteta čini pri overavanju vatmetra metodom prividnih vata! Overavanje se vrši na podeoku 3 kW vatmetra predviđenog za nominalni napon od  $U = 220 \text{ V}$ . Pri metodi prividnih vata upotrebiće se za napajanje strujnog kalema akumulatorska baterija od  $U_{aku.} = 4 \text{ V}$ . Opor naponskog kalema je  $R_U = 5000 \Omega$ .**

Odgovor:

Ako bi se radilo na običan način, pri naponu od 220 V, trošila bi se snag od 3000 W. Po metodi prividnih vata biće potrebno:

Utrošak snage za naponski kalem iznosi:

$$P_U = \frac{U^2}{R_U} = \frac{220^2}{5000} = 9,68 \text{ W}$$

Za strujni kalem:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{3000}{220} = 13,636 \text{ A}$$

$$P_I = I \cdot U_{aku.} = 13,636 \cdot 4 = 54,54 \text{ W}$$

Ušteta električne energije iznosi:

$$\frac{P - P_I - P_U}{P} \cdot 100 = \frac{3000 - 9,68 - 54,54}{3000} \cdot 100 = 97,859 \%$$

### 6.14

**Merenjem snage po Aronovoj sprezi u simetrično opterećenom tofaznom sistemu nađeno je  $P_1 = 3500 \text{ W}$  i  $P_2 = 2600 \text{ W}$ . Koliki je fazni pomeraj?**

Odgovor:

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3} \cdot UI \cos \varphi$$

$$P_1 - P_2 = UI \sin \varphi$$

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{UI \sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot UI \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{3} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{3} \cdot \frac{3500 - 2600}{3500 + 2600} \right) = 14,33^\circ$$

$$\cos \varphi = 0,969$$

$$\varphi = 14,33^\circ$$

### 6.15

**Aktivna snaga koju neki sistem troši iznosi  $P = 4000 \text{ W}$  dok je reaktivna  $Q = 3000 \text{ VAr}$ . Koliki je fazni pomeraj?**

Odgovor:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{3000}{4000} = 0,75$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,75 = 36,87^\circ$$

$$\cos \varphi = 0,8$$

### 6.16.

**Izračunati aktivnu snagu  $P_t$ , prividnu snagu  $S_t$ , reaktivnu snagu  $Q_t$  i faktor snage  $\cos \varphi$  monofaznog tereta. Merenje snage se vrši poluindirektnom metodom. Prenosni odnos strujnog transformatora  $a_i = 2$ , sekundarna struja  $I_2 = 4 \text{ A}$ , fazni napon  $U_{1N} = 230 \text{ V}$  a vatmetrom izmerena snaga  $P = 800 \text{ W}$ .**

**Az egyfázisú terhelés teljesítményét félindirekt módszerrel mérjük. Az áramváltó áttétele  $a_i = 2$ , a szekunder tekercsén folyó árama  $I_2 = 4 \text{ A}$ , a fázisfeszültség  $U_{1N} = 230 \text{ V}$  és a wattmérrel mért hatásos teljesítmény  $P = 800 \text{ W}$ . Határozzuk meg a terhelés hatásos teljesítményét  $P_t$ , látszólagos teljesítményét  $S_t$  és meddő teljesítményét  $Q_t$ , valamint a  $\cos \varphi$  teljesítménytényezőt!**

- Odgovor:

$$P_t = a_i \cdot P = 2 \cdot 800 = 1600 \text{ W}$$

$$S_t = a_i \cdot I_2 \cdot U_{1N} = 2 \cdot 4 \cdot 230 = 1840 \text{ VA}$$

$$Q_t = \sqrt{S_t^2 - P_t^2} = \sqrt{1840^2 - 1600^2} = 908,625 \text{ VAr}$$

$$\cos \varphi = \frac{P_t}{S_t} = \frac{1600}{1840} = 0,8696$$

### 6.17.

**Snaga simetričnog trofaznog tereta izmerena je metodom dva vatmetra, linijska struja je  $8 \text{ A}$ , linijski napon je  $190 \text{ V}$  i fazni ugao je  $10/19 \text{ rad}$ . Odrediti snagu trofaznog tereta i pokazivanje pojedinih vatmetara.**

**Egy szimmetrikus háromfázisú fogyasztó teljesítményét két wattmérővel mérjük. A vonaláram  $8 \text{ A}$ , a vonalfeszültség  $190 \text{ V}$ , a fázisszög pedig  $10/19 \text{ rad}$ . Meghatározni a fogyasztó teljesítményét és mennyit mutatnak az egyes wattmérők.**

- Odgovor:

$$P = \sqrt{3} \cdot UI \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 190 \cdot 8 \cdot \cos(10/19) = 2276,415 \text{ W}$$

$$(10/19) \text{ rad} = \frac{10}{19} \cdot \frac{360}{2\pi} = 30,156^\circ$$

$$P_1 = UI \cos(30 - \varphi) = 190 \cdot 8 \cdot \cos(30 - 30,156) = 1519,994 \text{ W}$$

$$P_2 = UI \cos(30 + \varphi) = 190 \cdot 8 \cdot \cos(30 + 30,156) = 756,413 \text{ W}$$