Mérések

3. Előadás

A mérőműszerek (alkalmazási) karakterisztikái

Normális feltételek meghatározzák a mért nagyság határait, amelyek között a berendezés alkalmazható.

Határfeltételek a mért nagyság azon határértékei amelyeknél a műszer még nem károsodik (degradálódik)

Referenciafeltételek pontosan megadott feltételek amelyek mellett kell a méréseket-hitelesítéseket elvégezni

A mérőműszerek metrológiai tulajdonságai

A mérőműszerek metrológiai tulajdonságai elvileg: a mérési folyamatba kapcsolt műszer képességeinek és korlátainak kvalitatív és kvantitatív mutatói.

a metrológiai jellemzők feloszthatók:

- STATIKUS KARAKTERISZTIKÁK és

  állandó, vagy lassan változó nagyságok
- DINAMIKUS KARAKTERISZTIKÁK.

  gyorsanváltozó nagyságok esetén

Mérési tartomány

A mérési tartomány azoknak a mérendő mennyiség értékeknek az összesége, amelyeknél a mérőeszköz hibájának az előírt határok között kell lennie.

A dinamikus mérési tartomány meghatározható mint a legnagyobb és legkisebb mérhető érték viszonya. Például, ha a minimális érték 1 mA, a maximális pedig 1 A akkor I_{max}/I_{min} = 1000. Ez a tartomány kifejezhető dB (decibelben), azaz 20 log (I_{max}/I_{min}). Esetünkben a mérési tartomány 60 dB.

A mérőeszközök statikus karakterisztikái

- Egy mérőeszköz statikus karkterisztikái statikus kalibrációval határozhatók meg (egy mérési folyamattal) amit periódikusan meg kell ismételni. A kalibráció alatt, ismert és állandó bemenő jel mellett, megfigyeljük az eredményezett válaszfüggvényt.

- A mérőeszköz statikus karakterisztikái: pontosság, precizitás, felbontóképesség, linearitás, érzékenység, érzéktelenségi küszöb, stabilitás, ismételhetőség, hiszterézis, bemenő és kimenő impedancia.

Pontosság Tačnost (accuracy)

A mérőeszköz pontossága a mérőeszköznek az a tulajdonsága, hogy a mérendő mennyiség valódi értékéhez közeli értékmutatást vagy választ szolgáltat.

Általában a pontos értéket nem ismerjük, így konvencionális valódi, vagyis gyakran megegyezés alapján elfogadott értéket használjuk.

Az utóbbi időben a pontosság helyett a mérési bizonytalanságot definiáljuk. (*measurement uncertainity*)

Mérési bizonytalanság

A mérési eredményhez társított paraméter, amely a mérendő mennyiségnek megalapozottan tulajdonítható értékek szóródását jellemzi.

Míg a pontosság az ideális statikus karakterisztikáktól való eltérést definiálja, a mérési bizonytalanság magába foglalja a rendszeres és a véletlen hibákat is

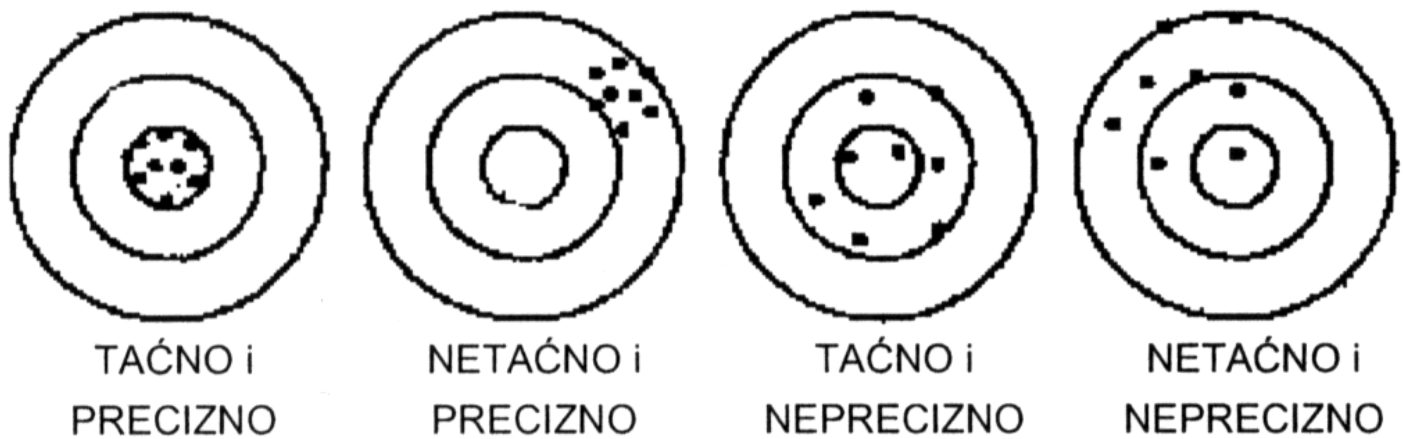
Precizitás

A mérőeszköz precizitása a mérőeszköz azon tulajdonsága, hogy egymáshoz közeli értékeket mutasson.

A precizitás legjobb mutatója a szórás. A szórás statisztikai mértékmutatója a mérés megismételhetőségének és a következő a definiciója:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Amint az ábrán is látható, fontos különbséget tenni a pontosság és a precizitás között.



Felbontóképesség
(értékmutató szerkezeté)

Az értékmutató szerkezet által megjelenített és egyértelműen megkülönböztethető értékmutatások legkisebb különbsége.

A felbontóképesség a mérőeszköz azon tulajdonsága, hogy meg tud egymáshoz közeli értékeket különböztetni.

Analóg műszer esetén a legkisebb skálabeosztás a felbontóképesség, digitális értékmutató szerkezet esetén ez az utolsó értékes jegy egységnyi megváltozásának megfelelő változás az értékmutatásban.

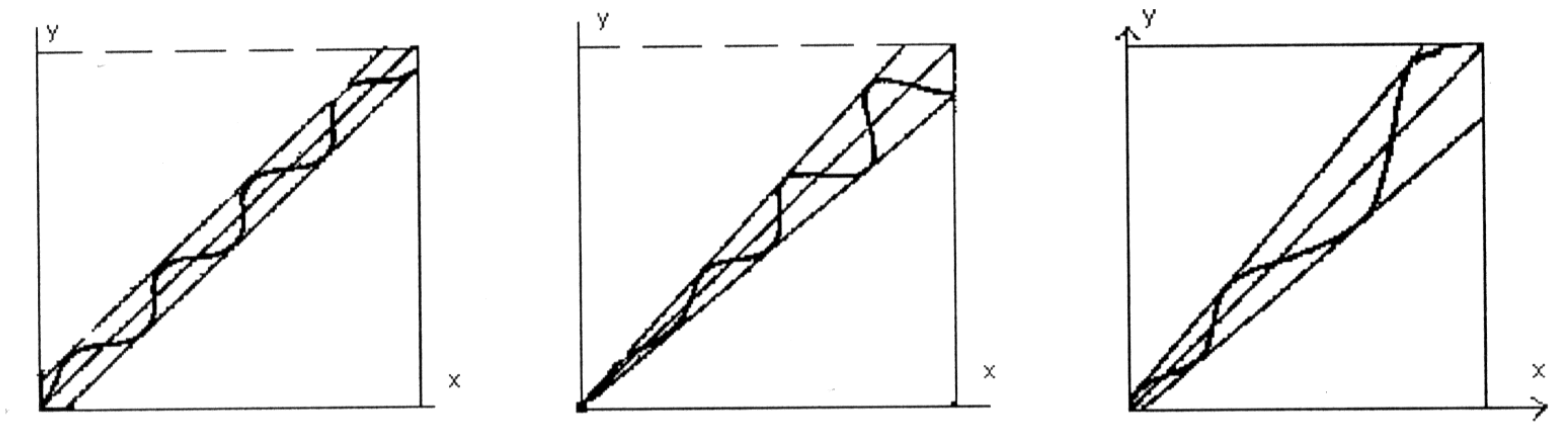
Fontos dolog a felbontást a méréstartományhoz viszonyítva definiálni, például 1 mV, U = 135 V-hoz viszonyítva. Gyakran ezt az arányt mint a legkisebb érték és a méréstartomány arányát definiálják, illetve a minimális elmozdulást mint a skála százalékát. Digitális műszereknél az utolsó számjegy mértékegysége a számjegyek számához viszonyítva.

Linearitás

A mérőműszer azon tulajdonsága hogy a válaszfüggvényt mint a bemeneti jel lineáris funkcióját generálja.

A kimenő jel bemenő jeltől való viszonyától függően a következő fajta linearitásokat sorolhatjuk fel:

- a bemenő jeltől független linearitás
- a bemenő jellel arányos linearitás és
- a bemenő jellel részben arányos linearitás.



A linearitás hibája a mérőeszköz válaszfüggvényének maximális eltérése az optimális egyenestől, melyet a kalibrációs pontokon keresztül húztunk meg.

A linearitási hiba definiciója:

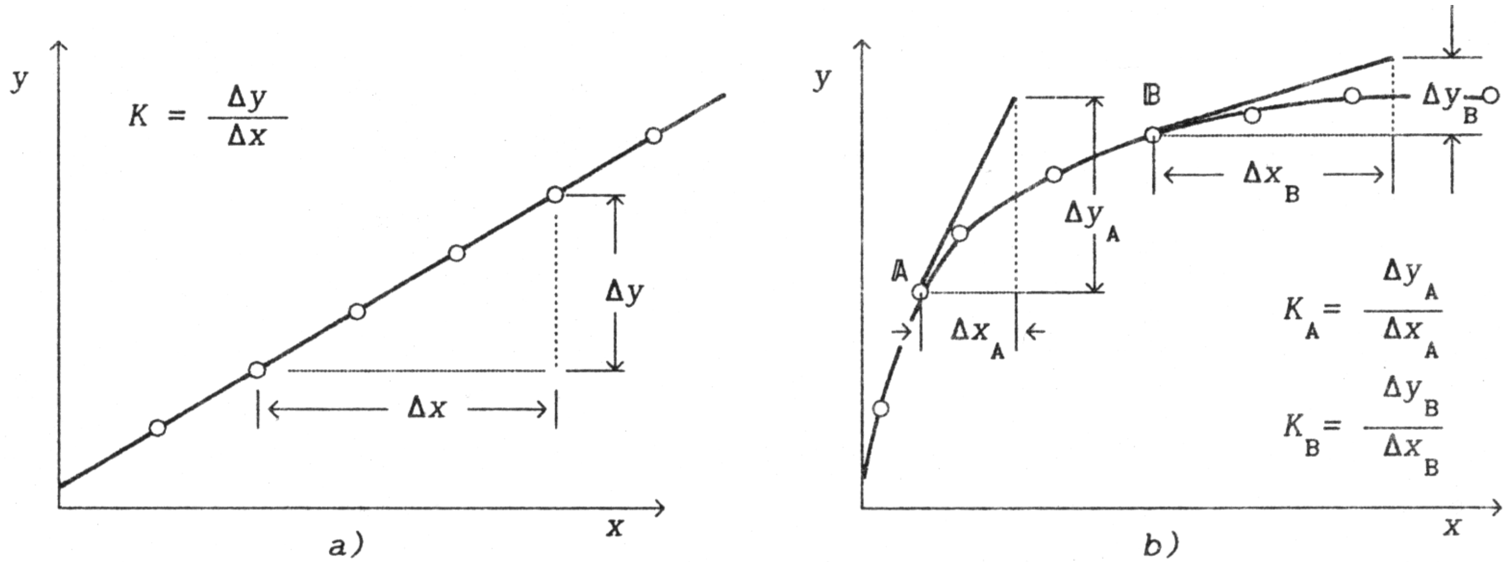
$$G_i = \frac{\max\left|y_i - \left(ax_i + b\right)\right|}{y_{\max}} * 100$$

ahol y_i a válaszfüggvény i-edik lemért értéke x_i bemenet esetén, y_{max} a válaszfüggvény maximális mérhető értéke, a és b az optimális egyenes függvényének álandói.

Érzékenység

A mérőeszköz kimenőjelének megváltozása osztva a bemenőjel megfelelő megváltozásával.

Az így definiált érzékenységet statikus érzékenységnek nevezzük, és a statikus kalibráció adataiból határozható meg. Az érzékenységet a kalibrációs görbe meredeksége képviseli, ha a koordináták valós mértékegységekben adottak. Ha a kalibrációs görbe lineáris, a ***K*** érzékenység állandó, viszont amennyiben a bemenő és a kimenő jel viszonya nem lineáris, az érzékenység a bemenő jel függvényében változik.



Slika 3.6. Osetljivost a) linearnog i b) nelinearnog mernog sredstva

A mérőeszköz érzékenysége a kimenőjel megváltozása osztva a bemenőjel megfelelő megváltozásával.

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Érzéktelenségi küszöb

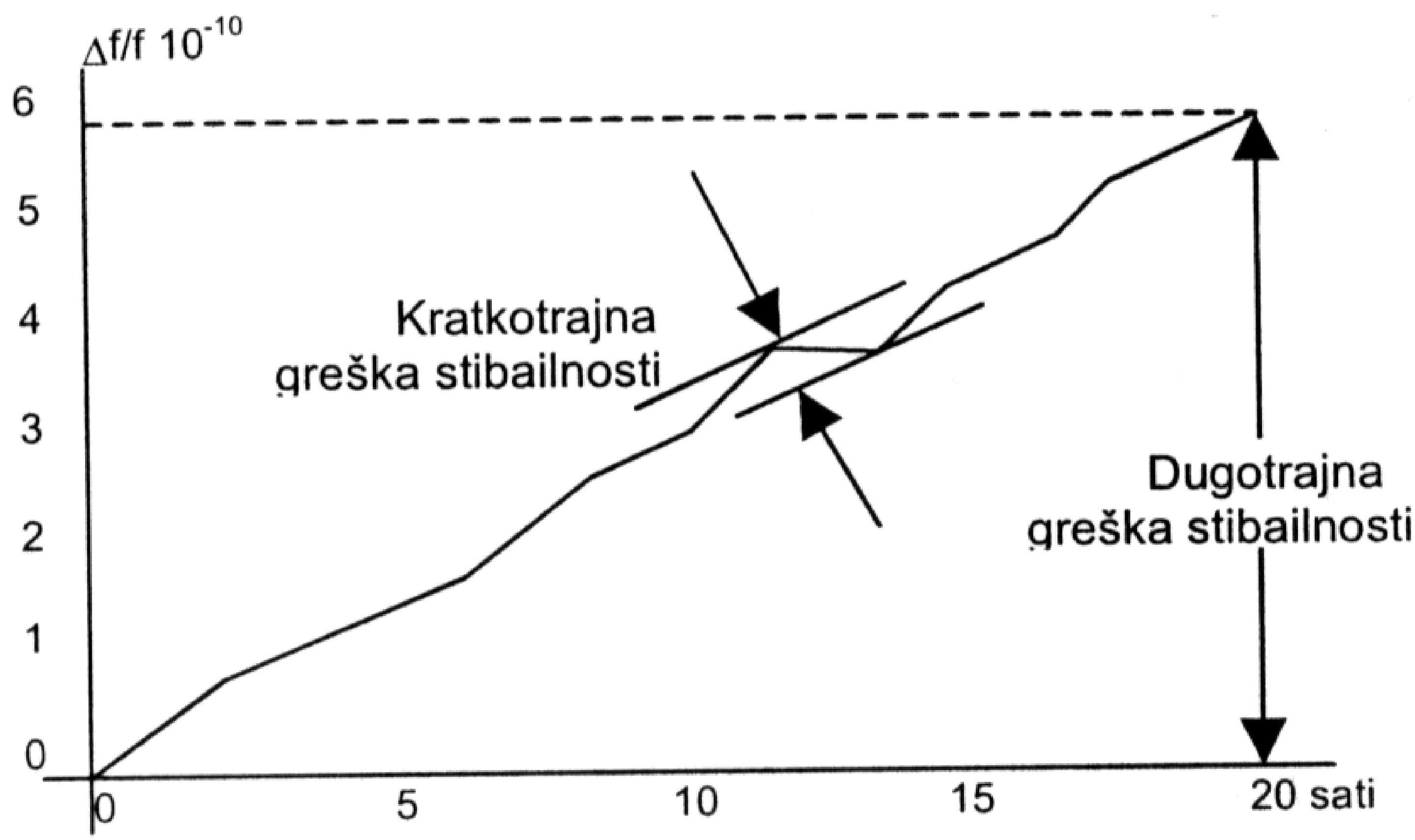
A bemenőjel lehetséges legnagyobb lassú és monoton változása, amely még nem idéz elő érzékelhető változást a mérőeszköz kimenőjelében.

Mennyiségileg az érzéktelenségi küszöb definiálható mint a felbontás és a legkisebb mérési tartomány szorzata. Például 4 számjegyes digitális votmérőnél melynél a legkisebb mérőtartomány 100 mV, a felbontás 1/10000, az érzéktelenségi küszöb 100 mV/10000 = 0,01 mV.

Stabilitás

A mérőeszköznek az a képessége, hogy metrológiai jellemzőit időben folyamatosan megőrzi.

A berendezés stabilitása definiálható különböző változások függvényében, de mindenek előtt az időbeni változásokra vonatkozik. Léteznek hosszútávú és rövidtávú stabilitási hibák. Például $2 \cdot 10^{-8}$ évente, vagy a rövidtávú hiba $1 \cdot 10^{-10}$ tíz másodpercre.



Δf/f 10^-10
6
5
4
3
2
1
0
Kratkotrajna
greška stibailnosti
Dugotrajna
greška stibailnosti
0
5
10
15
20 sati

Ismétlőképesség (mérőeszközé)

A mérőeszköznek az a képessége, hogy azonos mérendő mennyiséget azonos feltételek között ismételten megmérve egymáshoz közeli értékmutatásokat ad.

Az ismétlőképesség elemzésekor azt a kimeneti hibát elemezzük amit akkor kapunk, amikor a bemenetre precizen ugyanazt az értéket vezetjük.

A megismételhetőségi hibát a válaszfüggvény maximális és minimális értéke közötti különbségként definiáljuk, ugyanannak a bemenőjelnek, legalább ötszöri, egymásutáni alkalmazásakor. Az egész mérési tartományra vonatkoztatva.

$$G_p(\%) = \frac{x_M - x_m}{x_{\max}} \cdot 100$$

ahol:

- x_M -a válaszfüggvény maximális értéke
- x_m -a válaszfüggvény minimális értéke, és a
- x_{max}-a mérési taromány teljes értéke, teljes skálaérték.

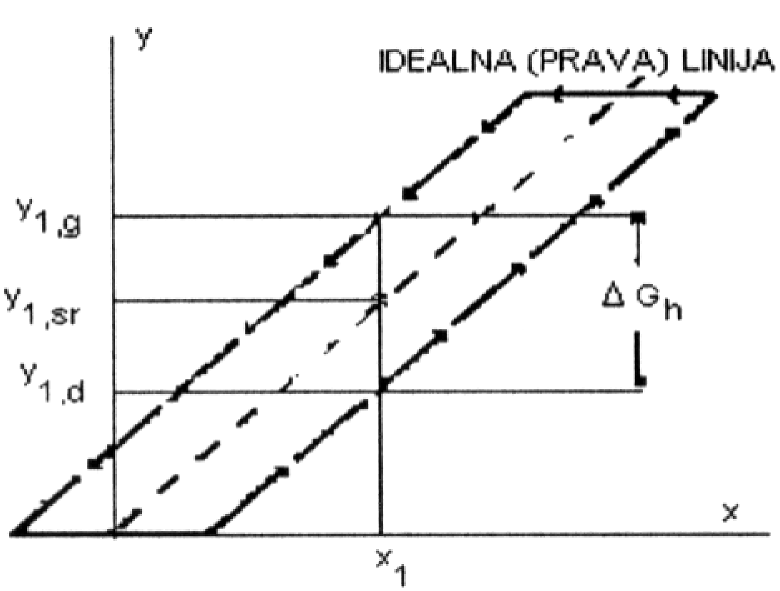
Hiszterézis

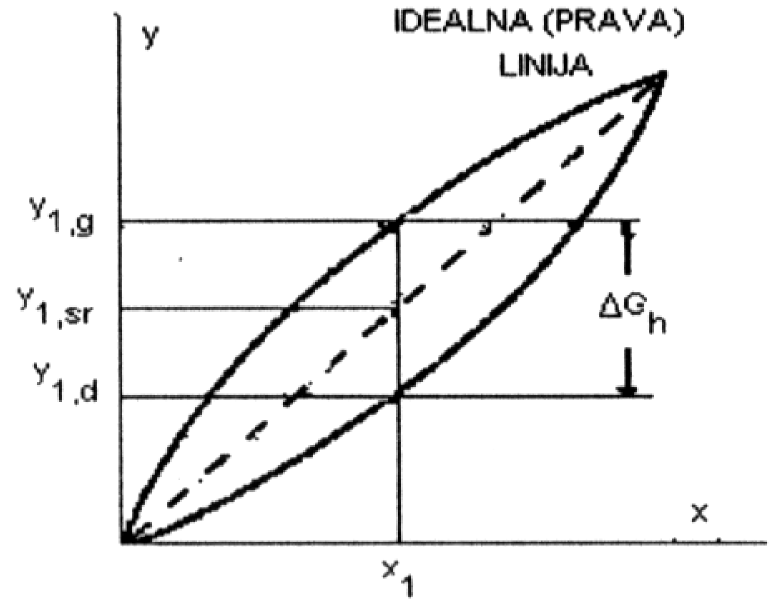
A mérőeszköz hiszterézise a mérőeszköz olyan tulajdonsága, hogy a bemenőjelre adott válaszfüggvény függ az előző bemenőjelek sorrendjétől.

A hiszterézis egy olyan jelenség amely a műszer (előnytelen) hibás értékmutatásához vezet a mért bemenőnagyság változásának módjától függően a mérés alatt. A hiszterézis mértéke, a kapott kimenőjelek közötti maximális különbség ugyanarra a bemenőjelre.

$$G_H = \frac{y_g - y_d}{y_{\max}} \cdot 100$$

ahol $\boldsymbol{y_g}$ és $\boldsymbol{y_d}$ a kimenőjel lemért értékei ugyanarra a bemenőjelre.


y
IDEALNA (PRAVA) LINIJA
$y_{1,g}$
$y_{1,sr}$
$y_{1,d}$
ΔG_h
x
x_1


y
IDEALNA (PRAVA)
LINIJA
$y_{1,g}$
$y_{1,sr}$
$y_{1,d}$
ΔG_h
x
x_1

A mérőeszköz bemenő impedanciája

egy komplex terhelés, mely a bemenetre kapcsolt feszültség és a bemeneten befolyó áram hányadosával egyenlő. Ez az adat az adott mérőeszközt jellemzi a mért vagy kivizsgált hálózatban.

Számunkra a mérőeszköz bemeneti impedanciája és a mérték kimenő impedanciája a szükséges adat.

Dinamikus karakterisztikák

Ha egy mérőelem a vezérlőrendszer része, általában nem elegendő leírni csak a statikus karakterisztikáival, figyelembe kell venni a dinamikus karakterisztikákat is.

A műszer modellje, azaz a matematikai kifejezés, amely összeköti a bemenetet a kimenettel, közelíthető a bemenőjel differenciálhányadosainak lineáris kombinációjával.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = b_0 x$$

n azt határozza meg hanyadrendű az átviteli funkció

A nulladik rendű rendszer nem visz be semilyen hibát a mérésbe függetlenül a bemeneti jel változásának gyorsaságától. Más szavakkal, a kimenőjelnek nincs semilyen késése, sem pedig torzulása összehasonlítva a bemenő jellel.

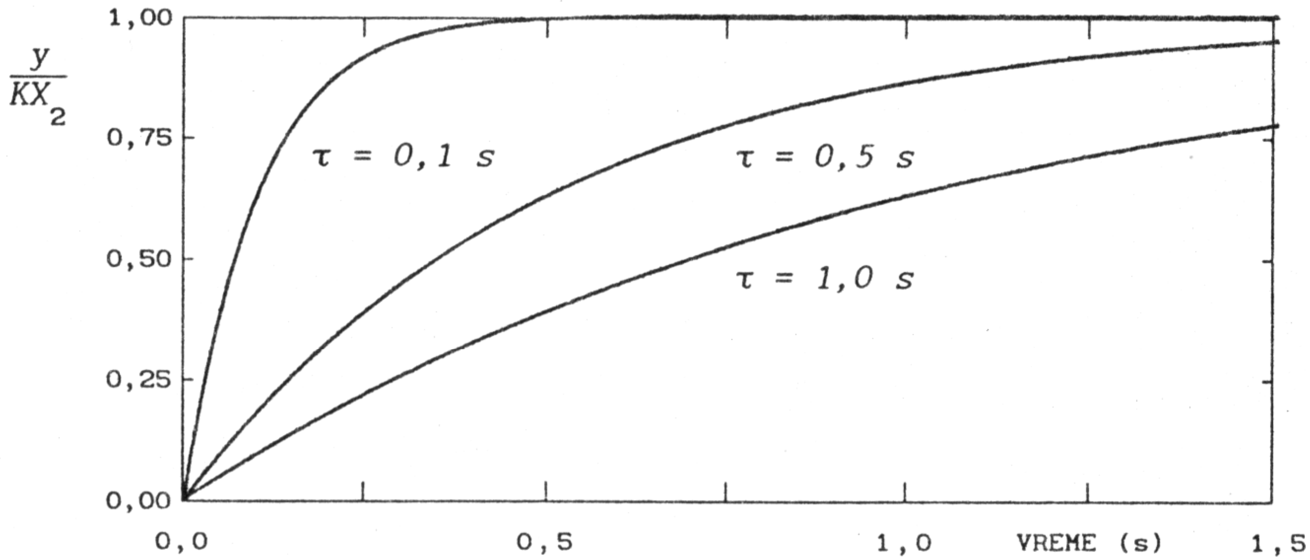
$\boldsymbol{n}$ = 0 nulladik rendű, azaz:

$$y = \frac{b_0}{a_0} x$$

a $\boldsymbol{b_0/a_0}$ koeficienst statikus érzékenységnek nevezzük.

Ha $\boldsymbol{n}$ = 1, elsőrendű átviteli funkciót kapunk, azaz:

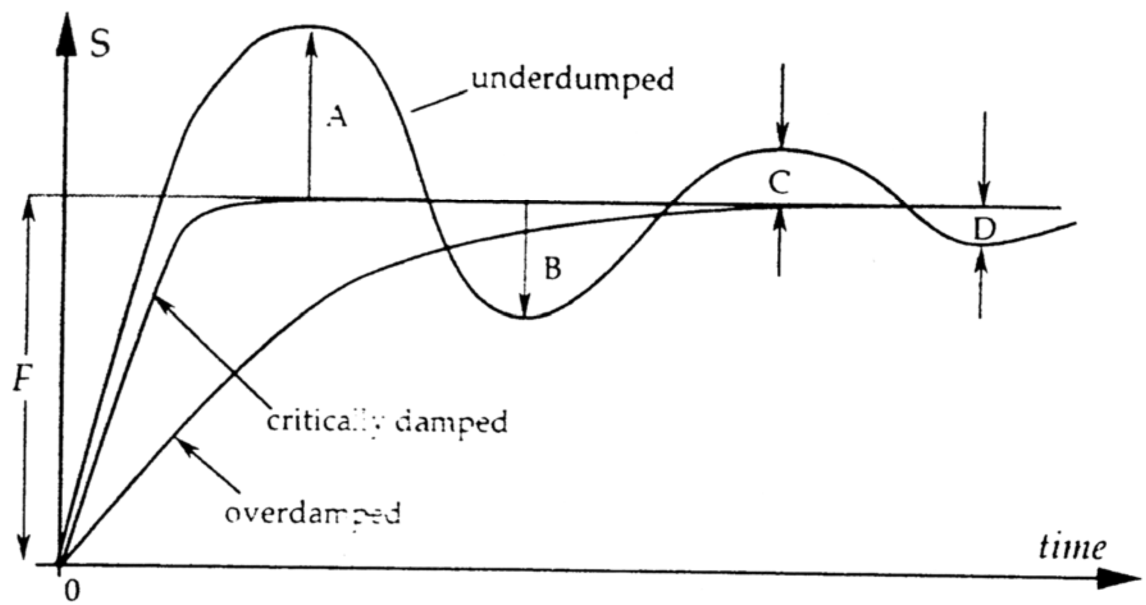
$$\frac{a_1}{a_0}\frac{dy}{dx} + y = \frac{b_0}{a_0}x$$



Slika 3.13. Odziv mernog sredstva prvog reda na odskočnu funkciju za različite vremenske konstante

Ha $\boldsymbol{n}$ = 2, másodrendű rendszert figyelhetünk meg (gyakori eset a méréseknél), így:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x$$



A méréseredmények statisztikai feldolgozása

Egy állandó értékű fizikai nagyságon elvégzett méréssorozat eredményeinek feldolgozásakor a feladat többszörös:

- megbecsülni a mért nagyság valódi érétékét,
- megbecsülni a korrigált érték mérési bizonytalanságát.

A mérési átlag mentesítése (korrigálása) az ismert rendszeres hibáktól, azaz a hibák rendszeres komponensének meghatározása, a mérési tapasztalatok alapján, valamint a mérőeszköz kalibrálásával történik.

Ugyanazon, állandó fizikai nagyság azonos feltételek mellett történő sorozatos mérésekor, olyan műszerrel melynek elég nagy a felbontása, egymástól eltérő eredményeket kapunk. Ha feltételezhetjük hogy a rendszeres hibákat teljesen kiküszöböltük, statisztikai elemzéssel megkapható a mért nagyság legvalószínűbb valódi (pontos) értéke, és a mérési bizonytalanság. A következő fogalmakat kell definiálni:

- a mérési sorozat átlaga,
- a szórás,
- a méréssorozat átlagértékének a szórása.

A mérési sorozat eredményeinek átlaga

Ha a mérési sorozat eredményeit mentesítjük a durva, és a rendszeres hibáktól, akkor az egyes méréseredmények között jelentkező különbségek a véletlen hibák következménye. Ha az egyes eredményeket:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

jelöljük, csak annyit állapíthatunk meg hogy a mérendő nagyság valódi értéke $\boldsymbol{x_0}$ valahol a sorozat legkisebb és a legnagyobb értéke között helyezkedik el.

Amennyiben az egyes mérések hibáját Δx_i -el jelöljük:

$$\Delta x_i = x_i - x_0$$

akkor az adott méréssorozatban a következő, véletlenszerű, abszolút értékű hibák sorozatát kapjuk:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0$$

$$\ldots$$

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

Az egyenletek bal és jobb oldalait összeadva a következő egyenletet kapjuk:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot x_0$$

ahonnan a mért nagyság valódi értéke

$$x_0 = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) - \frac{1}{n}\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n\right)$$

Az egyenlőségjel jobb oldalán az első tag a mérési sorozat átlagával egyenlő tehát:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$$

azaz

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ezekután felírható hogy a mért nagyság valódi értéke:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

Illetve

$$x_0 = \bar{x} - \varepsilon$$

ahol ε az egyes méréseknél jelentkező abszolút hibák értékének átlaga.

Az egyenlet a következő alakban írható:

$$x_0 = \bar{x} \pm |\varepsilon|$$

Tanulmányozva a véletlen hibák hatását a mérés eredményére, Gauss véletlen hibákról szóló elmélete szerint, a következő, axiómáknak is tekinthető, feltevésekből kell kiindulni.

1. Ha a méréssorozat nagyszámú mérésből áll, egyenlő valószínűséggel jelennek meg azonos abszolút értékű de ellentétes előjelű hibák.
2. A kisebb hibák megjelenésének valószínűsége nagyobb a nagy hibák megjelenésének valószínűségénél.

Az első feltételezés alapján megállapítható hogy elegendő nagy számú mérés esetén ε nullához közelít.

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon \to 0$$

amiből az következik, hogy:

$$x_0 \approx \overline{x}$$

és ez azt jelenti hogy a méréssorozat átlaga a mért nagyság legvalószínűbb értéke. Tehát, megállapítható, hogy a méréssorozat átlaga, a mért nagyság pontos értékének legjobb közelítése.

A populáció és minta átlaga

A méréssorozat átlaga a megfigyelt, vagy mért nagyság egy meghatározott számú értékre vonatkozik, két definiciót ismerünk.

Az első esetben ha ez a szám nagyon nagy, elméletileg, ha a méréssorozat a mért nagyság végtelen sokszor megismételt mérésének eredményeit tartalmazza, akkor **populációról** beszélünk. Ha az aritmetikai középérték definicióját populációra alkalmazzuk, akkor a populáció aritmetikai középértékéről beszélünk.

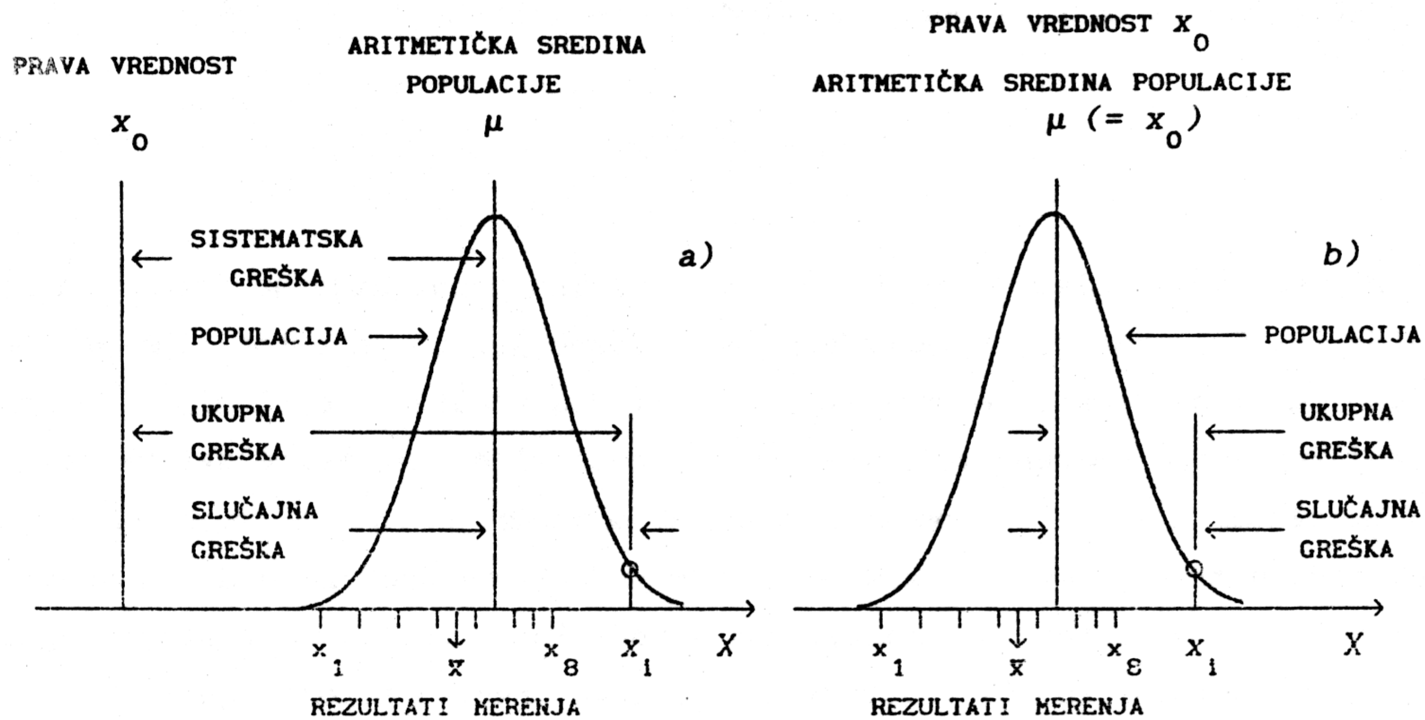
A populáció-alapsokaság, olyan vizsgálni kívánt egyedek, objektumok, tárgyak vagy más tetszőleges elemek véges vagy végtelen összessége, amelynek közös megfigyelhető jellemzői vannak. A kutatás célja, hogy jellemezzük és következtetéseket vonjunk le róla.

A második esetben a méréssorozat korlátozott számú eleme csak a populáció mintáját képezi.

A minta a populáció relative kis méretű kiragadott része valamilyen előírás szerint válogatva, úgy hogy teljes egészében képviselje a populációt és annak minden jellemzőjét. Az ilyen reprezentativ mintát véletlen mintavételezéssel biztosítjuk. A méréssorozat méréseinek száma ezáltal korlátozott, legtöbb esetben néhányszor tíz.

Ha az átlagot mintára alkalmazzuk a minta átlagáról beszélünk.

A statisztika feladata hogy a minta matematikai feldolgozásával megbecsülje a populáció jellemzőit, amelyből a minta származik, azaz ismert minta alapján megbecsülni a populáció ismeretlen paraméterének értékét.



Slika 6.1. Greška merenja a) u prisustvu sistematskih grešaka, b) pri eliminisanim sistematskim greškama

A 6.1 képen a méréshibák ábrázolása látszik, feltételezve a véletlen hibák normális eloszlását.

1. A hibák ábrázolása a rendszeres hibák jelenlétében,
2. A hibák ábrázolása a rendszeres hibák (kiküszöbölése)eltávolítása után

Az első esetben a mért nagyság valódi értéke nem egyezik meg a populáció átlagával, a rendszeres hibával tér el tőle. Az egyes mérések hibája egyenlő a rendszeres-, és a véletlen hiba összegével.

Szórás (standardna devijacija)

A mérés precizitásának becslésére a szórást használjuk, más néven szórási paraméter, vagy a négyzetes eltérések átlagértéke.

Definició:

A szórás az a hiba, amely, ha méréssorozat összes ***n*** mérésénél jelentkezne, ugyanazt a hibanégyzet összeget adná mint a valódi hibák négyzetének összege.

Így definiáljuk a szórást nagy számban megismételt méréssorozatra, melyre állíthatjuk hogy a mérések száma végtelen felé tart, σ-val jelöljük és az előbbi definició alapján érvényes a következő összefüggés:

$$n\sigma^2 = (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \ldots + (x_n - x_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2$$

Ahonnan:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2$$

A σ^2 -tel jelölt fogalmat szórásnégyzetnek hívjuk. A szórásnégyzet *(varijansa ili disperzija)* a statisztika egyik leggyakoribb mérőszáma, “kvadratikus középérték”. A középértéktől való eltérések négyzetének középértéke .

A szórást a következő képlettel számíthatjuk:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$$

melynek jelentős előnye a szórásnégyzettel szemben hogy a mért nagysággal megegyező a mértékegysége, másfelől a szórásnégyzet aditivitása miatt előnyt élvez a számításoknál.

Hogy definiálhassuk a szórást azon adatokkal amelyeket a mérési folyamat alatt begyüjthetünk, kapcsolatot kell találni a valódi méréshibák, $\Delta x_i = x_i - x_0$, és a látszólagos méréshibák, között melyeket a következőképpen definiálunk:

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

a szórás képlete ***s***, ugynazon nagyság ***n*** elemű méréssorozatára.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

illetve:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

A gyakorlatban, igen praktikus az alábbi képlet használata a szórás meghatározására:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]}$$

A populáció és a minta szórása

(Standardna devijacija populacije i uzorka)

Gyakran találkozunk az “egy mérés szórása” kifejezéssel helyesen: **A mérési sorozat egy mérésének szórása** mely vonatkozik úgy a σ, mint az ***s*** képletére is. Ezzel azt szeretnék kihangsúlyozni hogy ezen statisztikai érték egy mérésre vonatkozik illetve hogy minden egyes elvégzett mérés jellemzője. Ez az elnevezés azonban kétértelmű és zavaró mivel a szórás éppen egy méréssorozat jellemzője és nem az egyedi méréseké! A szórás egy méréssel nem határozható meg, a meghatározás csak méréssorozattal érhető el. A szórás azt a mérést írja le amit majd elvégezünk, vagy valamely már elvégezett mérésre vonatkoztatható.

A populáció szórását a következő képlettel definiáljuk:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

amelyben a mérések száma ***N*** nagyon nagy és statisztikailag közelít a végtelenhez, a mért nagyság valódi értéke $\boldsymbol{x_0}$, helyett a populáció átlagával μ. rendelkezünk.

A minta szórását a következő képlettel definiáljuk:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

ahol a minta átlaga képezi mérések eredményének átlagát ami statisztikailag ugyanaz.

A középérték szórása

(Standardna devijacija aritmetičke sredine)

Tudvalévő a mérések átlagáról, hogy az különbözik a mért nagyság pontos értékétől $\boldsymbol{x_0}$ a mérés hibájával ε.

Ismerve a véletelen hibák természetét, nyilvánvaló, hogy ez a hiba a mérések ***n*** számának növekedésével csökkeni fog. Bár máris kijelenthető hogy a méréseredmények aritmetikai középértékének mérési bizonytalansága kisebb bármely egyenkénti mérés bizonytalanságától, ez a becslés levezethető.

Feltételezve hogy az egyes abszolút hibák nagyon kicsik, felírható:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}$$

látható hogy az átlag hibája a mérések számának ***n***-nek négyzetgyökével csökken.

Ezt a hibát az átlag szórásának nevezzük

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2}$$

$$x_0 = \bar{x} \pm \left| \frac{s}{\sqrt{n}} \right| = \bar{x} \pm \left| s_{\bar{x}} \right|$$