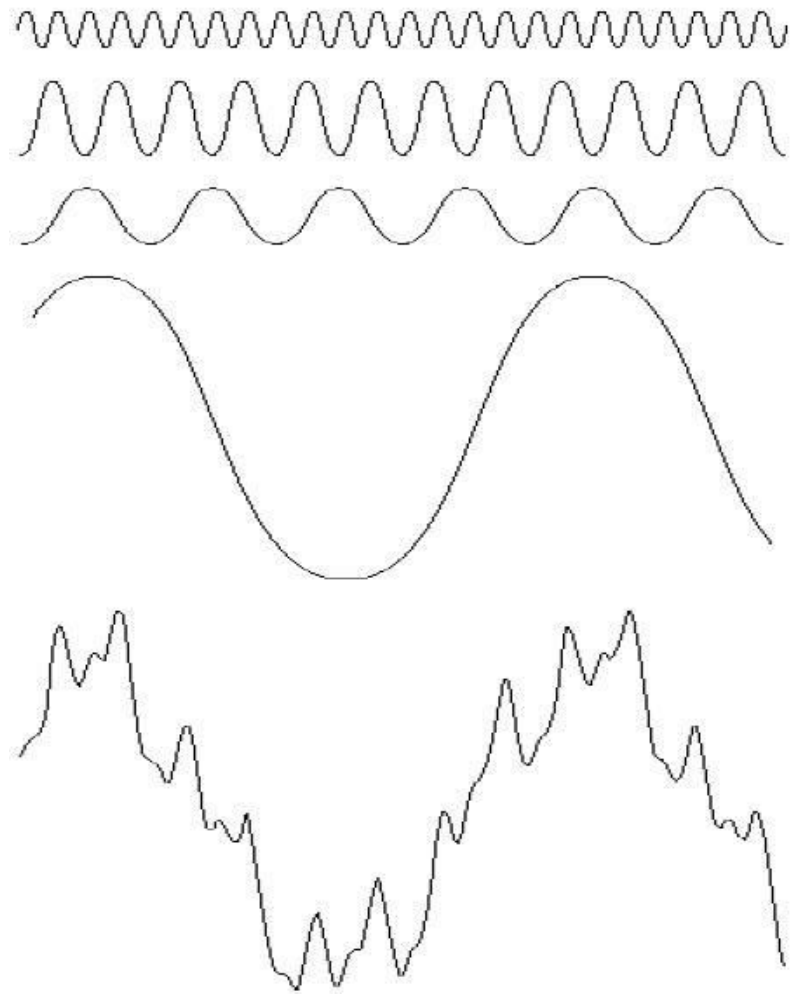


Képjavítás a frekvenciatarományban

Fourier transzformáció

"Matematikai lencse" amely a függvényt a frekvenciák alapján bontja fel

Kép esetén, a 2D Fourier transzformációt használjuk melynek segítségével a 2D spektrumot nyerjük



2D DFT transzformáció

A 2D DFT definíciója

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$
$$u = 0, 1, \dots, M-1, \quad v = 0, 1, \dots, N-1$$

Az inverz 2D DFT definíciója

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$
$$x = 0, 1, \dots, M-1, \quad y = 0, 1, \dots, N-1$$

2D DFT transzformáció

Amplitúdó, fázis- és teljesítmény spektrum 2D-ben

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

$$\phi(u, v) = \arctan \left(\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right)$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

A spektrum translációja

- Az egyenáramú (DC) komponens a spektrumkép középpontjában van ($M/2, N/2$)

$$\mathcal{F} [f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - M/2, v - N/2)$$

A térbeli rezolúció és a frekvencia rezolúció közötti összefüggés

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta x}, \quad \Delta v = \frac{1}{N \Delta y}$$

A 2D DFT transzformáció tulajdonságai

Property	Expression(s)
Fourier transform	$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
Inverse Fourier transform	$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{-j\phi(u, v)}$
Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}, \quad R = \text{Real}(F) \text{ and } I = \text{Imag}(F)$
Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
Average value	$\bar{f}(x, y) = F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$
Translation	$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$ When $x_0 = u_0 = M/2$ and $y_0 = v_0 = N/2$, then $f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v) (-1)^{u+v}$

A 2D DFT transzformáció tulajdonságai

Conjugate symmetry	$F(u, v) = F^*(-u, -v)$ $ F(u, v) = F(-u, -v) $
Differentiation	$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u, v)$ $(-jx)^n f(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial u^n}$
Laplacian	$\nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -(u^2 + v^2)F(u, v)$
Distributivity	$\Im[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \Im[f_1(x, y)] + \Im[f_2(x, y)]$ $\Im[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \Im[f_1(x, y)] \cdot \Im[f_2(x, y)]$
Scaling	$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v), f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ ab } F(u/a, v/b)$
Rotation	$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$ $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$
Periodicity	$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$ $f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$
Separability	See Eqs. (4.6-14) and (4.6-15). Separability implies that we can compute the 2-D transform of an image by first computing 1-D transforms along each row of the image, and then computing a 1-D transform along each column of this intermediate result. The reverse, columns and then rows, yields the same result.

A 2D DFT transzformáció tulajdonságai

Property	Expression(s)
Computation of the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm	$\frac{1}{MN} f^*(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ This equation indicates that inputting the function $F^*(u, v)$ into an algorithm designed to compute the forward transform (right side of the preceding equation) yields $f^*(x, y)/MN$. Taking the complex conjugate and multiplying this result by MN gives the desired inverse.
Convolution [†]	$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n)$
Correlation [†]	$f(x, y) \circ h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x + m, y + n)$
Convolution theorem [†]	$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v);$ $f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$
Correlation theorem [†]	$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v);$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v)$

A 2D DFT transzformáció tulajdonságai

Some useful FT pairs:

Impulse $\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$

Gaussian $A\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$

Rectangle $\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$

Cosine $\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) + \delta(u - u_0, v - v_0)]$

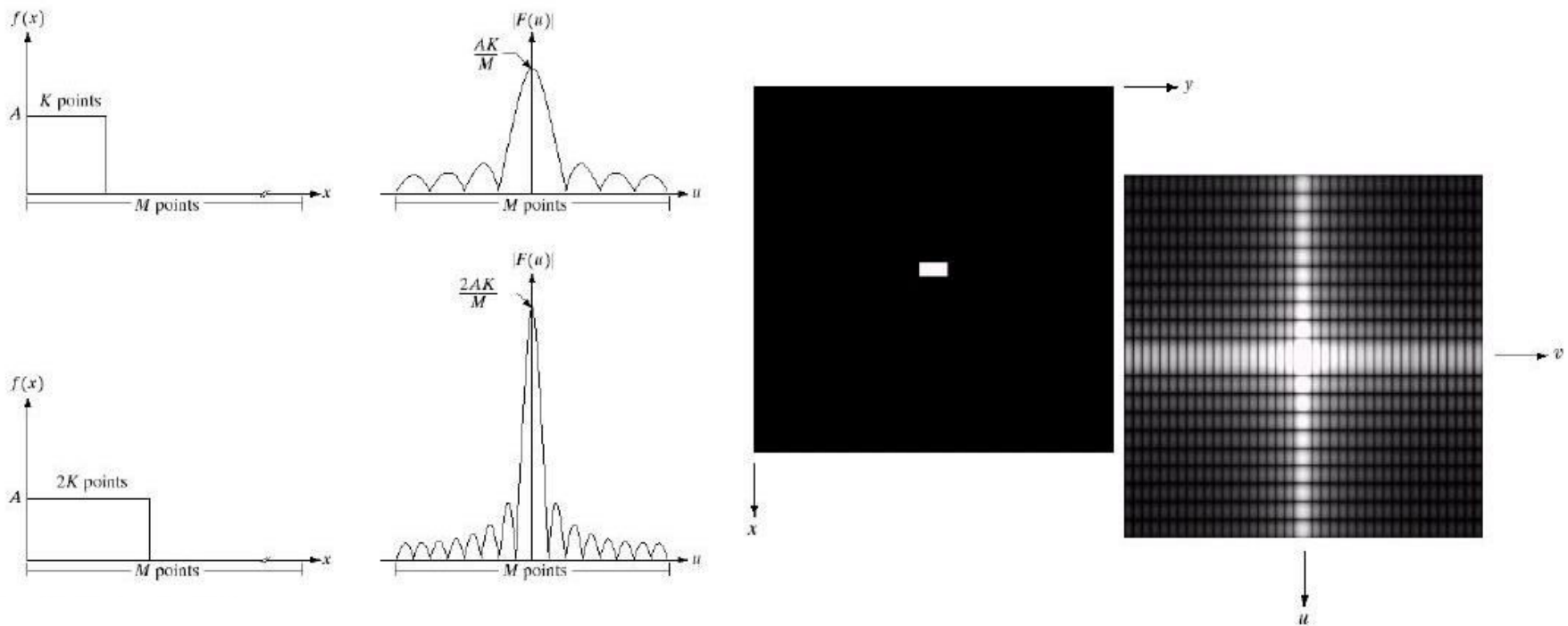
Sine $\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow j \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) - \delta(u - u_0, v - v_0)]$

[†] Assumes that functions have been extended by zero padding.

2D DFT transzformáció

A képtartományi impulzusszélesség és a spektrumszélesség közötti kapcsolat

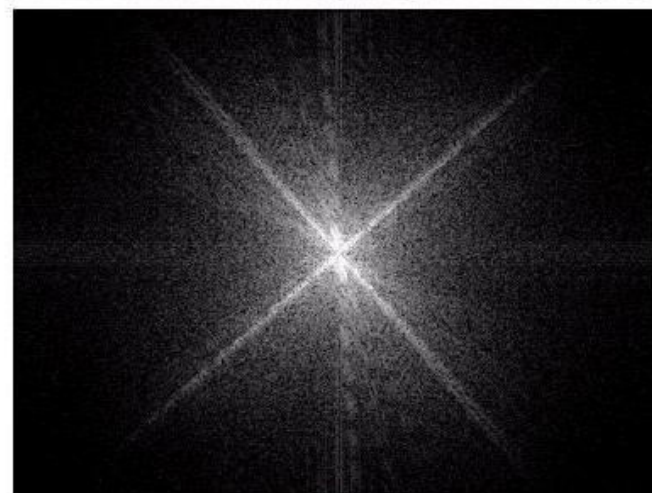
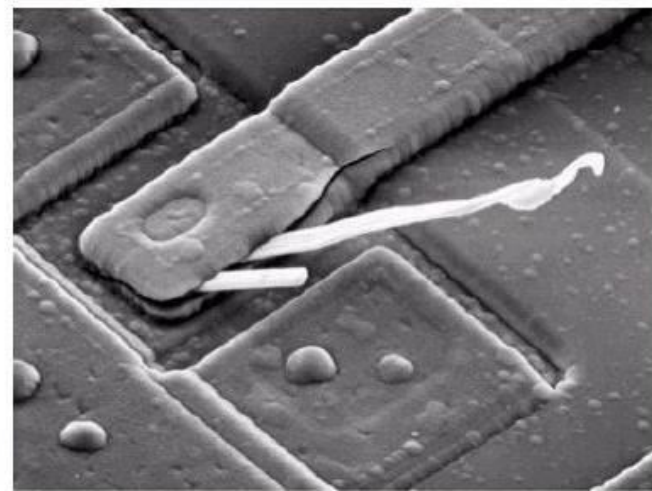
- Az adott képkoordináta mentén az impulzusszélesség fordítottan arányos a spektrumszélességgel ugyanaz a koordináta mentén
- Teljes analógia van az 1D jel és az 1D spektrummal



2D spektrum

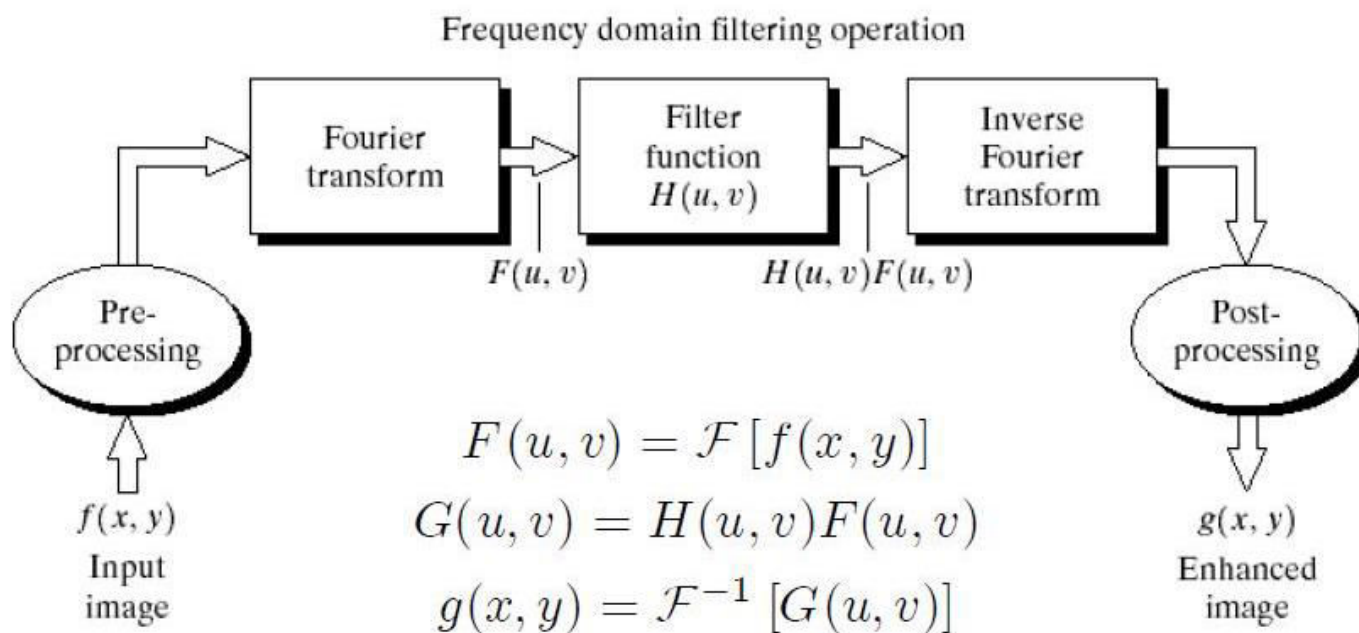
Integrált áramkör képének spektruma

- A képen a 45 fokos szög alatt lévő élek dominálnak, ezért a spektrumban is jelentős ferde komponensek jelentkeznek
- A fehér okszid (sérülés) a horizontális irányhoz áll közel, a vertikális irányban sokkal kevésbé kifejezett
- A spektrumban hiányzik a horizontális komponens, míg a vertikális kicsit el van ferdülve és periodikus nullái vannak



Képszűrés a frekvenciatartományban

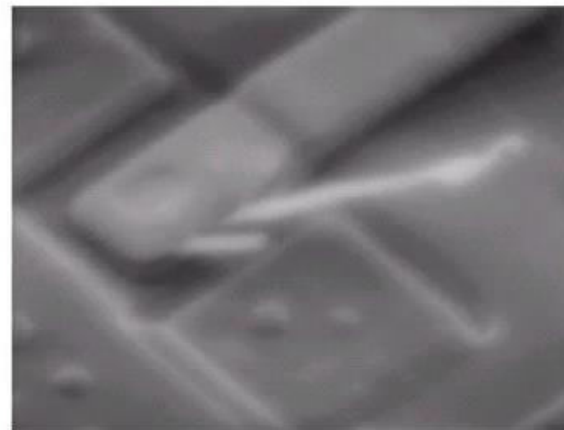
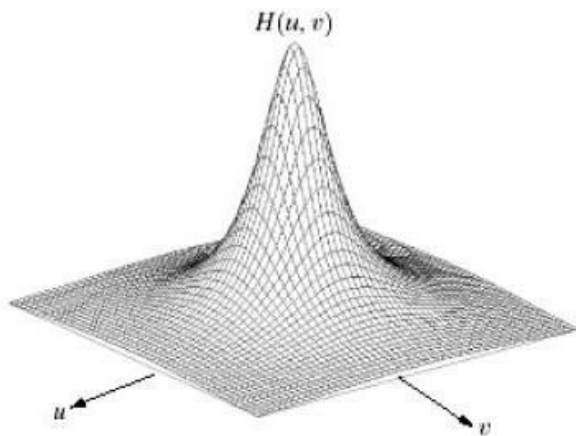
Alapvető elv



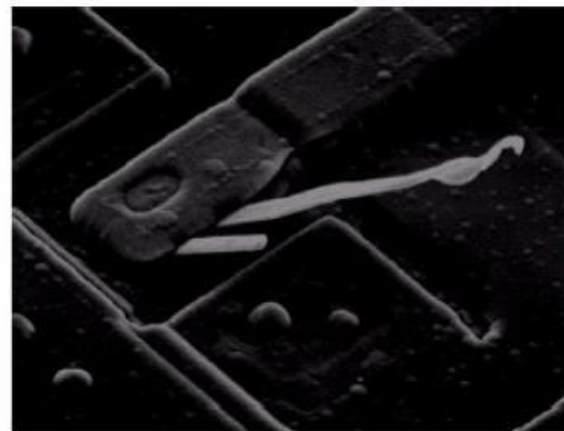
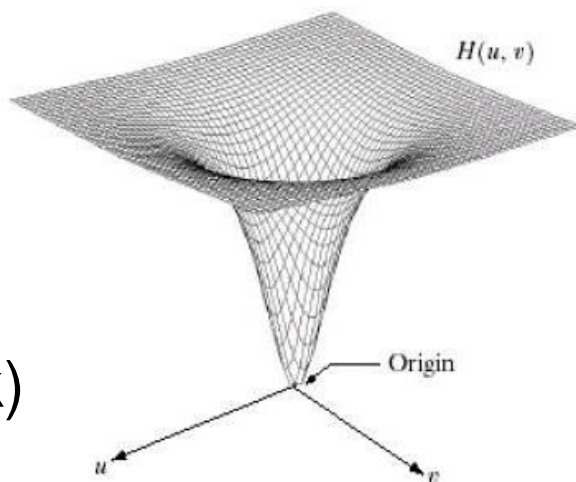
- Az elő- és utófeldolgozás a következő műveleteket foglalja magába: spektrum transzláció, képkivágás (crop), intenzitás transzformáció, egészszámú kerekítés, stb.

Képszűrés a frekvenciatartományban

Aluláteresztő
szűrő
(LowPass,
Niskopropusnik)



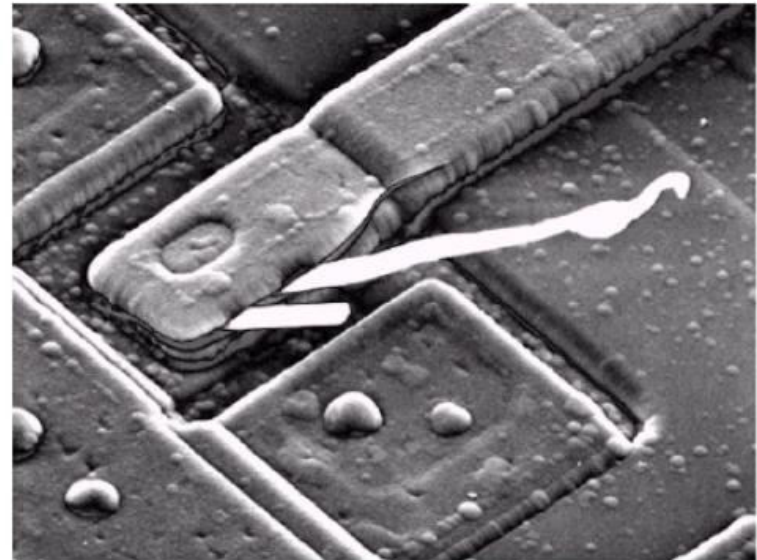
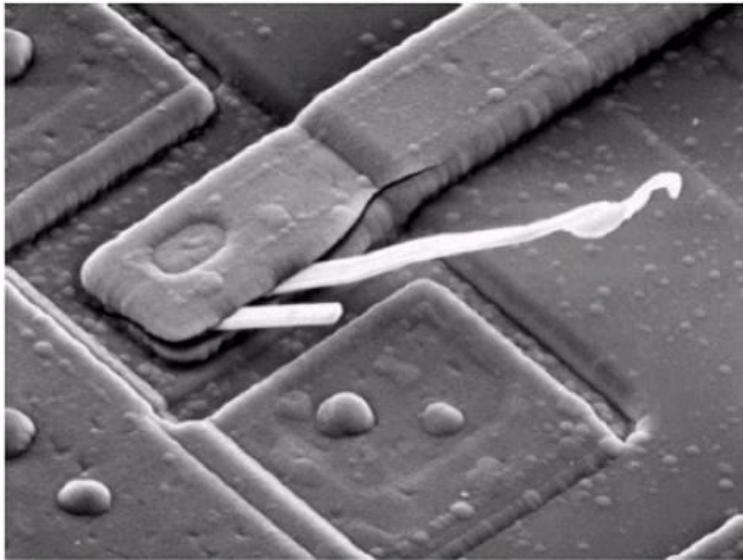
Felüláteresztő
szűrő
(HighPass,
Visokopropusnik)



Képszűrés a frekvenciatarományban

Felüláteresztő szűrő

- Olyan állandó hozzáadásával amely a felüláteresztő szűrő magasságának felével egyezik meg, olyan képet kapunk mely képpontjainak intervalluma megegyezik az eredeti kép képpontjainak intervallumával
- Ha az eredeti képpel összehasonlítjuk, észrevehető a részletek kihangsúlyozása (magasfrekvenciás komponensek)

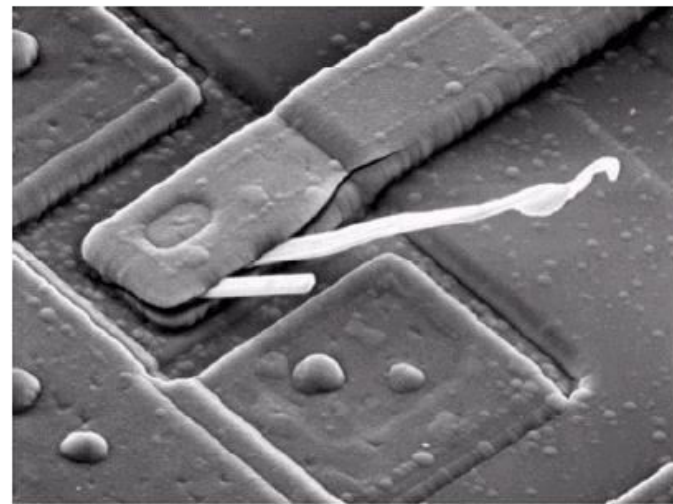


Képszűrés a frekvenciatartományban

Notch szűrő

- Megszünteti a kép egyenáramú komponensét
- Azért kapta ezt a nevet mert a jelleggörbe közepén lyuk van

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = (M/2, N/2) \\ 1, & (u, v) \neq (M/2, N/2) \end{cases}$$



A képtartományban és a frekvenciatartományban történő szűrés közötti összefüggés

- Lineáris szűrők esetében amelyeket konvolúcióval modellezhetünk, ugyanazok az összefüggések érvényesek mint az 1D esetben
- a 2D diszkrét konvolúciót hasonlóan definiáljuk mint az 1D konvolúciót

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

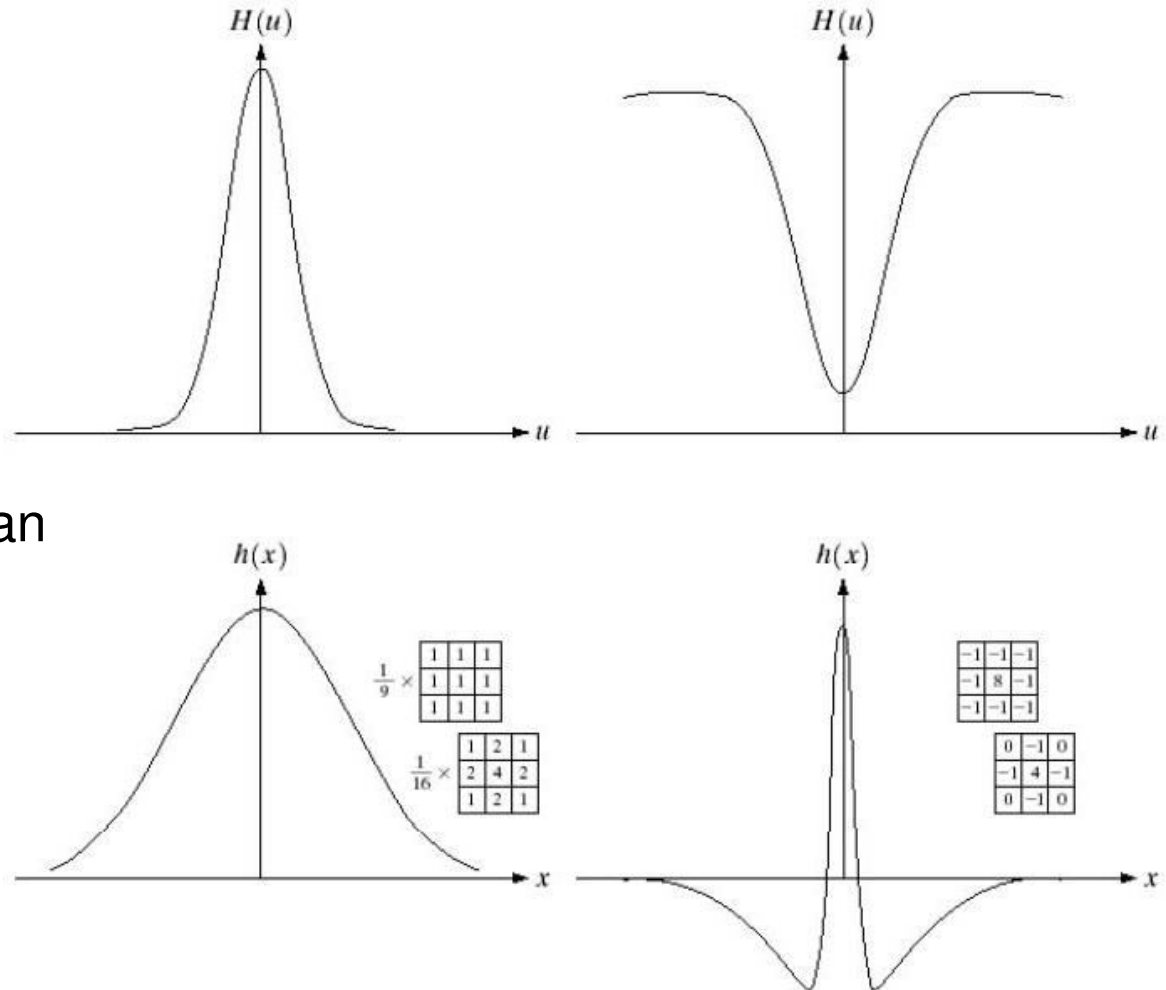
$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

- Nemlineáris szűrők esetén ezeket az összefüggéseket nem lehet meghatározni, ezért a frekvenciatartományban nem lehet a nemlineáris szűrést elvégezni

A képtartományban és a frekvenciatartományban történő szűrés közötti összefüggés

Aluláteresztő és felüláteresztő szűrők

- Ha a frekvenciatartományból visszatérünk a képtartományba, olyan kernel-eket kapunk amelyeket már korábban definiáltunk a képtartományban



A képtartományban és a frekvenciatartományban történő szűrés közötti összefüggés

Szűrők tervezése a frekvenciatartományban

- Könnyebb definiálni a szűrők jellemzőit (vannak olyan szűrők amelyeket triviális definiálni a frekvenciatartományban, de szinte lehetetlen definiálni a képtartományban)
- Miután megterveztük a szűrőt a frekvenciatartományban, mindig visszatérhetünk a képtartományba a szűrő impulzusválaszfüggvényének meghatározásával az inverz 2D DFT segítségével

Szűrők megvalósítása a frekvenciatartományban

- A gyors Fourier transzformációnak (FFT) köszönhetően, már kis M és N képméret esetében is a szűrő tervezése könnyebb a frekvenciatartományban mint a képtartományban

Képszűrés a frekvenciatartományban

3 alapvető típusú szűrőt vizsgálunk

- Ideális
- Butterworth
- Gauss

Legmeredekebb jelmgörbéje az ideális, legenyhébb jellemgörbéje a Gauss szűrőnek van

A Butterworth szűrőnek a rendjétől függően a jellemgörbéje vagy az ideálishoz, vagy a Gauss-éhoz áll közelebb

Az összes szűrő jellemgörbéjét a frekvenciasík középpontjától $(u,v)=(M/2,N/2)$ való Euklideszi távolságával $D(u,v)$ definiáljuk

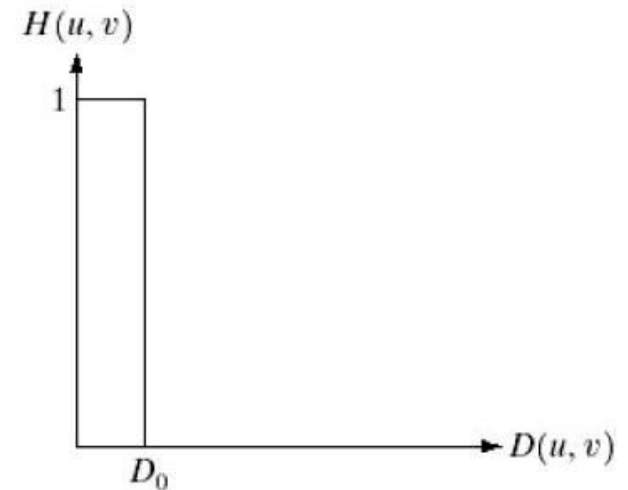
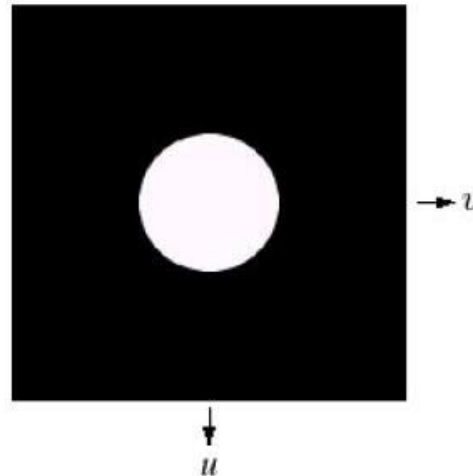
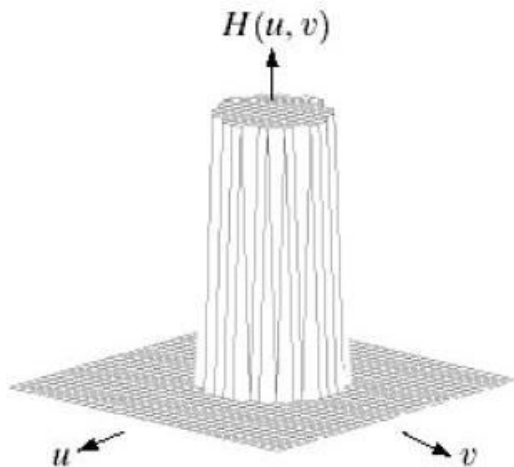
$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Képlágyítás a frekvenciatartományban

Ideális aluláteresztő szűrő

- A D sugáron belüli spektrumkomponenseket érintetlenül átereszt, az összes többi komponenset pedig teljesen elnyomja

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



Ideális aluláteresztő szűrő

Az eredeti kép spektruma koncentrikus körökkel

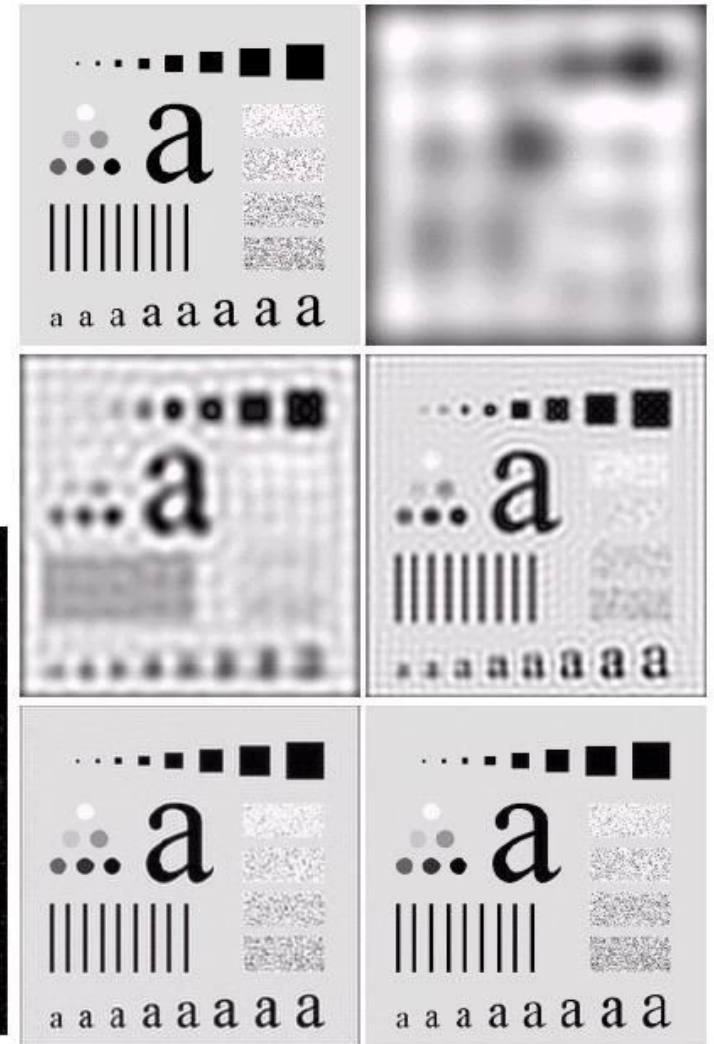
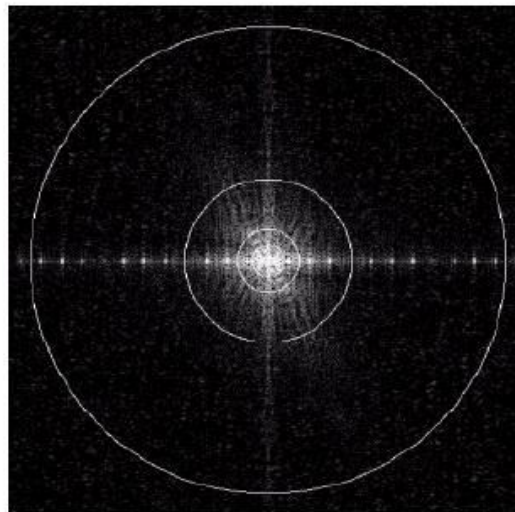
Kör sugara / teljesítmény (%)

5/92.0, 15/94.6, 30/96.4, 80/98.0, 230/99.5

Az eredeti kép (balra fönt), és az adott határfrekvenciával szűrt képek

Az ideális aluláteresztő szűrő effektusai a képtartományban:

- képlágyítás (smoothing)
- rezgés, csörgés (ringing)

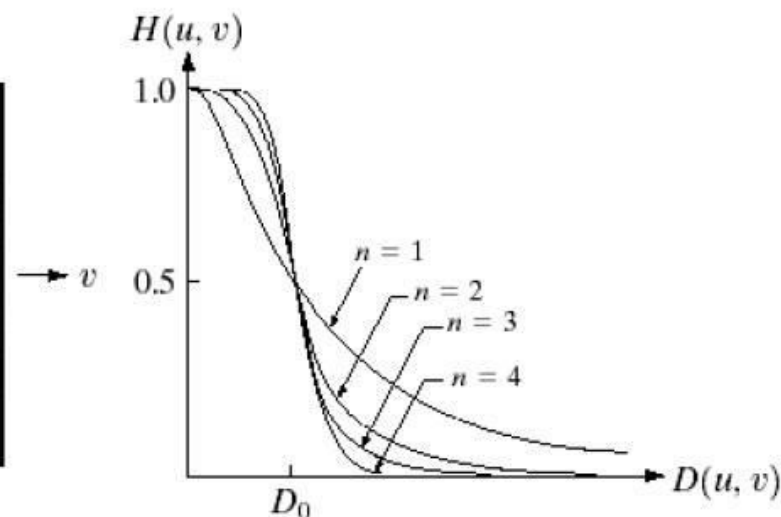
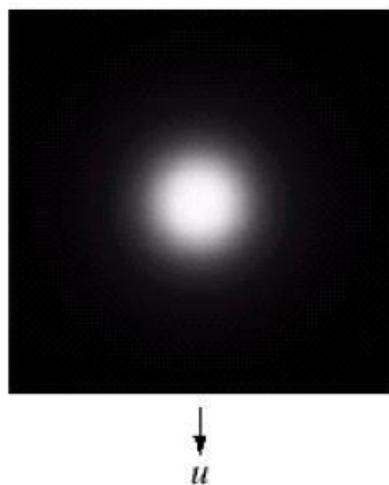
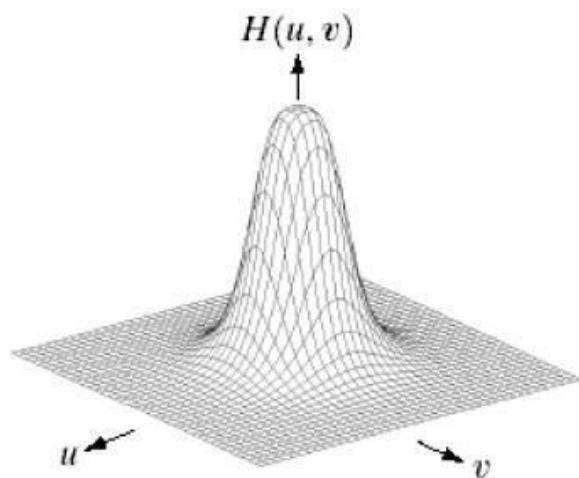


Képlágyítás a frekvenciatartományban

Butterworth aluláteresztő szűrő

- A szűrő jellemgörbéjének meredeksége a szűrő rendjétől (n) függ
- Ha $n \rightarrow \infty$, a szűrő jellemgörbéje tart az ideális aluláteresztő szűrő jellemgörbéjéhez

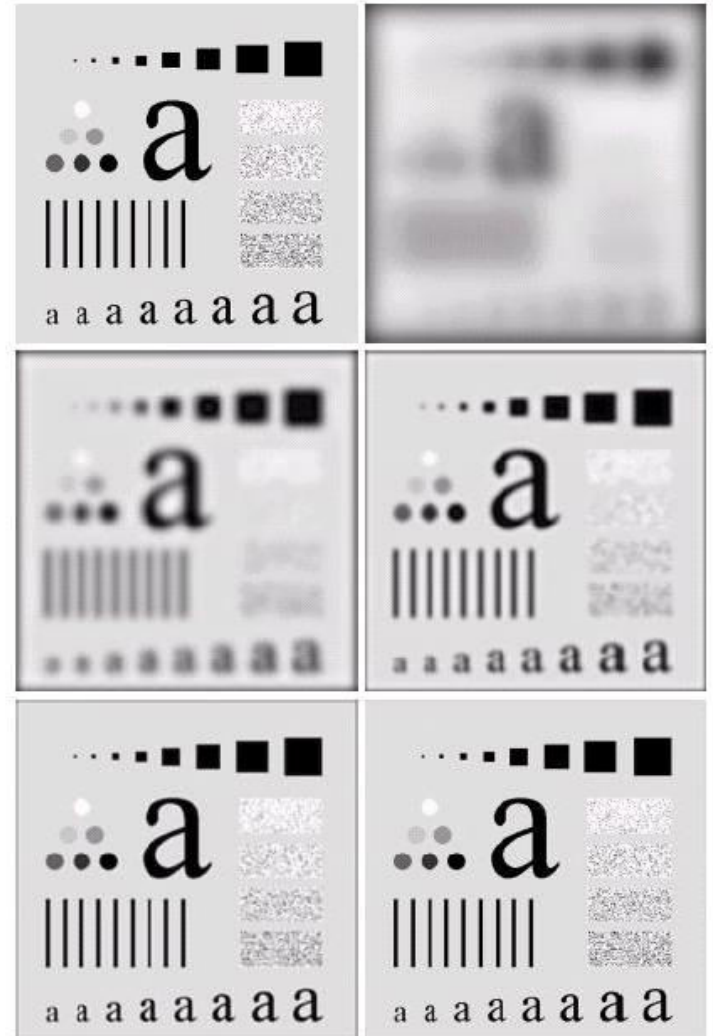
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



Butterworth aluláteresztő szűrő

Szűrés $n=2$ esetén

- Eredeti kép (balra fönt)
- A $D0$ határfrekvenciák megegyeznek az ideális aluláteresztő szűrő határfrekvenciájával: 5, 15, 30, 80, 230
- a lágyítás (blur) csökken a határfrekvencia növekedésével
- A rezgés (ringing) nem észlelhető egy esetben sem, ez a másodrendű Butterworth szűrő enyhe meredekségének köszönhető

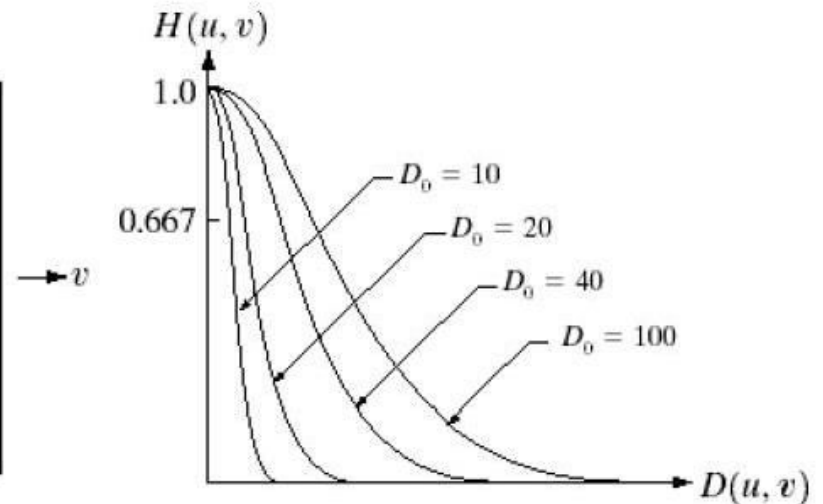
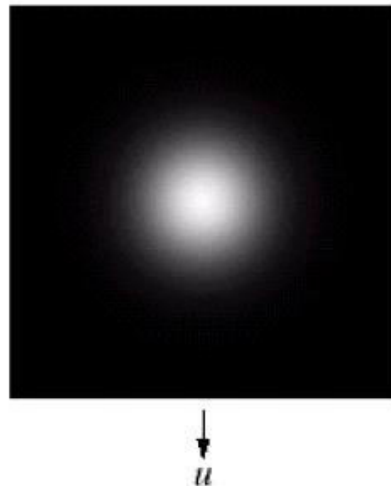
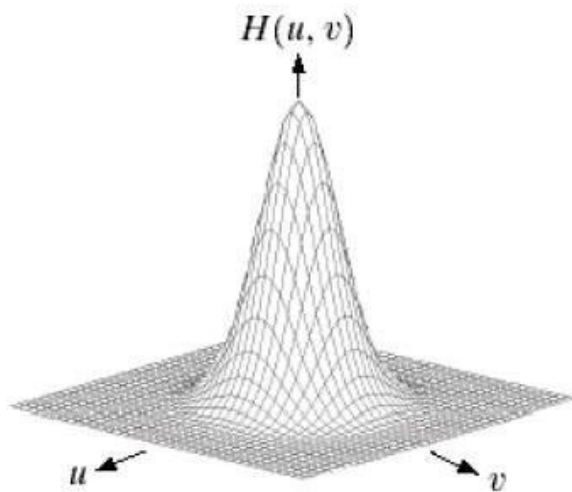


Képlágyítás a frekvenciatartományban

Gauss aluláteresztő szűrő

- A Gauss szűrő impulzus válaszfüggvényének Gauss görbe alakja van
- Gauss szűrőnél a rezgés (ringing) sose jelentkezik

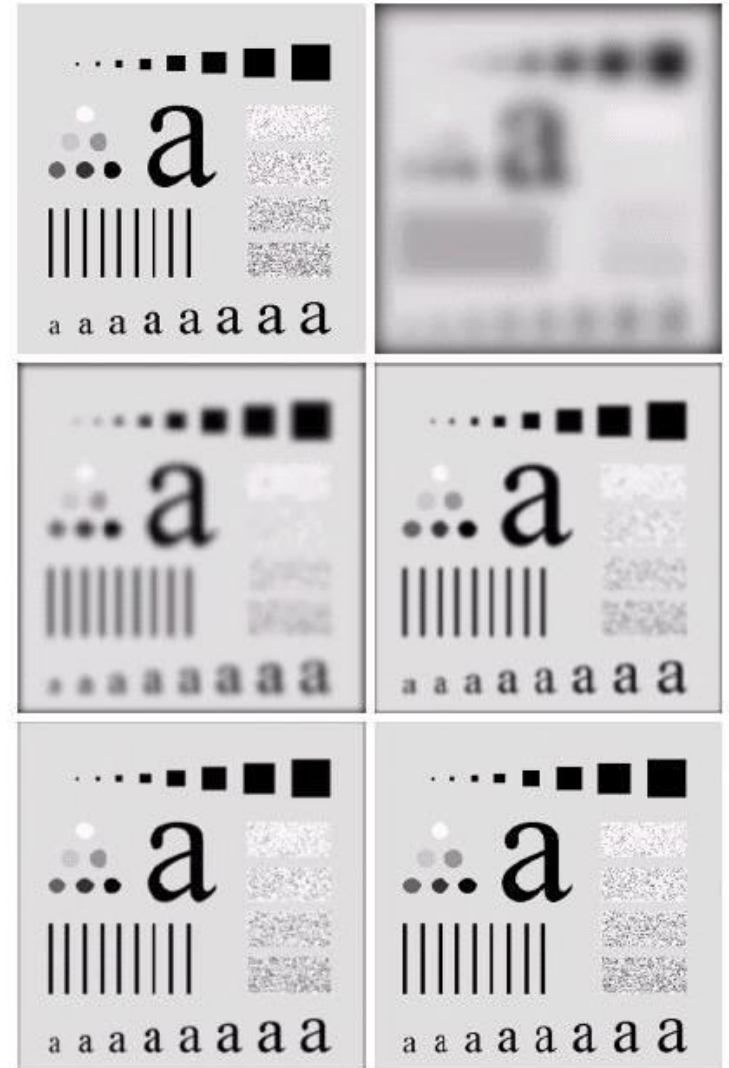
$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2} = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



Gauss aluláteresztő szűrő

A szűrés eredménye

- Eredeti kép (balra fönt)
- A D0 határfrekvenciák megegyeznek az ideális és a Butterworth aluláteresztő szűrők határfrekvenciájával: 5, 15, 30, 80, 230
- Rezgés biztosan nem jelentkezik
- Kisebb mértékben történik lágyítás mint a Butterworth szűrőnél (példa 15) mert a jellemgörbe kevésbé meredek



Képlágyítás a frekvenciatartományban

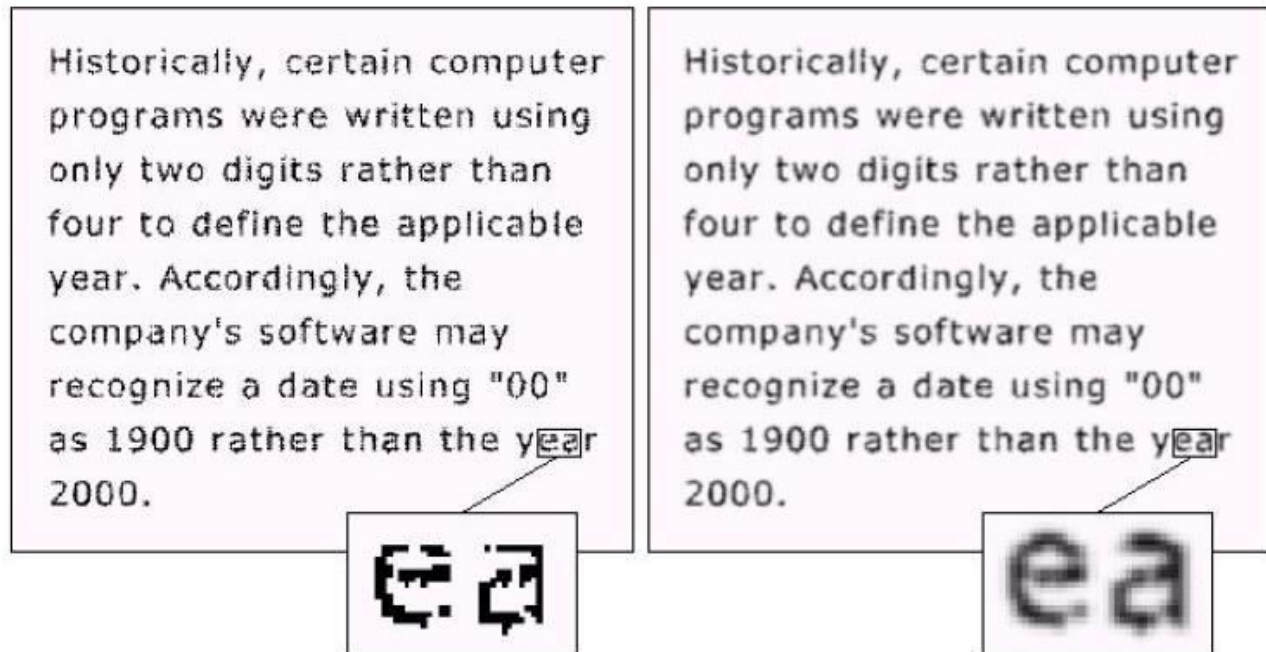
- Az ideális, Butterworth és Gauss szűrők összehasonlítása



Képlágyítás a frekvenciatartományban

Példa a képlágyításra - OCR (Optical Character Recognition)

- A szkennelt vagy fénymásolt dokumentumok nem összefüggő karaktereket tartalmaznak ami nehezíti a szöveg automatikus felismerését
- Ha a képet Gauss szűrővel lágyítjuk ($D0=80$), összefüggő karaktereket nyerünk



Példa a képlágyításra - kozmetika

Ha a képet Gauss szűrővel lágyítjuk ($D0=100$ és $D0=80$), eltűnnek a ráncok a szem körül



Képelesítés a frekvenciatartományban

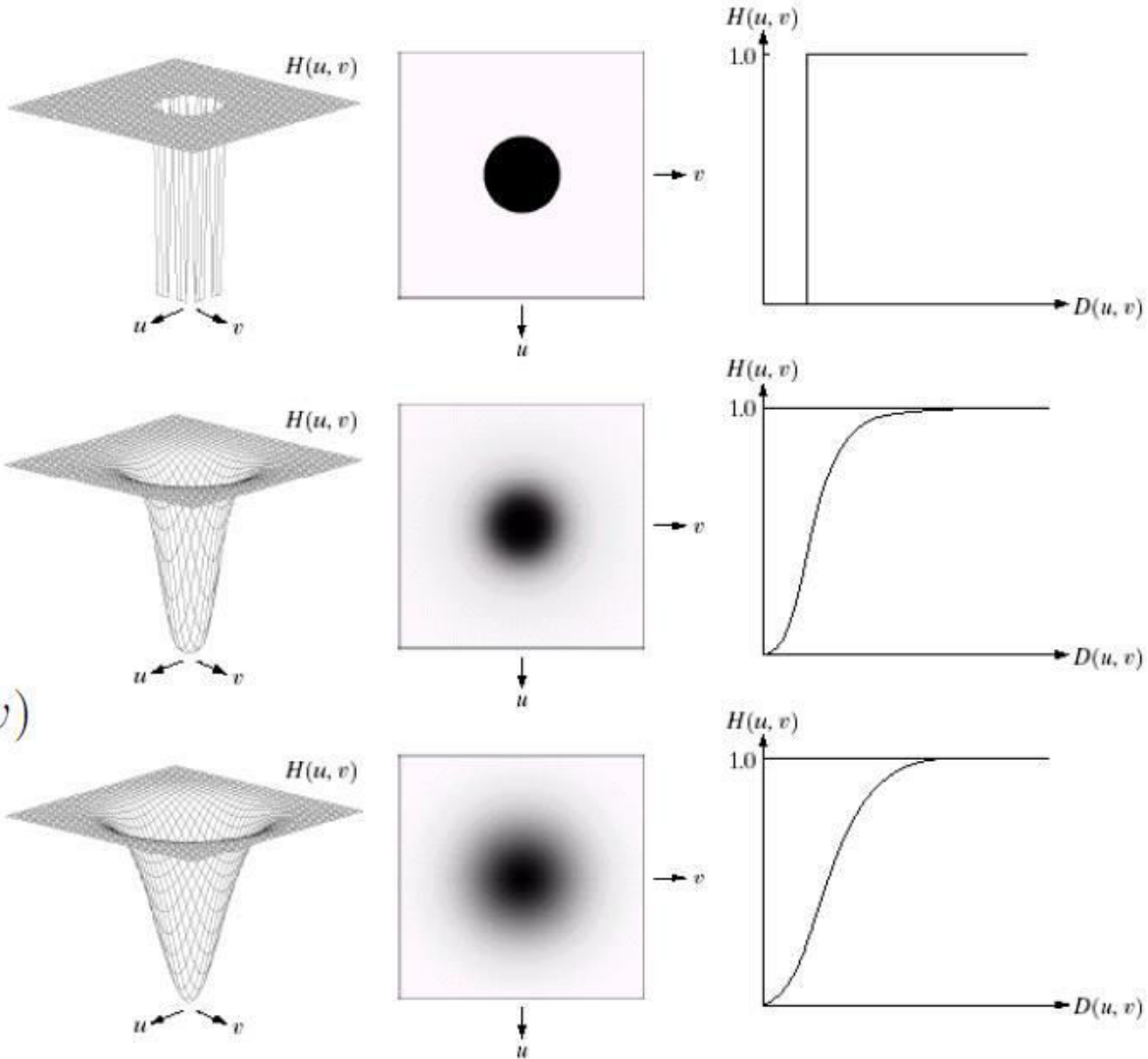
Felüláteresztő szűrők

3 típusú szűrőt vizsgálunk:

- Ideális
- Butterworth
- Gauss

A jellemgörbéket az aluláteresztő szűrők jellemgörbéinek inverziójával nyerjük

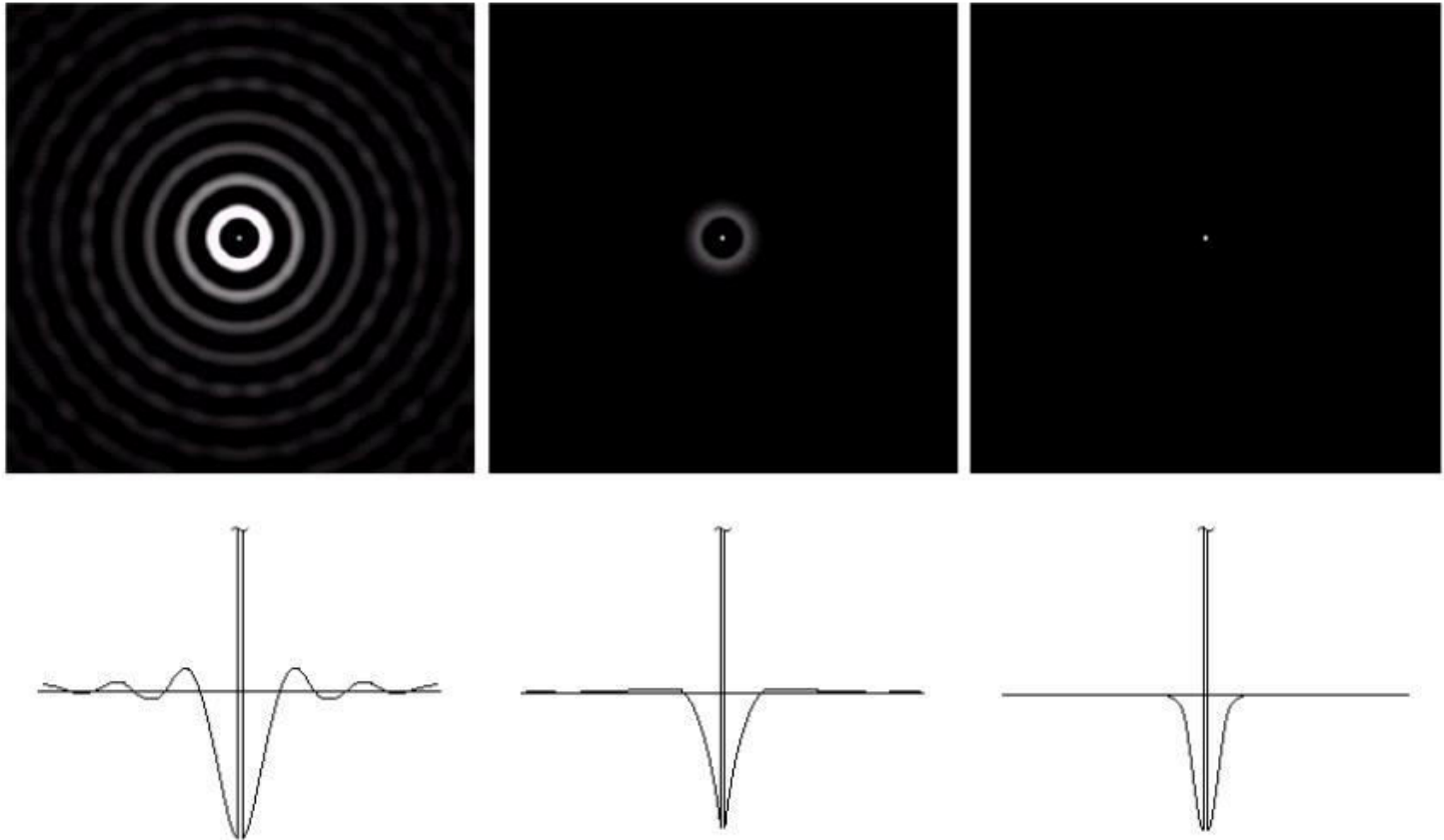
$$H_{VF}(u, v) = 1 - H_{NF}(u, v)$$



Felüáteresztő szűrők

Impulzusválaszfüggvény: ideális, Butterworth, Gauss

- A Butterworth szűrő átmenet az ideális és a Gauss között

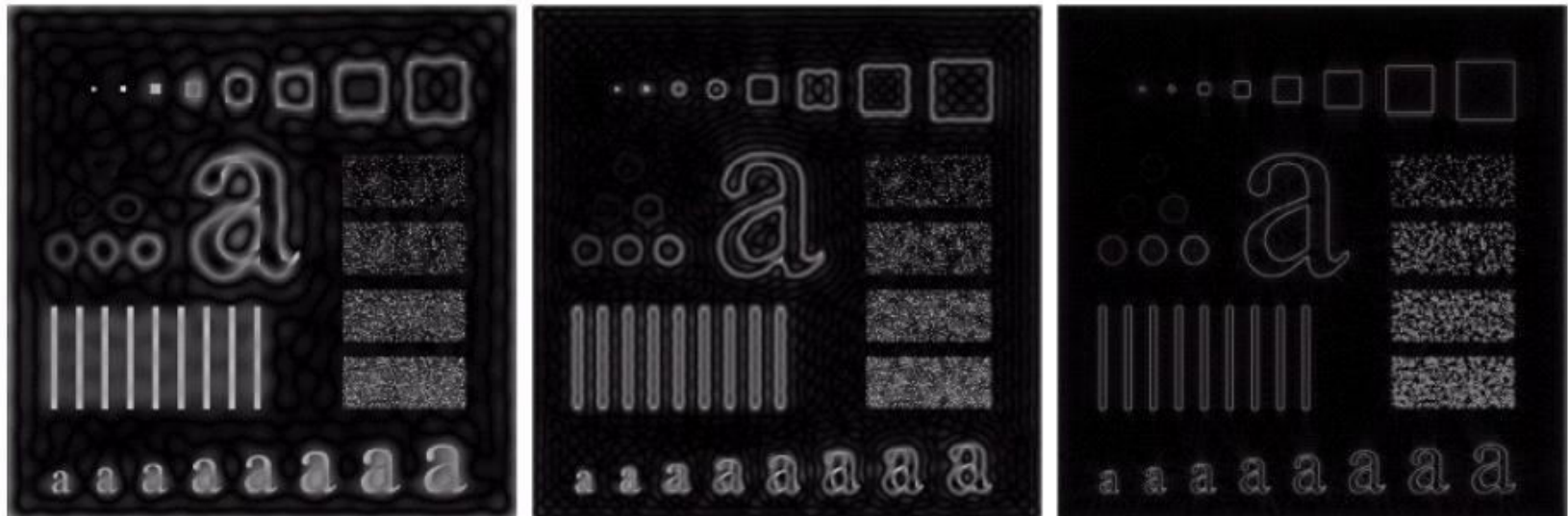


Ideális felüáteresztő szűrő

Átviteli jellemgörbe

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- Szűrés ideális felüáteresztő szűrővel ha a határfrekvencia $D_0=15, 30, 80$
- A rezgés nagyon kifejezett (az "a" betű élei összeérnek)

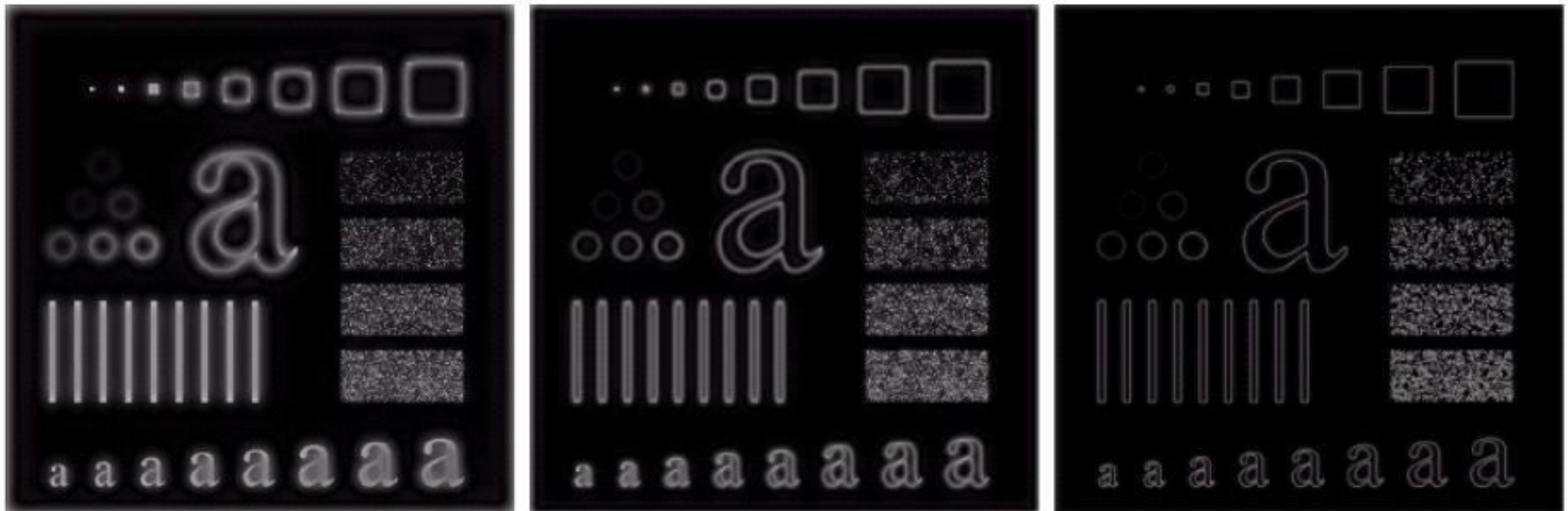


Butterworth felüáteresztő szűrő

Átviteli jellemgörbe

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

- Szűrés másodrendű (n=2) Butterworth felüáteresztő szűrővel ha a határfrekvencia $D_0=15, 30, 80$
- Az eredmény sokkal jobb mint az ideális felüáteresztő szűrő esetében



Gauss felüáteresztő szűrő

Átviteli jellemgörbe

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2 D_0^2}$$

- Szűrés Gauss felüáteresztő szűrővel ha a határfrekvencia $D_0=15, 30, 80$
- Ezzel a szűrővel kapjuk a legjobb eredményeket



Képezésítés a frekvenciatartományban

Laplace operátor a frekvenciatartományban

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right] = (ju)^n F(u),$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] = (ju)^2 F(u, v) + (jv)^2 F(u, v),$$

$$\mathcal{F} [\nabla^2 f(x, y)] = -(u^2 + v^2) F(u, v),$$

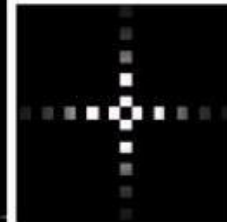
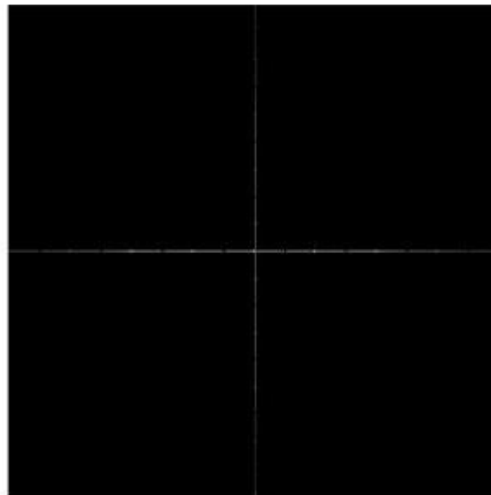
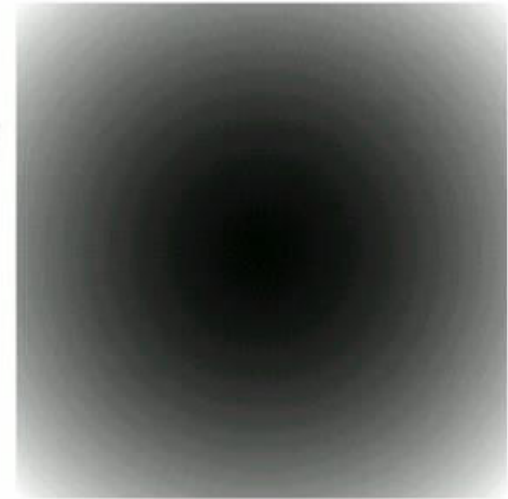
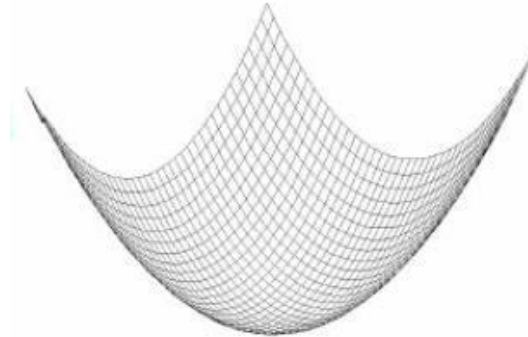
$$H(u, v) = -(u^2 + v^2),$$

$$H(u, v) = - \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]$$

Laplace operátor

Laplace operátor

- A Laplace operátor 3D és 2D karakterisztikája
- A Laplace operátor 2D képtartománybeli jellemgörbéje és a központ nagyított képe
- 1D válaszfüggvény és a megfelelő 2D maszk



0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Következtetés

- 2D DFT transzformáció
- 2D spektrum
- Aluláteresztő és feluláteresztő szűrők
- A képtartomány és a frekvenciatartomány közötti szűrések közötti összefüggés
- Képjavítás a frekvenciatartományban (ideális, Butterworth, Gauss szűrők)
- Képlágyítás a frekvenciatartományban (aluláteresztő szűrő)
- Képesítés a frekvenciatartományban (feluláteresztő szűrő, Laplace operátor, Unsharp masking)