S A D R Ž A J :

1. **Osnovni pojmovi o naizmeničnim strujama** ……..…….... strana 3.
   1.1. Dobijanje naizmeničnih veličina ……...…….3
   1.2. Osnovni parametri naizmeničnih veličina……...…3
   ZADACI……..7.
2. **Predstavljanje naizmeničnih veličina**……..…12
   2.1. Analitičko (trenutno) predstavljanje naizmeničnih veličina…….....12
   2.2. Grafička (vremensko) predstavljanje naizmeničnih veličina……...…12
   2.3. Fazorsko (vektorsko) predstavljanje naizmeničnih veličina…….....12
   2.4. Kompleksno predstavljanje naizmeničnih veličina……13
   Osnovne računske operacije sa kompleksnim brojem…….....14
   ZADACI……...16.
3. **Otpori u kolu naizmenične struje**……..18
   3.1. Kolo sa savršenim termogenim (aktivnim) otporom……..18
   3.2. Kolo sa savršenim kalemom (induktivnim otporom)……18
   3.3. Kolo sa savršenim kondenzatorom (kapacitivnim otporom)……..18
   ZADACI……..20
4. **Vezivanje otpora u kolu naizmenične struje**……....24
   4.1. Redna veza……..24
      4.1.1. Redna veza RLC……...…24
      4.1.2. Redna veza RL……..25
      4.1.3. Redna veza RC……...…..25
   4.2. Paralelna veza ……...26
      4.2.1. Paralelna veza RLC……..26
      4.2.2. Paralelna veza RL……27
      4.2.3. Paralelna veza RC……27
      4.2.4. Paralelna veza RL i RC……28
      4.2.5. Mešovita veza……...28
   ZADACI……..29
5. **Ekvivalentne veze**……53
   5.1. Pretvaranje redne veze RLC u paralelnu vezu GB……...53
   5.2. Pretvaranje paralelne veze GB (RLC) u rednu vezu RX……53
   5.3. Metode transformacije……..54
      5.3.1. Pretvaranje impedansi vezanih u trougao u vezu u zvezdu……54
      5.3.2. Pretvaranje impedansi vezanih u zvezdu u vezu u trougao……54
   ZADACI……..55
6. **Snaga u kolu naizmenične struje**.....59
   6.1. Trenutna i srednja vrednost snage.....59
   6.2. Snaga u kolu sa savršenim aktivnim otporom (R).....59
   6.3. Snaga u kolu sa savršenim kalemom (L).....60
   6.4. Snaga u kolu sa savršenim kondenzatorom (C) 61
   6.5. Snaga u kolu naizmenične struje na impedansi Z.....63
      6.5.1. Redna veza RLC ($X_L > X_C$)
      Analitička, grafička, fazorska i kompleksna analiza.....63
      6.5.2. Redna veza RLC ($X_L < X_C$)
      Analitička, grafička, fazorska i kompleksna analiza.....65
   6.6. Faktor snage.....66
   6.7. Podešavanje prijemnika za maksimalnu aktivnu snagu generatora.....68
   ZADACI.....69
7. **Rezonantna i antirezonantna kola**..... .....strana 82
   7.1. Rezonantno kolo.....82
      7.1.1. Karakteristične krive kod rezonantnih kola.....84
      7.1.2. Faktor dobrote i faktor prigušenja kod rezonantnih kola.....85
      7.1.3. Propusni opseg kod rezonantnih kola.....85
      7.1.4. Tanges gubitaka.....86
   7.2. Antirezonantno kolo.....87
      Realno antirezonantno kolo.....88
   ZADACI..... 90

8. **Induktivno spregnuta kola**.....100
8.1. Koeficijent samoinduktivnosti i međusobne induktivnosti.....100
8.2. Analiza induktivno spregnutih kola.....100
ZADACI.....102
9. **Mostovi za naizmeničnu struju**.....111
ZADACI.....112
10. **Složena kola**.....116
10.1. Definicija električnih kola.....116
10.2. Metode za rešavanje složenih kola.....116
10.2.1. Metoda Kirhofovih pravila.....116
10.2.2. Metoda konturnih struja.....116
10.2.3. Metoda zajedničkog napona.....116
10.2.4. Metoda superpozicije.....116
10.2.5. Metoda Tevenena (ekvivalentni naponski generator).....116
10.2.6. Metoda Nortona (ekvivalentni strujni generator).....116
ZADACI.....117
11. **Transformatori**.....133
11.1. Zadaci i podela transformatora.....133
11.2. Idealni transformatori.....113
11.3. Redukovanje veličina kod transformatora.....136
11.3.1. Redukovanje sekundarnog napona na primarnu vrednost.....136
11.3.2. Redukovanje sekundarne struje na primarnu vrednost.....136
11.3.3. Redukovanje sekundarnog otpora (impedanse) na primarnu vrednost.....136
11.4. Realni transformatori sa gvozdenom jezgrom 137
Ekvivalentna šema realnog transformatora.....138
11.5. Transformatori u linearnom režimu rada (vazdušni transformatori) 138
Autotransformatori.....139
11.6. Stepen korisnog dejstva transformatora.....139
ZADACI.....140
12. **Polifazni sistemi** 144
12.1. Osnovni pojmovi o polifaznim sistemima 144
12.2. Dvofazni sistem.....145
12.3. Trofazni sistem.....146
12.3.1. Vezivanje namotaja trofaznih generatora 147
- Vezivanje namotaja trofaznih generatora u zvezdu..... 147
- Vezivanje namotaja trofaznih generatora u trougao..... 149
12.3.2 Vezivanje (trofaznih) prijemnika na trofazni generator 150
- Veza prijemnika u zvezdu.....150
- Veza prijemnika u trougao.....152
Snaga trofaznih prijemnika i trofaznih generatora.....153
- Snaga trofaznih prijemnika i trofaznih generatora vezanih u zvezdu.....153
- Snaga trofaznih prijemnika i trofaznih generatora vezanih u trougao.....154
ZADACI.....155

REŠENJA.....169

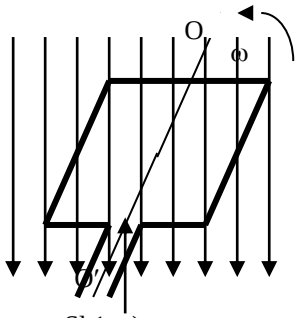
DODATAK
- OBRTNO MAGNETNO POLJE .....331.
- RAZNI ZADACI (sa školskih, regionalnih i republičkih takmičenja) .....341.

NAIZMENIČNE STRUJE

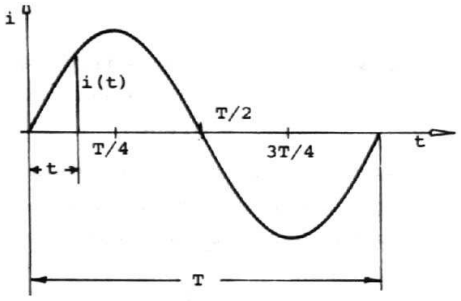
1. OSNOVNI POJMOVI O NAIZMENIČNIM STRUJAMA

Naizmenične struje su vremenski promenljive, tj. sa promenom vremena menja im se i vrednost, i smer. Ove promene se periodično ponavljaju, najčešće u istim vremenskim intervalima ,pa se zbog toga i nazivaju periodične naizmenične struje. Ove promene mogu biti **proste** (pravougaone, trouglaste, testeraste, trapezne, sinusne…), te se i nazivaju **prostoperiodične naizmenične veličene** (napon, struja, ems ..) i **složene** koje se nazivaju **složene periodične naizmenične veličine**.

1.1. DOBIJANJE NAIZMENIČNIH VELIČINA (ems, napona, struje)



Sl.1. a)



Sl.1. b)

Sl.1.

Rotiranjem navojka u magnetnom polju indukcije B (sa jednim parom polova), sl.1.a, konstantnom brzinom u njemu će se indukovati ems e, koja će kroz navojak proterati struju i, ako je električno kolo zatvoreno. Indukovana ems **e**, kao i struja **i** će se postepeno menjati, kao što je prikazano na sl.1b. Kada navojak pređe geometrijski ugao od 2π rad (360°). ems e i struja i će napraviti jednu potpunu promenu, koja je u ovom slučaju sinusnog karaktera.

Indukovana ems e je po Faradejevom zakonu jednaka $\mathbf{e = -\, d\phi / dt}$.

Fluks kroz navojak iznosi:

$$\phi = \overline{B} \cdot \overline{S} = BS \cos\alpha = \Phi_m \cos\alpha.$$

Kako je ugaona brzina $\omega = \alpha / t \Rightarrow \alpha = \omega t$, odnosno, $\mathbf{\phi = \Phi_m \cos \omega t.}$

Koristeći višu matematiku (izvodi), sledi: $d\phi / dt = d\Phi_m \cos \omega t / dt = -\omega\Phi_m \sin \omega t$.

Konačno, indukovana ems u navojku je $\mathbf{e = -\, d\phi / dt = \omega\Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t.}$

Maksimalna vrednost (amplituda) indukovane ems po navojku iznosi:

$\mathbf{E_m = \omega\Phi_m\ [V]}$, a za kalem sa N navojaka: $\mathbf{E_m = N\omega\Phi_m\ [V].}$

Dakle, magnetni fluks po navojku se menja po kosinusu, dok indukovana ems po sinusu. To znači da će indukovana ems kasniti za svojim fluksom za 90° ($\pi/2$ rad).

U praksi se koriste najčešće prostoperiodične naizmenične struje sinusnog oblika (sl.1.b). Naizmenične struje su mnogo ekonomičnije od jednosmernih (moguć prenos na veće udaljenosti, zbog upotrebe transformatora, jednostavniji rad električnih motora, itd.), pa su zbog toga u mnogo većoj upotrebi od jednosmernih.

1.2. OSNOVNI PARAMETRI NAIZMENIČNIH VELIČINA

1. Trenutna vrednost. To je ona vrednost naizmenične veličine koja odgovara datom trenutku posmatranja. Iz slike 1.b može se izvesti zaključak da takvih vrednosti ima beskonačno, tj. onoliko koliko uzmemo različitih trenutaka. Ove vrednosti se označavaju malim latiničnim slovima (simbol njihove promenljivosti). Dakle, struja je označena sa **i**, napon sa **u**, ems sa **e** itd.

2. Maksimalna vrednost (Amplituda). Ovo je najveća vrednost koju može dostići naizmenična veličina. Ona se obeležava velikim latiničnim slovima sa indeksom ″m″ (struja sa $\mathbf{I_m}$, napon sa $\mathbf{U_m}$, ems sa $\mathbf{E_m}$ itd.). Vidimo da u toku jedne potpune promene (navojak pređe 360°) ove vrednosti se jave dva puta, ali sa suprotnim predznacima (To je momenat kada aktivni deo navoja seče magnetne linije pod 90°).

3. Ugaona brzina (kružna učestanost). Ugaona brzina je pređeni ugao u jedinici vremena (sekundi). Kod ugaone brzine treba razlikovati geometrijsku (mehaničku) ugaonu brzinu $\mathbf{\Omega}$ od električne $\boldsymbol{\omega}$. Mehanička ugaona brzina govori o brzini okretanja navojka (Sl.1. a), dok električna ugaona brzina govori o brzini promene

električne veličine (sl.1. b). Ako se navojak rotira u magnetnom polju sa jednim parom polova (p = 1) tada će se u navojku indukovana ems promeniti po zakonu sinusoide, tj nastaje jedna oscilacija (sinusoida) za pređeni geometrijski ugao od 2π rad. U ovom slučaju mehanički ugao i električni su međusobno jednaki (sinusoida obuhvata ugao od 2π rad). Ako bi isti taj navojak obrtali u magnetnom polju sa dva para polova (p = 2), tada bi svaki od aktivnih delova navojka pri mehaničkom obrtanju od 2π rad dva puta naišao ispod N pola (pozitivni maksimum) i dva puta ispod S pola (negativni maksimum). U ovom slučaju nastaju dva oscilacije (sinusoide), što će reći da je ovde električni ugao dva puta veći od mehaničkog. Konačno, ako se navojak obrće u magnetnom polju sa **p** pari polova sledi zaključak:

$\alpha_e = p \cdot \alpha_m$ gde je α_m… mehanički (geometrijski) ugao, a α_e… električni ugao.

Kako su ugaone brzine: mehanička $\Omega = \alpha_m / t$, odnosno električna $\omega = \alpha_e / t$, sledi: $\omega = p \cdot \Omega$.

Za našu struku je bitna električna ugaona brzina, samim tim i električni ugao, pa se samo one i uzimaju za ozbiljno razmatranje. Zbog jednostavnosti pridev ″ elektri;ni ″ se i ne koristi. Dakle, električna ugaona brzina se naziva ugaonom brzinom (kružnom učestanošću) i obeležava se sa ω. Ona iznosi:

$$\omega = \alpha / t \ [\text{rad / s}]$$

gde je α … električni ugao čija je jedinica radijan.

4.Frekvencija (učestanost). Frekvencija je broj ponavljanja (oscilacija) u jedinici vremena (1 s). Obeležava se sa f, a jedinica je herc [Hz]. Za jedan par polova frekvencija će odgovarati broju obrtaja navojka (Sl.1). Kod nas bi se navojak trebao u 1 s obrnuti 50 puta, jer je naša industrijska frekvencija jednaka 50 Hz. U Koreji, Japanu, SAD-u industrijska frekvencija iznosi 60 Hz. To znači da se kod njih navojak toliko puta obrne u magnetnom polju sa jednim parom polova. Ako je par polova jednak **p**, toliko puta će biti više oscilacija u jedinici vremena. Iz navedenih konstatacija sledi zaključak da je frekvencija **f** direktno srazmerna brzini obrtanja navojka (kalema) **n** i broju pari polova **p**. Dakle,

$$f = n \cdot p \ [\text{Hz}]$$

Navedeni izraz važi ako je brzina obrtanja kalema **n** u broju obrtaja po sekundi [ob/s]. Kako se za **n** uglavnom koristi jedinica [ob/min], predhodni izraz prelazi u sledeći oblik:

$$f = n \cdot p\left[\frac{ob}{min}\right] = n \cdot p\left[\frac{ob}{60s}\right] = \frac{np}{60}[Hz].$$

te sledi,

$$f = \frac{np}{60[Hz]} \quad ; \quad n = \frac{60f}{p}\left[ob/min\right].$$

Da bi frekvencija indukovane ems bila konstantna rotor generatora mora da se obrće konstantnom brzinom. Brzina obrtanja generatora (p = 1) koji napajaju našu mrežu iznosi 3 000 ob/min (f = 50 Hz).
Generatori u avio saobraćaju rade pri frekvencijama od 400 Hz, u železnici 15; 25 i 50 Hz, u telefoniji od 300 do 5 000 Hz i u radio tehnici od 10^4 do 10^{10} Hz.

5.Period(a). To je vreme u kojem traje potpuna promena naizmenične veličine (jedna oscilacija). Označava se sa **T**, a jedinica je **s** (sekund).

Perioda i frekvencija su međusobno obrnuto proporcionalne, pa slede relacije:

$$f = \frac{1}{T}[Hz] \Rightarrow T = \frac{1}{f}[s]$$

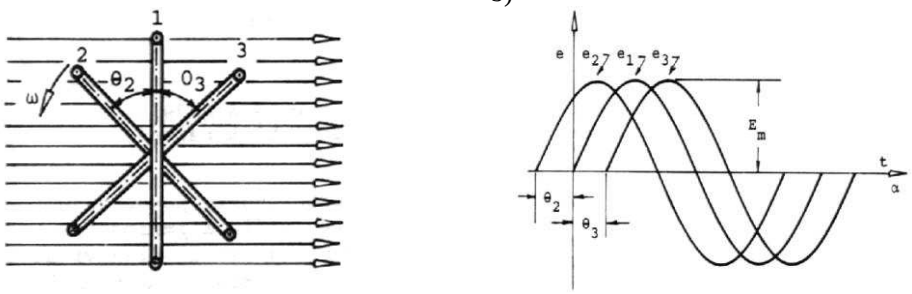
Ugaona brzina naizmenične veličine za jednu oscilaciju (t = T , $\alpha = 2\pi$ rad) iznosi: $\omega = \alpha/t = 2\pi/T = 2\pi f$.

$$\omega = 2\pi f \ [\text{rad/s}]$$

6. Faza, fazna razlika i početna faza.

Ako na istu osovinicu pored jednog navojka prema sl.1. mehanički pričvrstimo još dva navojka, kao na sl.2. a), tako da je drugi prostorno pomeren za ugao θ_2 unapred (prednjači), a treći za ugao θ_3 unazad (kasni), tada će se u svakom od navojaka indukovati pojedinačna ems. Kako je oscilacija kod prvog navojka sinusoida (sl.1) čije je početno vreme t = 0, indukovana ems e_1 u njemu iznosi $e_1 = E_m \sin \alpha = E_m \sin \omega t$.
Za drugi navojak $e_2 = E_m \sin (\omega t + \theta_2)$, odnosno treći $e_3 = E_m \sin (\omega t - \theta_3)$, sl.2.b).

a) b)

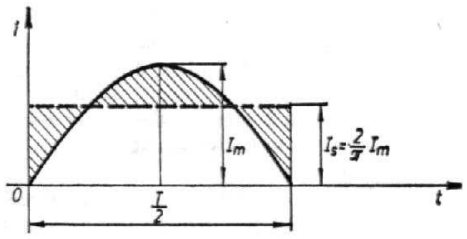


Sl.2.

Uglovi θ_2 i θ_3 se nazivaju **početni uglovi (početne faze)**, jer su to uglovi sa kojima se počima posmatranje prostoperiodične naizmenične veličine e_2, odnosno e_3 (t = 0 s). Naravno i ems e_1 ima svoj početni ugao, koji u ovom slučaju iznosi 0, tj. $\theta_1 = 0$ (za t = 0 $\Rightarrow$ $e_1 = E_m \sin 0 = 0$).
Kako je $\alpha = \omega t$, za prvu fazu (fazu e_1) mo\emo dati ugao predstaviti u obliku $\omega t = \omega t + 0 = \omega t + \theta_1$. ovaj ugao **ωt** naziva se **fazni ugao (faza)** prve faze. Fazni ugao (faza) druge faze je **$\omega t + \theta_2$**, odnosno tre'e **$\omega t - \theta_3$**.
Fazna razlika je razlika izme]u dveju faza. Fazna razlika izme]u druge I tre'e faze je $\omega t + \theta_2 - (\omega t - \theta_3) \Rightarrow$ $\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3$. Dakle, fazna razlika je razlika izme]u po;etnih uglova.

7. Srednja vrednost naizmenične veličine

Naizmenična veličina sinusnog oblika u jednoj periodi ima dva polutalasa istih vrednosti ali suprotnih predznaka. Zbog toga je srednja vrednost naizmeničnih veličina u jednoj periodi jednaka nuli. U praksi se negativni talas često ispravlja u pozitivni (nastaje struja jednog smera), pa je u ovom slučaju srednja vrednost naizmenične struje za celu periodu jednaka srednjoj vrednosti naizmenične struje za polovinu periode. Iz navedenih razloga srednja vrednost naizmenične struje računa se za vreme polovine periode (T/2) i ona se obeležava velikim latiničnim slovima sa indeksom ″s″.



Sl.3.

Pravc sa visinom koja odgovara nekoj jednosmernoj struji, čija je vrednost jednaka I_S, pravi jedan pravougaonik čija je površina jednaka površini koju čini naizmenična struja i u vremenu T/2 (polovina sinusoide), prema sl.3. Kako je površina pravougaonika jednaka $I_S \cdot T/2$ [As], ta površina predstavlja određenu količinu naelektrisanja. Pošto su površine izjednačene, sledi, jednosmerna struja **I_S** stvara istu količinu naelektrisanja kao i naizmenična struja **i** u vremenskom intervalu T/2 (poluperiodi).

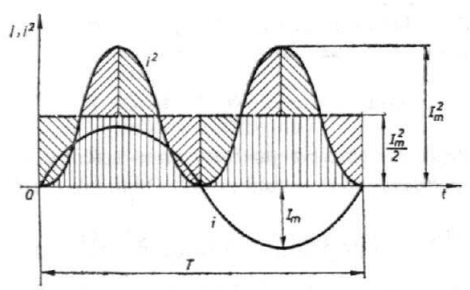
Srednja vrednost naizmenične struje *je ona vrednost sa kojom bi vrednošću jednosmerna struja ostvarila istu količinu naelektrisanja u vremenskom intervalu od T/2.*
Dakle,površina pravougaonika je $Q_{\sim} = I_S \cdot T/2$, odnosno, površina polovine sinusoide (viša matematika) je;

$$Q_{\sim} = \int_0^{T/2} idt = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = I_m \left(-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right) \Big|_0^{T/2} = (I_m/2\pi f) \cdot [-\cos 2\pi f \cdot T/2 - (-\cos 2\pi f \cdot 0)] = 2I_m/\pi.$$

Koristeći računske operacije iz više matematike (integralni račun), srednje vrednosti naizmenične veličine iznosi:

$$I_S = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637 \cdot I_m \quad ; \quad U_S = \frac{2}{\pi} U_m \quad ; \quad E_S = \frac{2}{\pi} E_m$$

Efektivna vrednost naizmenične struje. *Efektivna vrednost naizmenične struje je ona vrednost sa kojom bi jednosmerna struja istog inteziteta ostvarila istu količinu naelektrisanja prolazeći kroz neki otpornik.*
Kako se u praksi ova energija i najviše koristi značaj efektivne vrednosti je veoma velik. Zbog toga te vrednosti se obeležavaju velikim latiničnim slovima, bez ikakvih indeksa (U, I, E …). .



Sl.4.

Kvadriranjem naizmenične struje i, nastaje njen kvadrat, koji iznosi $i^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t$, prema sl.4. Vidimo da je struja $i^2 \geq 0$, [to znači da će i toplotna energija biti stalno pozitivna (ne zavisi od smera struje i). Povucimo pravac tako da on čini jedan pravougaonik čija je površina jednaka površini koju zatvara kvadrat struje (i^2) u vremenskom periodu T. Ove površine pomnožene sa električnim otporom prijemnika predstavljaju njegovu toplotnu energiju. Dakle,toplotna energija razvijena jednosmernom strujom iznosi $W_{-} = RI^2T$

Naizmenična struja i prolazeći kroz isti taj otpornik R će ostvariti istu količinu toplotne energije (jednake površine), koja će iznositi $W_{\sim} = RT \cdot I_m^2/2$.

Kako su povr[ine jednake ($W_{-} = W_{\sim}$) $\Rightarrow$ $RTI^2 = RTI_m^2/2$ $\Rightarrow$ $I^2 = I_m^2/2$.

Konačno,

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

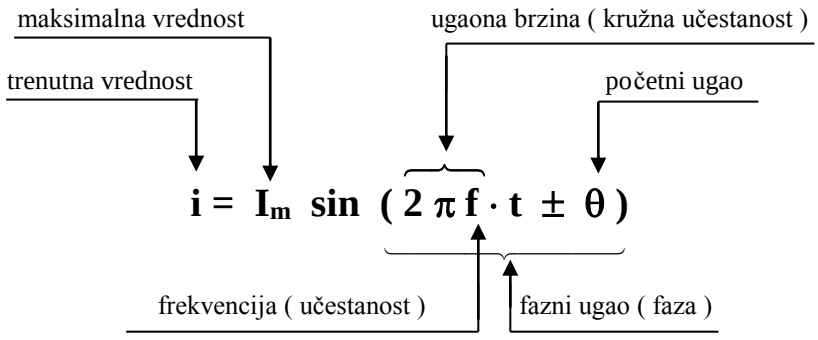
Koristeći višu matematiku dobiju se ista rešenja (izjednačavajući toplotne energije, tj. površine). Postupak je sledeći:

$I^2RT = \int_0^T i^2 R dt$, Rešenjem navedenog integrala nastaju rešenja efektivnih vrednosti, koja su već data.

Merni instrumenti su redovito izbaždareni, tako da mere efektivnu vrednost naizmenične struje.

Koeficijent oblika je odnos između efektivne i srednje vrednosti naizmenične struje. On iznosi : **$k = I/I_S$**
Kod prostoperiodičnog sinusnog oblika on iznosi 1,11.

Svi navedeni parametri se u vidu rezimea mogu predstaviti na sledeći način:



Z A D A C I :

1.1. Kolika je maksimalna vrednost prostoperiodične struje, ako je njena trenutna vrednost jednaka 12 A, a fazni ugao (faza) 30° ?

1.2. Maksimalna vrednost ems je 85 V, a njena frekvencija 100 Hz. Kolika je trenutna vrednost ems nakon vremena $t = 1$ ms od njenog prolaska kroz nulu ?

1.3. Odrediti vreme u kojem je trenutna vrednost naizmenične struje dva puta manja od njene efektivne vrednosti, ako je ona data izrazom $i = I_m \sin 314\, t$.

1.4. U kojem je trenutku naizmenična struja za $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne, ako je njen izraz $i = I_m \sin 314\, t$?

1.5. Kolika je trenutna vrednost naizmenične struje $i = 10\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi/4)$ u trenutku $t = T/8$?

1.6. Odrediti trenutnu vrednost naizmenične struje u trenutku $t = T/4$ čiji je izraz $i = 15\ \sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi/4)$.

1.7. U kojem će trenutku napon $u = 100 \cos(\omega t - \pi/4)$ biti jednak nuli ?

1.8. Koliko je frekvencija dvopolne mašine (generatora), ako joj se rotor obrće brzinom $n = 3\,000$ ob/min ?

1.9. Koliki je broj pari polova mašine sa 1000 obrtaja u minuti, ako je njena frekvencija 50 Hz ?

1.10. Koliki je broj obrtaja šestopolnog generatora ako je učestalost struje 50 Hz ?

1.11. Rotor sinhronog generatora ima 300 ob/min . Generator je konstruisan za frekvenciju $f = 50$ Hz. Koliko treba pari polova da ima navedeni generator ?

1.12. U kojem će trenutku trenutna vrednost naizmenične struje biti jednaka njenoj srednjoj vrednosti, ako je njena maksimalna vrednost jednaka 26 A, a frekvencija 50 Hz ?

1.13. Odrediti trenutak u kojem će naizmenična struja biti jednaka efektivnoj u predhodnom zadatku ?

1.14. Koliki je fazni ugao pri kojem je trenutna vrednost naizmenične struje jednaka efektivnoj vrednosti ?

1.15. Koliku frekvenciju ima generator koji rotira brzinom $n = 1\,000$ ob/min, a ima tri para polova ($p = 3$) ?

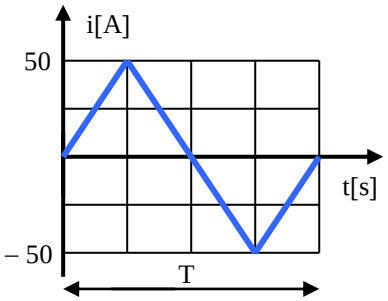
1.16. Kojom brzinom treba da se obrće rotor sinhronog generatora koji je predviđen za frekvenciju $f = 1\,000$ Hz, a ima šest pari polova ($p = 6$) ?

1.17. Magnetni fluks elektromagneta ima maksimalnu vrednost $\Phi_m = 2 \cdot 10^{-2}$ Wb. Ako taj elektromagnet rotira unutar kalema sa $N = 400$ navojaka brzinom od 3 000 min^{-1}, odrediti izraz za trenutnu vrednost ems e.

1.18. Naizmenična struja ima efektivnu vrednost $I = 20$ A i frekvenciju $f = 50$ Hz. Vreme se počima meriti od trenutka kada struja raste od nule. Odrediti trenutak t_1 odnosno t_2 kada su trenutne vrednosti tih struja jednake $i_1 = 16$ A i $i_2 = -20$ A.

1.19. Naizmenični (sinusni) napon ima efektivnu vrednost $U = 2$ V. Vreme jedne periode je $T = 10^{-4}$ s. U času kada se počinje meriti vreme napon ima trenutnu vrednost $u_o = 1{,}41$ V. Odrediti izraz za napon $u_{(t)}$. Koju će trenutnu vrednost taj napon ostvariti u trenutku $t' = 10^{-5}$ s ?

1.20.



Sl.1.20.

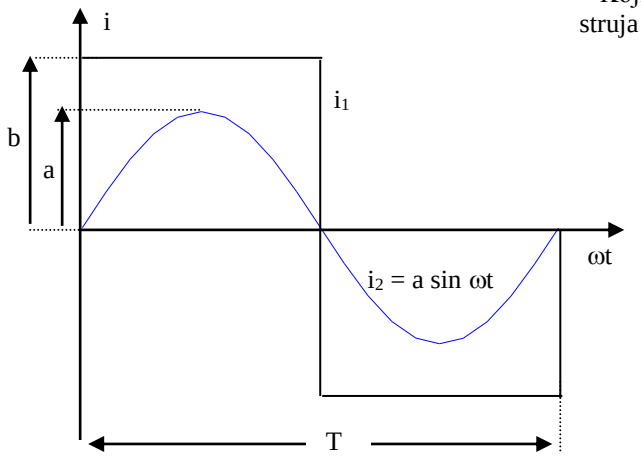
Ako naizmenična struja ima oblik kao na sl.1.20, odrediti njenu maksimalnu, efektivnu i srednju vrednost struje. Rešenja prokomentarisati.

1.21. Kalem pravougaonog oblika obrće se konstantnom brzinom od 3 000 [ob/min = min^{-1}] u magnetnom polju sa jednim parom polova magnetne indukcije 1,59 T. Površina rama je 0,1 m^2. Na ramu se nalaze dva navojka. Naći najveću jačinu indukovane ems u kalemu.

1.22. Odrediti vremenski razmak između pojave maksimalnih vrednosti napona koji se manjaju po zakonima: $u_1 = U_{1m} \sin (\omega t + 15°)$ i $u_2 = U_{2m} \sin (\omega t - 30°)$, ako je učestanost $f = 50$ Hz.

1.23. U električnom kolu protiče prostoperiodična naizmenična struja čija je efektivna vrednost $I = 6$ A, učestanosti $f = 50$ Hz i početnog ugla $\theta = 0$. Kolika je količina elektriciteta q protekla kroz to kolo u toku prve polovine periode ?

1.24.



Sl.1.24.

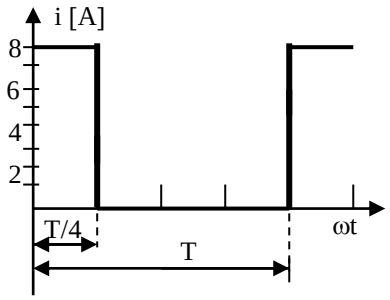
Koji je odnos između efektivnih vrednosti struja i_1 i i_2 prikazanih na sl.1.24, ako je:
$b = a\sqrt{2}$

1.25. Odrediti maksimalnu vrednost napona ako se on menja po zakonu $u = U_m \sin (\omega t + \pi/6)$, ako je njegova trenutna vrednost u početku ($t = 0$) $u = 200$ V.

1.26. Rotor hidrogeneratora ($p = 1$) obrće se brzinom $n = 62,5$ ob/min. Učestanost ems generatora iznosi $f = 50$ Hz. Koliki će ugao preći rotor da bi ems napravila jednu poluperiodu ?

1.27. Pravougli kalem dužine 10 cm i širine 4 cm, sastavljen od 1 000 navojaka obrće se oko svoje osovinice brzinom od 3 000 ob/min u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 0,8$ T. Kako glasi izraz po kojem se određuje trenutna vrednost ems i kolika je njena ugaona brzina ?

1.28.



Sl.1.28.

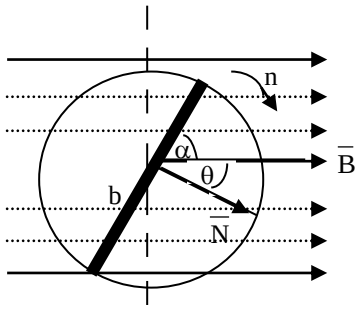
Na slici 7 je prikazana vremenska zavisnost prostoperiodično promenljive struje . Odrediti:

a) njenu srednju vrednost
b) njenu efektivnu vrednost
c) koeficijent oblika k (odnos između efektivne i srednje vrednosti)

1.29. U električnom kolu (čvoru) poznati su podaci dveju struja, i to: frekvencija f = 50 Hz, efektivna vrednost struje i_1 $I_1 = \sqrt{2}/2$ mA i početni ugao (faza) $\theta_1 = 0$, zatim maksimalna vrednost struje i_2 $I_{2m} = \sqrt{2}$ mA i nepoznati početni ugao θ_2 koji je veći od nule ($\theta_2 > 0$).

a) odrediti početni ugao struje i_2 ako se zna da su nakon vremenskog intervala od 15 ms obe struje jednake.
b) Kolika je bila vrednost struje i_2 na samom početku (t = 0) ?

1.30.



Sl.1.30.

Namotaj sastavljen od N pravougaonih navojaka, prema sl.1.30, stranice a i b, nalazi se u homogenom magnetnom polju i okreće se stalnom brzinom od n oko svoje duže ose, koja zatvara prav ugao sa vektorom magnetne indukcije B, prema sl.8. Pojavu posmatramo od trenutka kada je površina kalema zaklapala ugao α sa vektorom B. Odrediti:

a) izraz za trenutnu vrednost indukovane ems e u namotaju;
b) maksimalnu vrednost E_m, efektivnu vrednost E, učestanost f i početnu fazu θ indukovane ems e;
c) vrednost indukovane ems e kada se namotaj okrene za ugao α_1 od početnog položaja.

Brojni podaci : N = 100 nav.; a = 10 cm; b = 5 cm; $\alpha = \pi/3$ rad, n = 1 000 ob/min; B = 0,2 T; $\alpha_1 = \pi/6$ rad.

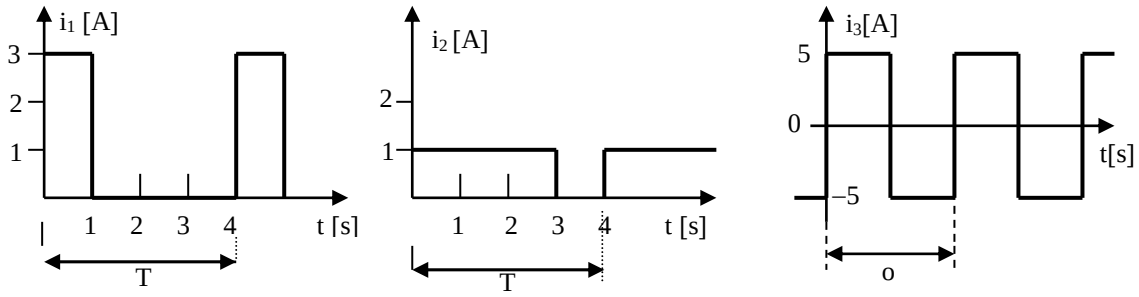
1.31. Elektromotorne sile e_1 i e_2 dvaju generatora date su u sledećim izrazima:
$e_1 = 60 \sin (628t + \pi/3)$: $e_2 = 40 \sin (628t - \pi/9)$ [V]. Za obe elektromotorne sile odrediti sve parametre naizmenične struje i nacrtati njihov grafikon (sinusoide).

1.32. Naizmenična ems e_1 data je sledećim izrazom: $e_1 = E_{1m} \sin (\omega t + \theta_1)$ V.
Odrediti:

a) izraz za ems e_2 koja ima istu maksimalnu vrednost i istu učestanost kao e_1, a fazna razlika između e_1 i e_2 je θ_{12}:
b) izraz za ems e_3 koja ima istu učestanost kao e_1 , maksimalnu vrednost dvostruko manju od e_1 a vremenski pomak između e_1 i e_3 je t_{13}.

Brojni podaci: E_{1m} = 282 V; $\theta_1 = -20°$; $\theta_{12} = -80°$; f = 50 Hz; t_{13} = 5/3 ms.

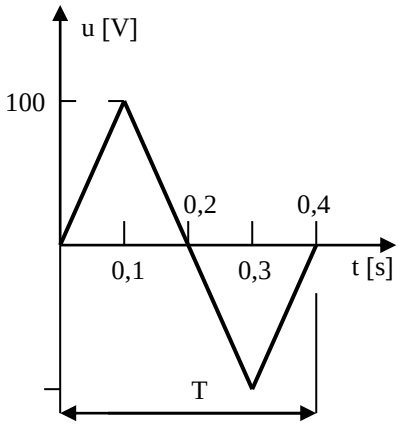
1.33.



Sl.1.33.

Za periodične struje $i_1(t)$, $i_2(t)$ i $i_3(t)$ prema sl.1.33. odrediti srednje i efektivne vrednosti struja.

1.34.



Za napon čiji je talasni oblik predstavljen na slici 1.34. odrediti srednju i efektivnu vrednost napona.

Sl.1.34.

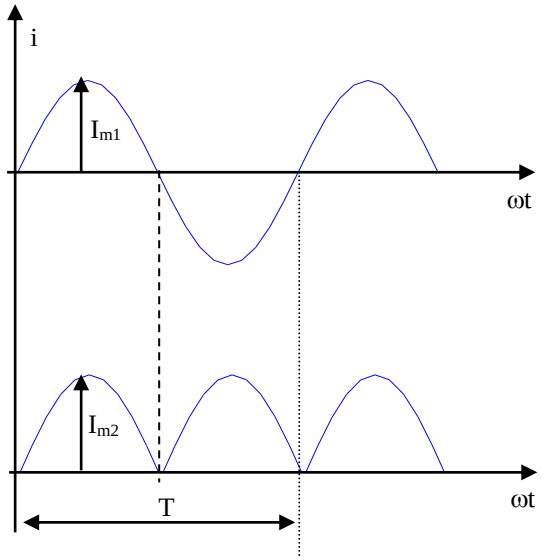
1.35. Izrazi za intezitet dva napona, prema istom referentnom smeru, su:
$u = U_m \sin(100\pi t + 60°)$ i $u' = U_m \cos(100\pi - 120°)$.
Koliki je vremenski pomak između ovih napona ?

1.36. Prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 40\sqrt{2}$ mA i učestanosti $f = 400$ Hz ima u trenutku određenom sa $t_1 = 1{,}25$ ms od početnog trenutka intezitet $i_1 = -40$ mA i smanjuje se po intezitetu (raste u suprotnom smeru). Napisati izraz za intezitet ove struje i nacrtati grafički (vremenski) dijagram.

1.37. Intezitet struje jedne grane, prema referentnom smeru i početnom trenutku, je dat izrazom:
$i_1 = 60\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/3)$ mA.
Struja druge grane, i_2, je prostoperiodične kružne učestanosti ω i dva puta manje efektivne vrednosti od efektivne vrednosti struje i_1. Napisati izraz za intezitet struje i_2 ako ona:

a) fazno prednjači struji i_1 za $3\pi/5$,
b) fazno kasni (zaostaje) za strujom i_1 za $3\pi/2$, i
c) nalazi se u protivfazi (opoziciji) sa strujom i_1.

1.38.



Sl.1.38.

Ako su maksimalne vrednosti prema sl.1.38. međusobno jednake ($I_{m1} = I_{m2}$) odrediti kakav je odnos između:

a) efektivnih vrednosti struja (I_1/I_2),
b) srednjih vrednosti struja (I_{S1}/I_{S2})?

1.39. Ako se magnetni fluks kroz kalem, koji sadrži N = 100 navojaka, menja po zakonu: $\phi = 2 \cdot 10^{-3}$ sin 100 t [Wb], odrediti izraz po kojem zakonu se menja indukovana ems e u kalemu.

1.40. Prostoperiodični napon ima vrednost $u_o = \sqrt{3}$ V za $t_o = 0$ i $u_1 = 3$ V za $t_1 = T/4$. Kolika je efektivna vrednost navedenog napona i kolika mu je početna faza ?

1.41. Kolika je vrednost naizmeničnog napona gradske mreže U = 220 V, f = 50 Hz nakon 1/300 sekunde, posle njegove maksimalne vrednosti ?

2. PREDSTAVLJANJE NAIZMENIČNIH VELIČINA

Naizmenične veličine možemo predstaviti na sledeće načine:

2.1. Analitički (trenutno),
2.2. Grafički (vremenski),
2.3. Vektorski (fazorski) i
2.4. Kompleksno

2.1. ANALITIČKO PREDSTAVLJANJE NAIZMENIČNIH VELIČINA

Ovim načinom predstavljanja daje se trenutna vrednost naizmenične veličine koja je u funkciji sa vremenom. Izrazi su $i_{(t)} = f(t)$; $u_{(t)} = f(t)$; $e_{(t)} = f(t)$ itd. Kako su ovo trenutne vrednosti koje zavise od vremena (trenutka) t logičan je njih naziv predstavljanja ″ trenutno ″. Ovaj način predstavljanja prikazuje sve parametre naizmenične struje. Očito je da smo to već koristili ne vodeći računa kako se on naziva.

2.2. GRAFIČKO (VREMENSKO) PREDSTAVLJANJE NAIZMENIČNIH VELIČINA

Ovo predstavljanje je tzv. dijagramsko predstavljanje (sl.5.b), jer se naizmenična veličina prikazuje u vidu jedne oscilacije (sinusoide). Ovim načinom predstavljanja jasno se vide sledeće vrednosti: *a) trenutne vrednosti naizmeničnih veličina u bilo kojem trenutku, b) maksimalna vrednost, c) početna faza (ugao) i c) vreme trajanja perioda T*. I ovaj način predstavljanja smo do sada koristili ne vodeći računa o nazivu.

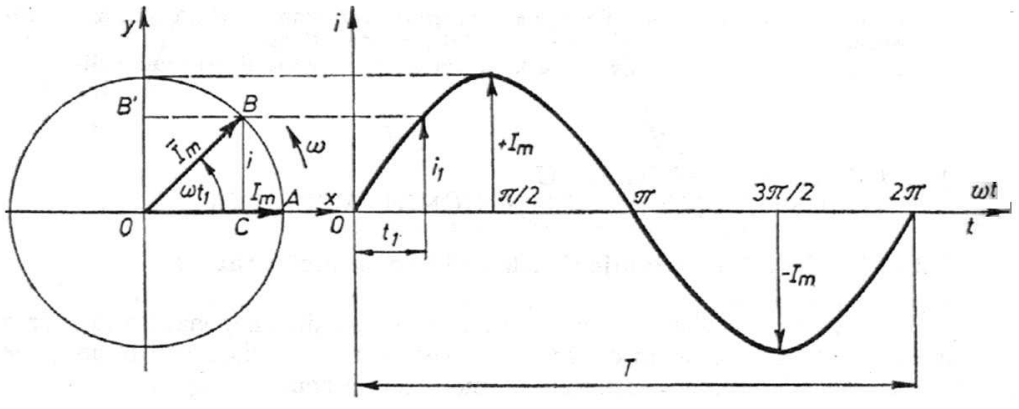
2.3. VEKTORSKO (FAZORSKO) PREDSTAVLJANJE

Predhodna dva načina predstavljanja su u određenim slučajevima nepraktična (kod sabiranja, oduzimanja… više naizmeničnih veličina). Iz toga razloga su pronađene alternative pomoću kojih se te operacije svode na jednostavniji oblik. Jedna od tih alternativa je vektorsko (fazorsko) predstavljanje (sl.5a). ***Fazor** je u stvari jedna naizmenična veličina predstavljena simbolčno pomoću obrtnog vektora, čime je analiza električnih kola postala jednostavnija.* Dogovorom je usvojen pozitivan smer obrtanja fazora ako se on obrće suprotno od smera kazaljke na satu. Vektori predstavljaju određene sile koje su statične (imaju pravac smer i intezitet), kao npr. mehaničke sile F, vektor magnetne indukcije B itd. Usled obrtanja navoja u magnetnom polju u navoju se indukuje ems e koja menja svoj pravac, smer i intezitet. Ovu promenu možemo prikazati simbolično jednim vektorom koji se u stvari naziva **fazorom.** *Dakle, fazor je naizmenična veličina predstavljena u obliku vektora*. Ovaj način predstavljanja u sebi sadrži sledeće parametre:

a) intezitet koji predstavlja vrednost naizmenične veličine (najčešće efektivnu, mada može i srednju ili maksimalnu). Ova vrednost se često naziva **fazom.**
b) početni ugao (pravac i smer fazora) naizmenične veličine (faze).

Kako svi navedeni načini predstavljanja govore o istoj električnoj veličini logično je da između njih postoji logična povezanost, tj. sa jednog oblika lako se prelazi na drugi i obrnuto.

U matematici sinusoida se konstruiše pomoću obrtanja poluprečnika (fazora). Prenošenjem svih tačaka koje opisuje vrh fazora (poluprečnika) na vremenski dijagram (izjednačavajući uglove) kružnica se transformiše u jednu sinusoidu , što je prikazano na slici 5.



a) b)

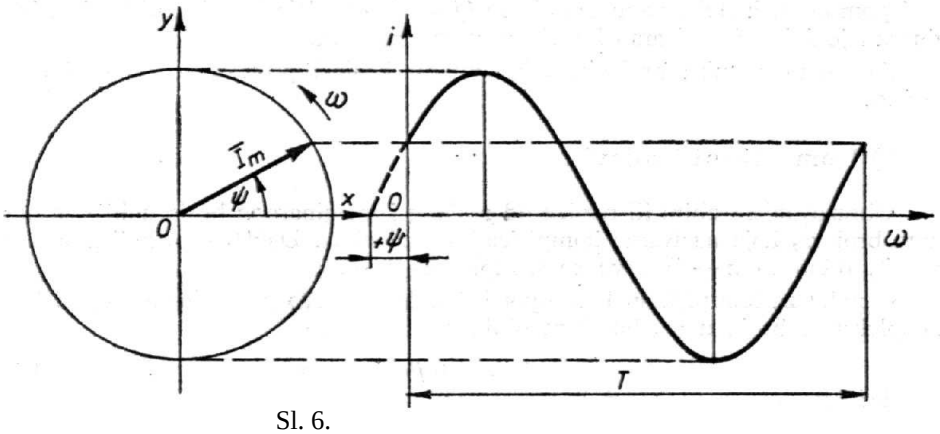
Sl.5.

Početni položaj fazora OA simbolično predstavlja maksimalnu vrednost naizmenične struje I_m. Prems sl.5. početni ugao jednak je nuli pa je fazor poklopljen sa x osom. To znači da je x osa (apscisa) referentna osa koja se naziva **faznom osom.** Ako je fazor u faznoj osi (naizmenična veličina startuje sa nulom) tada i sinusoida startuje sa nulom. Svako pomeranje vektora OA (fazora I_m) menja ugao ωt, a samim tim menja i trenutnu vrednost struje i.

Kada je fazor I_m prešao ugao $\omega t_1 \Rightarrow \sin \omega t_1 = \overline{BC}/\overline{OB} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{OB} \cdot \sin \omega t_1 = I_m \sin \omega t_1$

Vidimo da će projekcija fazora I_m po ordinati (y osi) predstavljati trenutnu vrednost naizmenične struje.

Početak fazora može biti bilo koji (ne samo iz fazne ose). U ovom slučaju fazni ugao fazora je $\omega t + \psi$, a analitički izraz naizmenične veličine iznosi $i = I_m \sin (\omega t + \psi)$, što je prikazano na sl.6.



Sl. 6.

Prema sl.5 i sl.6 krugovi su crtani zbog grafičkog dijagrama (sinusoida), radi lakšeg objašnjenja. U praksi se oni ne crtaju, pogotovo kada se crta samo jedan dijagram.

Fazori se simbolično predstavljaju crticom iznad (po novon ispod) velikog latiničnog slova (simbol efektivne, srednje ili maksimalne vrednosti). Dakle, $\underline{U}$; $\underline{I}$; $\underline{E}$; ($\underline{U}_S$; $\underline{I}_S$; $\underline{E}_S$; $\underline{U}_m$; $\underline{I}_m$; $\underline{E}_m$ …)

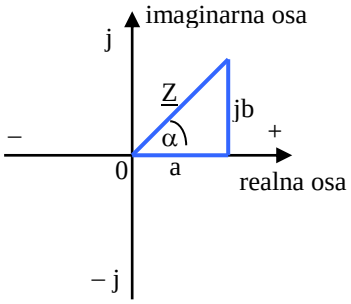
2.4. PREDSTAVLJANJE NAIZMENIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM BROJEM

Kompleksni broj *je broj koji čini zbir realnog i imaginarnog broja.* Imaginarni broj je negativni broj pod korenom. Da bi on postao pozitivan množi se sa -1. Na ovaj način se vadi koren iz pozitivnog broja i rešenje se množi sa $\sqrt{-1}$. Ova vrednost predstavlja imaginarnu jedinicu koja se obeležava sa **j**. Dakle, $j=\sqrt{-1}$.
U matematici umesto **j** koristi se oznaka **i.** Jasno je da zbog analitičkog izraza struje **i** u elektrotehnici to nije praktično.

Ako sa **a** obeležimo realni deo kompleksnog broja a sa **b** imaginarni deo kompleksnog broja, tada će kompleksni broj (obeležimo ga sa $\underline{Z}$) biti jednak: $\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{a + jb.}$

Često se koriste konjugovano kompleksni brojevi, a to je kompleksni broj kojem se promeni predznak ispred j. Dakle, konjugovano kompleksni broj (oznaka $\underline{Z}^*$) predhodnom kompleksnom broju je**:** $\underline{\mathbf{Z}}^* \mathbf{a - jb}$.

Grafičko predstavljanje kompleksnog broja



Sl.7.

Prema sl.7 na realnoj osi (apscisi) nalaze se realni brojevi, a na imaginarnoj osi (ordinati) su imaginarni brojevi.Na osnovu ovih brojeva može se kompleksni broj $\underline{Z}$ napisati u obliku:
$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{a + jb}$, koji se naziva **algebarski oblik kompleksnog broja**. Vidimo da kompleksni broj sa svojim projekcijama čini jedan pravougli trougao iz kojeg sledi:

$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ što predstavlja modul kompl. broja.

Ugao α se naziva argumentom kompleksnog broja i on se može odrediti pomoću tangesa (cos α ili sin α):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Kako je (sl.7) $\cos\alpha = a/Z$, odnosno $\sin\alpha = b/Z \Rightarrow a = Z\cos\alpha$, $b = Z\sin\alpha$, te se algebarski oblik kompleksnog broja može predstaviti u obliku:

$$\underline{Z} = Z(\cos\alpha + j\sin\alpha),$$ koji se naziva **trigonometrijski oblik kompleksnog broja**.

U matematici je poznat tzv. Ojlerov broj $e^{j\alpha}$ koji je jednak : $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$, pa se trigonometrijski oblik kompleksnog broja lako transformiše u Ojlerov oblik koji se još naziva i **eksponencijalni oblik kompleksnog broja.** Dakle, eksponencijalni oblik kompleksnog broja, za sl.7, iznosi:

$$\underline{Z} = Z e^{j\alpha}$$

Pored navedenih oblika kompleksnog broja može se koristiti oblik**:**

$\underline{Z} = Z\angle\alpha$, koji se naziva **konvencionalni oblik kompleksnog broja (oblik modula i argumenta)**.

U praksi se uglavnom koriste predhodna tri (algebarski, trigonometrijski i eksponencijalni) , jer konvencionalni oblik je identičan eksponencijalnom obliku pa je njihova primena ista.

Da se primetiti da je simbol kompleksnog broja isti kao i fazora, što je i logično, jer se svaki vektor može razložiti na komponente (po x i y osi) koje formiraju pravougli trougao (isto kao i kompleksni broj). To znači da se svaki vektor može simbolično predstaviti kompleksnim brojem i obrnuto. Izvesne razlike koje postoje sa stanovišta naše struke nisu značajna. Već je konstantovano da se naizmenične veličine mogu predstaviti vektorom (fazor), a samim tim i kompleksnim brojem.

Svi ovi načini predstavljanja naizmeničnih veličina (analitički, fazorski, grafički i kompleksno) su međusobno povezani (jer govore o istoj veličini). Zbog toga je dovoljno imati naizmeničnu veličinu u jednom obliku. Naravno iz tog oblika prelazi se u svaki drugi, poštujući određena pravila. Koristi se uvek onaj oblik koji je najracionalniji (najjednostavniji).

OSNOVNE RAČUNSKE OPERACIJE SA NAIZMENIČNIM VELIČINAMA

SABIRANJE I ODUZIMANJE

a) Sabiranje i oduzimanje u analitičkom obliku

Da bi se naizmenične veličine mogle sabrati analitički treba poznavati trigonometrijski račun. Taj postupak je dosta složen, a kako postoje jednostavnija rešenja, tada se u ovom obliku retko sabiraju i oduzimaju naizmenične veličine. Za znatiželjnije neka pogledaju rešenje zadataka 2.4.

b) Sabiranje i oduzimanje u grafičkom obliku

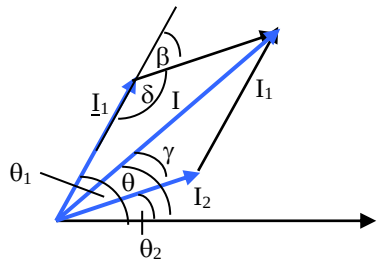
Kada se nacrtaju grafikoni (dve ili više oscilacija), tada se jednostavno sve trenutne vrednosti na dijagramu međusobno saberu, odnosno oduzmu. Tačnost dijagrama (grafika) zavisi od broja različitih vremena, tj. trenutnih vrednosti koje smo uzeli za proračun. I ovaj način je nepraktičan, pa se zbog mogućnosti boljeg rešenja koristi druga metoda. Način primene ove metode pogledati u rešenju zadataka 2.4. i 2.20.

c**) Sabiranje i oduzimanje u fazorskom obliku**

Postoje dve mogućnosti sabiranja fazora:

1. metoda kosinusne teoreme
2. metoda razlagajućih komponenti (po x i y osi)

Metoda kosinusne teoreme



Sl.8.

Iz kosinusne teoreme intezitet (modul) fazora I^2, sl.8 je:

$\mathbf{I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2\, I_1\, I_2 \cos\delta.}$

Ugao δ odredimo iz fazora $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$, tj. iz njihovih početnih uglova .

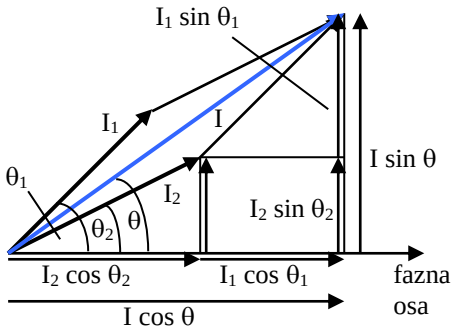
Dakle, $\delta = 180° - \beta = 180 - (\theta_1 - \theta_2)$.

Iz kosinusne teoreme: $I_1^2 = I^2 + I_2^2 - 2\, I\, I_2 \cos\gamma$ odredimo ugao γ, a nakon toga ugao θ jer je : $\theta = \theta_2 + \gamma$.

Ugao θ se može odrediti i na drugi način (sinusna teorema, razlaganje fazora $\underline{I}$ na komponente …).

Nakon rešenja I i θ dobijenu naizmeničnu veličinu možemo predstaviti fazorski, po potrebi i analitički i grafički.

Metoda razlaganja fazora



Sl.9.

Razlaganjem fazora I_1, I_2 i I, prema sl.9, nastaju pravougli trouglovi iz kojih sledi zaključak da je:
$I\cos\theta = I_1\cos\theta_1 + I_2\cos\theta_2$, odnosno,
$I\sin\theta = I_1\sin\theta_1 + I_2\sin\theta_2$.
Intezitet rezultantnog fazora po Pitagori iznosi:

$$I = \sqrt{(I\cos\theta)^2 + (I\sin\theta)^2}\ ,$$

Početni ugao fazora I iz pravouglog trougla iznosi:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{I\sin\theta}{I\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{I\sin\theta}{I\cos\theta}$$

Na osnovu modula struje I i ugla (argumenta) θ ovu naizmeničnu veličinu (fazor) lako je predstaviti u svim ostalim oblicima (analitički, grafički i kompleksno. Postupak je isti i kod više naizmeničnih veličina.

d) Sabiranje i oduzimanjenaizmeničnih veličina u kompleksnom broju

Prilikom sabiranja i oduzimanja kompleksnih brojeva jednostavno saberemo sve realne brojeve posebno a to isto uradimo i sa imaginarnim brojevima. Ukupni zbir daje rešenje rezultantnog kompleksnog broja. *Sabirati i oduzimati kompleksne brojeve možemo samo u algebarskom obliku.*.Naravno, ovo rešenje možemo predstaviti u svim preostalim oblicima.

Množenje i deljenje kompleksnog broja

Kompleksne brojeve možemo množiti i deliti u svim oblicima, ali najpraktičniji su algebarski i eksponencijalni oblik. Iz tog razloga sledi njihovo objašnjenje na jednom primeru. Ako pretpostavimo da su data dva fazora u algebarskom obliku kompleksnog broja, i to: $\underline{U} = 80 + j\,60$ i $\underline{I} = 4 - j\,3$, odrediti: a) njihov proizvod i b) njihov količnik

Rešenje:
Ako algebarski oblik pretvorimo u eksponencijalni, navedeni fazori imaju slede izraze: $\underline{U} = 100\cdot e^{j\,36{,}87^\circ}$, odnosno $\underline{I} = 5\cdot e^{-j\,36{,}87^\circ}$.

a) $\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I} = (80 + j\,60)\cdot(4 - j\,3) = 320 + j\,240 - j\,240 - j^2\,180 = 500 + j\,0 = 500.$
ili $\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I} = 100\cdot e^{j\,36{,}87^\circ}\cdot 5\cdot e^{-j\,36{,}87^\circ} = 100\cdot 5\cdot e^{j\,36{,}87^\circ + (-36{,}87^\circ)} = 500\cdot e^{j\,0} = 500.$

b) $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = \dfrac{80 + j60}{4 - j3}\cdot\dfrac{4 + j3}{4 + j3} = 5{,}6 + j19{,}2 \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = 20\cdot e^{j\,73{,}47}$, jer je:

$$Z = \sqrt{5{,}6^2 + 19{,}2^2} = 20\ ,\ \text{odnosno}\quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{19{,}2}{5{,}6} = 73{,}47^{\mathrm{O}};$$

ili $\underline{Z} = \dfrac{100\cdot e^{j36{,}87}}{5\cdot e^{-j36{,}87}} = 20\cdot e^{j(36{,}87-(-36{,}87))} = 20\cdot e^{j73{,}47}$.

Vidimo da je rešenje isto, što znači da se koristi onaj oblik koji je jednostavniji (najčešće onaj oblik u kojem su dati fazori. Iz jednog oblika lako se transformišemo u drugi, a samim tim možemo naizmeničnu veličinu predstaviti u svim ostalim oblicima.

Kompleksni broj je nemoguće izbeći kod rešavanja složenih naizmeničnih kola, pa iz tog razloga sve njegove računske operacije moraju nam biti poznate.

Z A D A C I :

2.1. Struja $i_1 = 10 \sin (\omega t + \pi/4)$ prednjači struji i_2 za ugao $3\pi/4$. Napisati analitički izraz za struju i_2 ako je njena maksimalna vrednost jednaka $I_{m2} = 5$ A.

2.2. Struju $i = 10 \sin (\omega t + \pi/4)$ predstaviti fazorski, grafički i kompleksno u svim oblicima.

2.3. Datu struju u kompleksnom obliku $\underline{I} = 10 + j\,10$ napisati analitički.

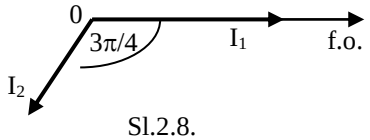
2.4. Odrediti zbir struja i_1 i i_2 na sve načine (analitički, grafički, fazorski i kompleksno) ako je $i_1 = 5 \sin (\omega t + \pi/4)$ a $i_2 = 5 \cos (\omega t + \pi/4)$.

2.5. Sabrati struje $\underline{I}_1 = I$, $\underline{I}_2 = I \cdot e^{-j\,2\pi/3}$ i $\underline{I}_3 = I \cdot e^{-j\,4\pi/3}$.

2.6. Sabrati struje $\underline{i}_1 = 10 \sin (\omega t + \pi/3)$ i $\underline{I}_2 = -j\,5\sqrt{2}$.

2.7. Ako su promene ems dvaju generatora vrši po zakonima $e_1 = 200 \sin (314t + 10°)$ [V] i $e_2 = 300 \sin (314\,t - 35°)$ [V], odrediti analitički izraz za promenu napona na priključnicama redne veze ovih generatora (padovi napona zanemarljivi). Nacrtati fazorski dijagram.

2.8.



Sl.2.8.

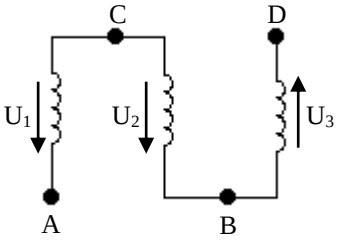
Struje i_1 i i_2 su prikasane fazorima na slici 2.8. Ako su efektivne vrednosti (faze) tih struja $I_1 = 3\sqrt{2}$ A i $I_2 = 2$ A, odrediti analitički izraz za struju i_o koja je jednaka $i_o = i_1 - i_2$.

2.9. Za date struje $i_1 = 10 \sin (\omega t + \pi/3)$ [A] i $i_2 = 10 \cos (\omega t + \pi/3)$ [A] odrediti njihovu razliku $i_o = i_1 - i_2$. Nacrtati fazorski i grafički dijagram.

2.10. U jednom čvoru nalaze se tri grane. Referentni smer struja uzet je od čvora. U dve grane poznate su jačine struja i one iznose: $i_1 = 10 \cos 25\,t$ i $i_2 = 5 \cos (25\,t - 45°)$, koje ulaze u dati čvor. Izračunati jačinu struje u trećoj grani na sve načine (analitički, grafički, fazorski i kompleksno).

2.11. Na napon izvora $U = 220$ V priključena su dva potrošača. Na prvom potrošaču izmeren je napon $U_1 = 175$ V, koji je za $\psi_1 = 60°$ fazno pomeren u odnosu na napon izvora U. Koliki je pad napona na drugom potrošaču U_2 i koliki je njegov fazni pomak ψ_2 u odnosu na napon izvora U ako su potrošači u rednoj vezi. Zadatak rešiti fazorski i kompleksno.

2.12.



Sl.2.12.

Data su tri kalema vezana prema slici 2.12. Između odgovarajućih tačaka na slici treba odrediti napone U_{BA} i U_{CD}. Naponi $U_1 = U_2 = U_3 = 100$ V međusobno su pomereni unazad za uglove $\theta = 60°$ ($\theta_{12} = -60°$, $\theta_{23} = -60°$). Zadatak rešiti fazorski i kompleksno.

2.13. Kroz tri potrošača, koji su paralelno priključeni na naizmenični napon, protiču struje $i_1 = 2 \sin \omega t$, $i_2 = 3 \sin (\omega t - 30°)$ i $i_3 = \sin (\omega t + 45°)$. Odrediti ukupnu struju u kolu fazorskom i kompleksnom metodom.

2.14. Dva redno spojena generatora proizvode napone 240 i 200 V, koji su međusobno fazno pomereni za 25°. Odrediti ukupan napon, ako su naponi pojedinačnih generatora istih frekvencija.

2.15. Kroz dve paralelne grane protiču struje $\underline{I}_1 = 8 \cdot e^{j\,0°}$ A i $\underline{I}_2 = 6 \cdot e^{j\,30°}$ A. Kolika je ukupna struja ?

2.16. Kroz dve paralelne grane prolaze struje $\underline{I}_1 = 5 \cdot e^{-j\,60°}$ A i $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\,\theta}$. Odrediti struju $\underline{I}_2$, ako je ukupna struja $\underline{I} = 5 \cdot e^{j\,36°52'}$ A.

2.17. Date su ems $e_1 = 10 \sin (314\,t - 60°)$, $e_2 = 20 \sin 314\,t$, $e_3 = 10 \sin (314\,t + 30°)$, $e_4 = 15 \sin (314\,t + 90°)$ i $e_5 = 25 \cos (314\,t + 120°)$. Odrediti kolika je ukupna ems e, ako je ona jednaka zbiru svih pojedinačnih ($e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$). Zadatak rešiti vektorskom (fazorskom) i kompleksnom metodom. Kolike su ems u samom startu i šta potvrđuju dobijena rešenja ?

2.18. Izračunati razliku dvaju napona $U_1 = U_2 = 120$ V ako je njihova fazna razlika $\theta = \pi/3$ rad. Kolika je početna faza rezultantnog napona ?

2.19. Dva generatora, istog smera delovanja, naizmeničnih ems e_1 i e_2 jednakih učestanosti vezani su na red. Ako su poznati izrazi za ems e_1 i za rezultantnu silu ems e, odrediti izraz ems e_1.
Brojni podaci: $e_1 = 50 \sin \omega t$ V; $e = 30 \sin (\omega t - \pi/6)$.

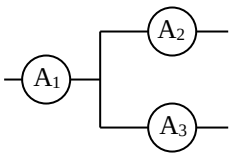
2.20. Četiri ems, koje imaju isti smer delovanja (pozitivan) date su izrazima:
$e_1 = 10 \sin \omega t$ V; $e_2 = 8 \sin (\omega t + \pi/3)$ V; $e_3 = 4 \sin (\omega t - \pi/6)$ V; $e_4 = 6 \sin (\omega t + 3\pi/4)$ V. Ako ems deluju u rednoj vezi istovremeno (pozitivni smer) odrediti rezultantnu silu e.

2.21. Za predhodni zadatak odrediti trenutne vrednosti svih ems u momentu kada je $t = T/3$. Objasniti na datom zadatku drugi Kirhofov zakon (na koje vrednosti i kako se on primenjuje).

2.22. Dva pozitivno vezana generatora (istog smera delovanja) daju ems $e_1 = 141 \sin (314\,t + 30°)$ i $e_2 = 200 \cos (314\,t - 30°)$.

a) U kojem trenutku će napon na krajevima kola biti jednak nuli (pad napona zanemariti) ?
b) Kolike su vrednosti ems e_1 i e_2 kada je $u = U_m$?
c) U kojem trenutku je $e_1 = 0$? Kolike su u tom slučaju vrednosti e_2 i u ?

2.23.

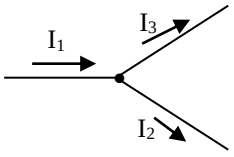


Sl.2.23.

Ako ampermetri prema slici 2.23. pokazuju vrednost $I_1 = I_2 = I_3 = 10$ A (efektivnu), kolike su bile trenutne vrednosti na druga dva ampermetra ako je u prvom bila jednaka $i_1 = 10$ A.
Objasniti primenu prvog Kirhofovog zakona (na koje vrednosti i kako se primenjuje?).

2.24. Ako su kod redne veze prijemnika pojedinačni padovi napona $u_1 = 25 \sin \omega t$ i $u_2 = 25 \cos (\omega t - 30°)$, kolika je efektivna vrednost ukupnog napona ovog kola ? Primeniti metodu koja daje najbrže rešenje.

2.25.



Sl.2.25.

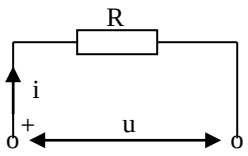
Ako su kompleksni izrazi za struje prema slici 2.25:
$\underline{I}_1 = (20 + j\,30)$ mA i $\underline{I}_2 = (80 - j\,30)$ mA.

a) Odrediti efektivnu vrednost struje I_3 i njenu početnu fazu.
b) Kolika će biti srednja a kolika efektivna vrednost struje I_3 ako se u toj grani nalazi dioda idealnih karakteristika

2.26. Dat je analitički izraz za ems $e = -\dfrac{220}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - 60°)$. Kako glasi kompleksni izraz $\underline{E}$?

3. OTPORI U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE

3.1. KOLO SA SAVRŠENIM TERMOGENIM (AKTIVNIM) OTPOROM

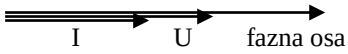


Sl.10.

Ovaj otpor se javlja kod potrošača kod kojih se el. energija pretvara u toplotnu (Džulov zakon) bez povratne reakcije, pa se on još naziva **aktivni otpornik.** Pored Džulova zakona na njemu se primenjuje i Omov zakon. Simbol i način veze je dat na slici 10. Dakle, $W = I^2Rt$, odnosno $I = U/R$, dok je $R = \rho l/S$ (poznato iz elektrokinetike – jednosmerna struja).

Kako je naizmenična struja promenljiva, sledi $i = u/R$. Ako za napon izvora uzmemo da mu je početni ugao jednak nuli, tj $u = U_m \sin \omega t \Rightarrow i = (U_m \sin \omega t)/R = (U_m/R) \sin \omega t = I_m \sin \omega t$.

U kolu sa savršenim termogenim otporom (induktivni i kapacitivni jednak nuli) napon i struja su međusobno u fazi (početni uglovi jednaki). (Za $u = U_m \sin \omega t \Rightarrow i = I_m \sin \omega t$). To znači da se na fazorskom dijagramu ta dva fazora međusobno poklapaju.



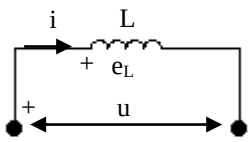
Sl.10.

Sa fazorskog dijagrama, sl.10. lako je preći na grafički kao što je te fazore lako predstaviti i kompleksno.

Iz izraza za trenutnu vrednost struje **i** i napona **u** sledi $I_m = U_m/R \Rightarrow$

$$I = \frac{U}{R}[A]$$ (Omov zakon za jednosmernu struju)

3.2 KOLO SA SAVRŠENIM INDUKTIVNIM OTPOROM (SAVRŠEN KALEM)



Sl.12.

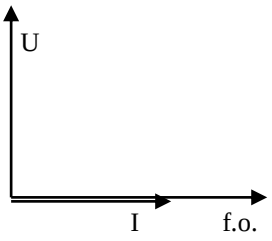
Induktivnost kalema, prema sl. 12, **L** iznosi : $L = N^2\Lambda = N^2\mu S/l$ [H]. Ako pretpostavimo da je kalem savršen (nema druga dva otpora), tada će u kalemu da se indukuje ems samoindukcije e_L koja će biti jednaka naponu u ali suprotnog smera (Lencov zakon). Indukovana ems samoindukcije iznosi:

$e_L = -N d\phi/dt = -Ldi/dt$, pa sledi: $u = -e_L = Ldi/dt$.

Za $i = I_m \sin \omega t \Rightarrow di/dt = \omega I_m \cos \omega t$ (viša matematika: dif. račun).

Dakle, primenjujući prvi izvod , sledi:

$$u = L\cdot\omega I_m \cos \omega t = I_m\cdot\omega L \cos \omega t = U_m \cos \omega t = U_m \sin (\omega t + \pi/2).$$



Sl.11.

Na osnovu analitičkih izraza za napon $u = U_m \sin (\omega t + \pi/2)$ i struju $i = I_m \sin \omega t$, sledi zaključak:

Kod savršenog L kola napon prednjači struji za $\pi/2$, vremenski za T/4.

Fazorski dijagram za savršeno L kolo je prikazan na sl.11. Sa ovog dijagrama, po potrebi, lako se prelazi na grafički (vremenski), kao i na kompleksni broj.

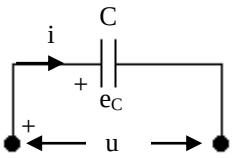
Iz $U_m = I_m\cdot\omega L \Rightarrow U = I\cdot\omega L \Rightarrow \omega L = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = x_L \Rightarrow$

$$\boxed{x_L = \omega L \ [\Omega]}$$

gde je x_L induktivni otpor a **L** induktivnost kalema.

Indukovana ems samoindukcije iznosi $e_L = -u = -U_m \sin (\omega t + \pi/2) = E_m \sin (\omega t - \pi/2)$, jer su fazori U i E_L u protufazi (opoziciji), tj. pomereni za π rad (180°).

3.3. KOLO SA SAVRŠENIM KAPACITIVNIM OTPOROM (KONDENZATOROM)



Sl.14.

Kada se kondenzator nađe u kolu jednosmerne struje njegov otpor (kapacitivni) je beskonačan (prekid kola).

U kolu naizmenične struje, slika 14, kondenzator je provodan (otpor je relativno mali). To se objašnjava time što će se kondenzator pri naizmeničnom naponu naizmenično puniti (napon raste) odnosno prazniti (napon opada). Dakle, kroz kolo protiče naizmenična struja, jer se kondenzator naizmenično puni i prazni.

Kapacitet kondenzatora iznosi:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} [F]$$

Kada se kondenzator nađe u kolu jednosmerne struje njegov otpor (kapacitivni) je beskonačan (prekid kola). U kolu naizmenične struje kondenzator je provodan (otpor je relativno mali). To se objašnjava time što će se kondenzator pri naizmeničnom naponu naizmenično puniti (napon raste) odnosno prazniti (napon opada). Dakle, kroz kolo protiče naizmenična struja, jer se kondenzator naizmenično puni i prazni. Kapacitet kondenzatora iznosi: $C = \varepsilon S/d$ [F].

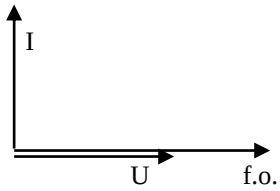
Zbog promenljivog napona količina naelektrisanja u kondenzaturu se menja, pa je: $q = C \cdot u$, odnosno $dq = du \cdot C$. Kako je $Q = It \Rightarrow dq = i \cdot dt \Rightarrow i \cdot dt = C \cdot du \Rightarrow i = C \cdot du/dt$.

Za napon $u = U_m \sin \omega t \Rightarrow du/dt = U_m \cdot \omega \cos \omega t$ (viša matematika – izvodi) $\Rightarrow = C \cdot \omega \cdot U_m \cos \omega t$.

Dakle, za $\mathbf{u} = U_m \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{i} = U_m \cdot \omega C \cos \omega t = I_m \cos \omega t = I_m \sin (\omega t + \pi/2)$.

Sledi, kod savršenog kondenzatora (induktivni i termogeni otpor jednak je nuli) struja prednjači naponu fazno za $\pi/2$ rad (90°), odnosno vremenski prednjači za T/4.

Fazorski dijagram za savršeno C kolo dat je na sl.12. Sa ovog dijagrama lako je preći na sve ostale načine predstavljanja naizmeničnih veličina (struja, napon izvora, napon kondenzatora, otpor ..).



Sl.12.

Iz $I_m = U_m \cdot \omega C \Rightarrow I = U \cdot \omega C \Rightarrow \omega C = I/U \Rightarrow U/I = 1/\omega C = x_C$

Dakle,

$$x_C = \frac{1}{\omega C} [\Omega]$$

gde je: x_C..kapacitivni otpor kondenzatora ili reaktancija (kapacitivna), a C… kapacitet kondenzatora.

Kapacitivni otpor u kolu naizmenične struje javlja se samo dok u kolu teče električna struja.

Tokom punjenja kondenzatora (napon u raste ka maksimalnoj vrednosti), u kondenzatoru se javlja kontraelektromotorna sila e_C. Ova kontraelektromotorna sila se suprostavlja punjenju kondenzatora, pa je ona jednaka naponu izvora, ali suprotnog smera. Ems $\mathbf{e}_C$ je u stvari napon kondenzatora, jer kada otklonimo napon izvora **u** na kondenzatoru ostaje ems e_C.

Ems e_c je kontraelektromotorna sila kada se kondenzator puni, a kada se on prazni ems e_C preuzima ulogu ems.

Ako je napon $u = U_m \sin \omega t \Rightarrow e_C = -u = -U_m \sin \omega t = E_{Cm} \sin (\omega t - \pi)$.

Napon na kondenzatoru iznosi: $U_C = E_C = I\, x_C$.

Z A D A C I :

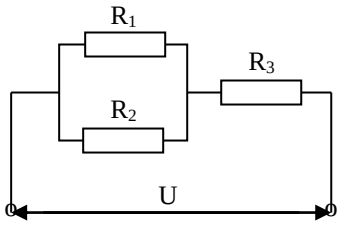
3.1.1. Odrediti trenutnu vrednost napona na koji je priključen otpor otpornosti R = 44 Ω u trenutku t = T/3 ako kroz otpornik protiče struja $i = 10\sqrt{2}$ sin 314 t.

3.1.2. Otpornik $R = 20\sqrt{2}$ Ω priključen je na napon u = 120 sin ωt. Odrediti struju I i nacrtati fazorski dijagram napona i struje.

3.1.3. Odrediti trenutnu vrednost struje ako je u savršenom R kolu otpornost R = 10 Ω, a napon $u = 20\sqrt{2}$ sin 314 t za t = T/4.

3.1.4. Napisati analitički izraz za struju i koja protiče pod dejstvom napona $\underline{U} = (100\sqrt{2} + j100\sqrt{2})$ [V] ako je kolo savršeno termogeno, čija otpornost iznosi R = 20 Ω.

3.1.5.

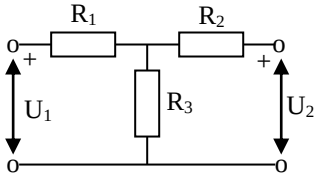


Sl.3.1.5.

Za dato kolo na sl.3.1.5. napisati analitički izraz za sve struje koje prolaze kroz otpornike R_1, R_2 i R_3.

Brojni podaci: $R_1 = 75\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $R_3 = 20\ \Omega$ i $u = 200\sqrt{2}$ sin ωt.

3.1.6.

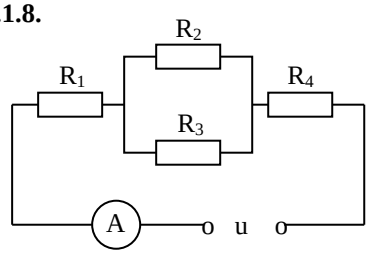


Sl.3.1.6.

Dato je kolo prema slici 3.1.6, gde je $u_1 = 100$ sin ωt, $u_2 = 120$ sin ωt, $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$ i $R_3 = 5\ \Omega$. Odrediti struje u otpornicima R_1, R_2 i R_3.

3.1.7. Savršeno R kolo priključeno je na napon u = 282 sin 461t. Ako ampermetar meri struju I = 14,1 A koliki je otpor R u kolu . Otpornost R predstaviti kompleksno u svim oblicima.

3.1.8.



Sl.26.

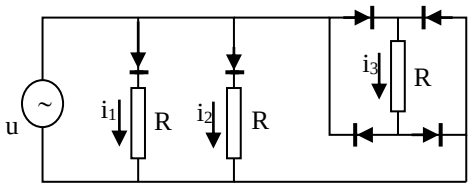
Dato je kolo prema sl.26. Šta pokazuje ampermetar, ako on meri efektivnu vrednost ?
Nacrtati fazorski i grafički dijagram napona i struja.
Brojni podaci : $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 0\ \Omega$; $R_3 = 40\ \Omega$; $R_4 = 5\ \Omega$; $u = 300$ sin ωt.

3.1.9. Napon na krajevima otpornosti priključene na naizmenični napon je $u = 70\sqrt{2}$ cos ωt. Ako ampermetar uključen u kolo pokazuje struju $I = \sqrt{2}$ A, kolika je otpornost R (savršeno R kolo) ?

3.1.10. Mereći napon na termogenom otporu od R = 50 Ω, pri proticanju naizmenične struje čija je frekvencija 50 Hz , voltmetar je pokazao 120 V. Napisati analitički izraz za jačinu struje uz pretpostavku da je početni ugao jednak 30°.

3.1.11. Zadatak 3.1.9. rešiti kompleksno i rešenje napisati u svim oblicima kompleksnog broja.

3.1.12.



Sl.3.1.12.

Tri jednaka aktivna otpornika vezana su paralelno sa diodama (usmeračama), kao na slici 3.1.12, i priključena su na naizmenični napon izraza:

$u = 100 \sin 314\, t$ [V].

Ako je vrednost aktivnog otpornika $R = 10$ [Ω], odrediti:

a) izraze za trenutne vrednosti struja i_1, i_2 i i_3;

b) efektivne vrednosti struja I_1, I_2 i I_3

3.2.1. Kroz kalem induktivnosti $L = 10$ mH protiče struja $i = 10 \sin (314\, t - \pi/2)$. Odrediti izraz za indukovanu ems samoindukcije e_L.

3.2.2. Odrediti induktivnost L kalema kroz koji protiče struja $i = 20 \sin 314\, t$ ako je maksimalna vrednost indukovane ems samoindukcije $E_{mL} = 6{,}28$ V.

3.2.3. Analitički izraz napona na kalemu je: $u = 20 \cos (\omega t + \pi/4)$. Napisati analitički izraz za jačinu struje i ako je kružna učestanost $\omega = 500$ rad/s a induktivnost $L = 200\ \mu$H.

3.2.4. Napisati analitički izraz za struju i u kolu sa savršenim kalemom ako je $u = 100 \sin \omega t$, induktivnost $L = 5$ mH i kružna učestanost $\omega = 100$ rad/s.

3.2.5. Indiktivni navoj $L = 10$ mH (savršeno L kolo) priključen je na napon $U = 62{,}8$ V. Ako je struja u kolu $I = 20$ A, odrediti njenu učestanost f.

3.2.6. Induktivni otpor savršenog navoja iznosi $X_{L1} = 78\ \Omega$ pri učestanosti $f_1 = 500$ Hz. Pri kojoj će učestanosti f_2 induktivni otpor iznositi $X_{L2} = 120\ \Omega$?

3.2.7. Savršeni kalem induktivnosti $L = 50$ mH priključen je na napon izvora efektivne vrednosti 100 V učestanosti 50 Hz. Ako napon nakon vremena $t = T/6$ opadne na nulu, odrediti kolika je struja u tom trenutku ? U kojem trenutku će ta struja biti jednaka nuli ?

3.2.8. Savršeni kalem induktivnosti $L = 200$ mH priključen je na izvor naizmeničnog napona čija je efektivna vrednost $U = 100$ V. Odrediti struja u kolu , ako je učestanost kola: a) $f = 30$ Hz; b) $f = 500$ Hz.

3.2.9. Kroz kalem zanemarljivog termogenog otpora teče struja čija je maksimalna vrednost $I_m = 10$ A. Odrediti induktivnost kalema ako je napon na krajevima kalema dat izrazom $u = 160 \sin 314\, t$.

3.2.10. Kroz kalem induktivnog otpora $X_L = 500\ \Omega$ teče naizmenična struja frekvencije $f = 1\ 000$ Hz. Odrediti maksimalnu vrednost naizmenične struje I_m i induktivnost kalema L ako je efektivna vrednost napona na njegovim krajevima $U = 100$ V. Termogeni otpor kalema zanrmarljiv.

3.2.11. Dva savršena kalema imaju induktivnosti $L_1 = 400$ mH i $L_2 = 200$ mH. Odrediti ukupnu struju kola ako je napon na koji se kalemovi priključe $U = 80$ V , frekvencije $f = 60$ Hz, i to;
a) kalemi redno vezani ; b) kalemi paralelno vezani.
Nacrtati fazorski i grafički dijagram.

3.2.12. Koliki je induktivni otpor, kompleksno napisan, u zadatku 3.2.9. ?

3.2.13. Kako glasi kompleksni izraz za predhodni zadatak ako se maksimalna vrednost napona poveća dva puta a frekvencija smanji dva puta ($u = 320 \sin 157\, t$; $I_m = 10$)?

3.2.14. Napisati u kompleksnom obliku pojedinačnu otpornost kalemova, kao i ukupnu otpornost za zadatak 3.2.11. Da li i kako navedeni izrazi, koji predstavljaju otpornost kola, zavise od analitičkog izraza napona u ?

3.2.15. Idealni kalem induktivnosti $L = 0{,}2$ H priključen je u kolo jednosmerne struje $I = 3$ A. Kolika je efektivna vrednost napona na krajevima ovog kalema? Rešenje prokomentarisati.

3.3.1. Koliki je kapacitet kondenzatora koji se nalazi u kolu naizmenične struje kroz koji protiče struja od I = 5 A, ako je napon na njemu $u = 160\sqrt{2}\sin 100\,t$?

3.3.2. Nacrtati vektorski dijagram napona i struje za kolo sa kondenzatorom ako je njegov kapacitet C = 80 μF a priključeni napon $u = 125\sqrt{2}\cos(100 + \pi/4)$ V.

3.3.3. Na naizmenični napon $u = 282\sin 100t$ priključen je kondenzator C = 40 μF. Kolika je struja koja protiče kroz kondenzator ?

3.3.4. Kondenzator je priključen na napon U = 128 V frekvencije f = 50 Hz. Koliki je kapacitet kondenzatora C ako je struja u kondenzatoru I = 0,2 A ?

3.3.5. Kondenzator kapaciteta C =30 μF priključen je na izvor naizmenične struje. Efektivna vrednost napona iznosi 400 V, a frekvencija je 50 Hz. Odrediti:
a) reaktansu kondenzatora (kapacitivni otpor) X_C; b) efektivnu vrednost struje u kolu.
Rešenja napisati u kompleksnom broju (svi oblici).

3.3.6. Kondenzator kapaciteta C = 318 μF vezan je na izvor napona $u = 100\sqrt{2}\sin(314\,t - \pi/6)$.
Odrediti:
a) struju u kolu; b) kapacitivnu otpornost pri frekvenciji f = 500 Hz: c) struju pri f = 500 Hz, i istom naponu.
Sva rešenja napisati u kompleksnom broju. Da li reaktansa, kompleksno , zavisi od napona U i struje I ?

3.3.7. Kondenzator kapaciteta 50 μF priključen je na izvor naizmeničnog napona frekvencije 1 KHz. Kolika je maksimalna vrednost jačine struje u kolu ako je efektivna vrednost napona na pločama kondenzatora 20 V ?

3.3.8. Dva kondenzatora, jedan od 50 μF, a drugi od 10 μF, vezana su u kolo naizmenične struje:
a) redno; b) paralelno. Uporediti kapacitivni otpor redne i paralelne veze ovih kondenzatora.
Frekvencija je 50 Hz.
Napisati kapacitivne otpore (pojedinačno i ukupno) u kompleksnom broju (svi oblici).

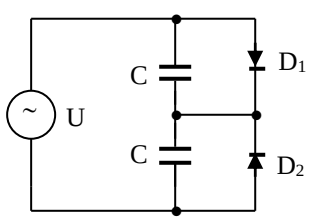
3.3.9. Otpornik otpornosti R = 100 Ω priključen je na izvor prostoperiodičnog napona efektivne vrednosti 100 V. Na isti izvor priključena su paralelno i jedan kondenzator i kalem (savršeni). Izračunati kapacitivnost kondenzatora C i nduktivnost kalema L kroz koje će proticati struja iste efektivne vrednosti kao i kroz otpornik R. Učestanost izvora je : a) 50 Hz; b) 1 KHz; c) 1 MHz i d) 1 GHz.

3.3.10. U predhodnom zadatku napisati u kompleksnom broju termogeni otpornik R, kapacitivni X_C i induktivni X_L. Da li ova rešenja zavise od kompleksnog oblika napona U i struje I ? Dati potreban komentar.

3.3.11. Kondenzator je priključen na generator naizmenične ems promenljive frekvencije. Koliki je odnos efektivnih struja (I_1/I_2) koje protiču kroz kondenzator pri frekvencijama f_1 = 10 KHz i f_2 = 1 KHz ?

3.3.12. Kroz kondenzator čiji je razmak između ploča d = 2 mm, protiče naizmenična struja efektivne vrednosti I = 2 A. Koliki treba da bude razmak ploča da bi efektivna vrednost struje iznosila I_1 = 4 A ?
Napon i frekvencija na kondenzatoru su konstantni.

3.3.13.



Sl.3.3.13.

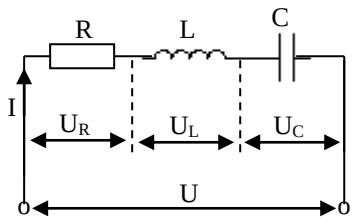
U kolu naizmenične struje, prikazanom na slici 3.3.13, nalaze se dva kondenzatora, jednakih kapacitivnosti C i dve diode idealnih karaktiristika. Kružna učestanost napona izvora je ω.
Kolika je:
a) ekvivalentna kapacitivnost kola,
b) impedansa kola ?

Rešenja obrazložiti !

4. V E Z A O T P O R A U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE

4.1. R E D N A V E Z A

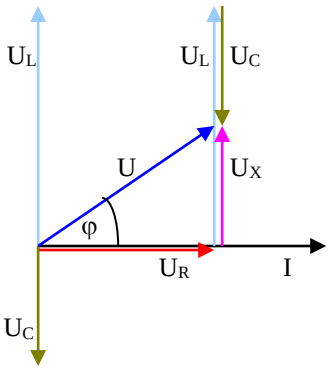
4.1.1. REDNA VEZA R, L I C



Sl.10.

Kod redne veze R, L i C, sl.10, struja I je zajednička (za sva tri otpora) pa će mo u odnosu na nju posmatrati napone u kolu.
Radi jednostavnosti početni ugao za struju neka bude jednak nuli, pa je njen analitički izraz **$i = I_m \sin \omega t$**. Analitički izrazi za padove napona na R , L i C su: **$u_R = U_{Rm} \sin \omega t$**, **$u_L = U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2)$** i **$u_C = U_{Cm} \sin (\omega t - \pi/2)$.**
Iz ovih analitičkih izraza lako se prelazi na preostale načine predstavljanja (fazorski, grafički i kompleksno).

Efektivne vrednosi pojedinačnih padova napona su $U_R = R \cdot I$; $U_L = X_L \cdot I$ i $U_C = X_C \cdot I$.
Ako pretpostavimo da je $X_L > X_C \Rightarrow U_L > U_C$, fazorski dijagram će biti kao na slici 11.



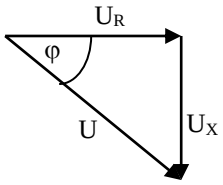
Sl.11.

Kako su U_L i U_C istog pravca i suprotnog smera, njihov vektorski zbir daje rezultantu čija je vrednost jednaka: $U_X = U_L - U_C$.
Ukupni napon, prema drugom Kirhofovom zakonu jednak je:
$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_R + \underline{U}_X$; odnosno: $u = u_R + u_L + u_C = u_R + u_X$.
Iz fazorskog dijagrama (sl.11.) vidimo da su kod redne veze R,L i C naponi **U, U_R i U_X** stranice pravouglog trougla, pa se ovaj dijagram i naziva **trougao napona .**

Iz trougla napona sledi:

$$U = \sqrt{U_R^{\,2} + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^{\,2} + U_X^{\,2}}$$

Kada je **$X_L > X_C \Rightarrow \varphi > 0$**, što znači da **napon prednjači struji za ugao φ** (za $i = I_m \sin \omega t \Rightarrow u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$).



Sl.12.

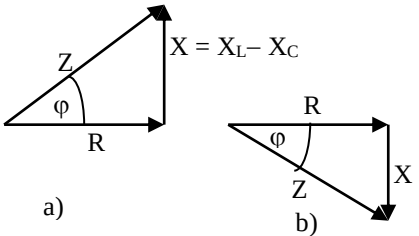
Za $X_L < X_C \Rightarrow U_L < U_C \Rightarrow U_X < 0 \Rightarrow \varphi < 0$ (kao na sl.12).

Sledi konačan zaključak, kod redne veze R, L i C fazni pomak između napona **u** i struje **i** iznosi za ugao **φ** ($-90° < \varphi < 90°$), i to:
– kada prevladava induktivno opterećenje ($X_L > X_C$) ugao $\varphi > 0$.
– kada prevladava kapacitivno opterećenje ($X_C > X_L$) ugao $\varphi < 0$.
Za analitički izraz struje $i = I_m \sin \omega t \Rightarrow u = U_m \sin (\omega t \pm \varphi)$.
Predznak ″+″ za $X_L > X_C$, a ″–″ za $X_C > X_L$.

Kako je $U = \sqrt{U_R^{\,2} + (U_L^{\,2} - U_C^{\,2})} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + X^2}$

Ako ukupni napon U podelimo sa strujom I dobije se ukupna otpornost kola (Omov zakon), pa sledi:

$$Z = \frac{U}{I} \Rightarrow \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$



a) b)

Sl.13.

Deleći trougao napona sa I dobije se trougao otpora, prikazan na sl.13. (Slika13. a) je za $X_L > X_C$, a 13. b) za $X_L < X_C$.
Iz trougla otpora izračuna se fazni ugao φ, koji iznosi:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \arccos \frac{R}{Z} ;$$

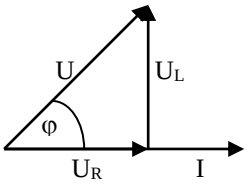
Iz fazorskih dijagrama (trougao napona i trougao otpora)
Prelazi se na kompleksni broj, pa za trougao otpora sledi:
$\underline{Z} = R + j (X_L - X_C) = R + j X \Rightarrow \underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$, gde je
Z… prividni otpor kola (ukupni) ili **impedansa**.

Impedansa Z u kolu naizmenične struje je isto što i otpornost R u kolu jednosmerne struje. To znači da će struja u rednom R,L i C kolu biti jednaka:

$$I = \frac{U}{Z} \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

4.1.2. REDNA VEZA R I L

Ako kod redne veze R, L i C dođe do proboja kondenzatora ($X_C = 0$), tada nastaje redna veza R i L.

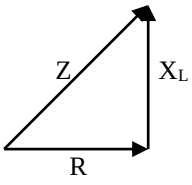


Sl.14.

Uz pretpostavku da je struja u faznoj osi trougao napona je kao na slici 14. Analitički izrazi za struju i napone su: $i = I_m \sin \omega t$; $u_R = U_{Rm} \sin \omega t$; $u_L = U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2)$; $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$. Kompleksno: $\underline{I} = I \cdot e^{j\,0}$; $\underline{U_R} = U_R \cdot e^{j\,0}$; $\underline{U_L} = U_L \cdot e^{j\pi/2}$; $\underline{U} = U \cdot e^{j\,\varphi}$.

Dakle, napon U fazno prednjači struji I za ugao φ ($0 < \varphi < \pi/2$).

Deleći trougao napona sa strujom I nastaje trougao otpora koji je prikazan na slici 15.



Sl.15.

Kako je trougao otpora sličan trouglu napona, uglovi su ostali isti, te sledi:

$$\boldsymbol{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R}}.$$

Ugao φ se može izračunati i iz trougla napona, ali je sigurniji postupak preko trougla otpora. Trougao otpora je uvek kao na sl.15, dok trougao napona kompletno rotira, jer su naponi obrtni vektori.

Impedansa kola iznosi: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}$; kompleksno: $\underline{Z} = R + jX_L \Rightarrow \underline{Z} = Z \cdot e^{j\,\varphi}$.

Struja u kolu je: $\mathbf{I = \frac{U}{Z}}$; odnosno kompleksno: $\mathbf{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}}$.

4.1.3. REDNA VEZA R I C

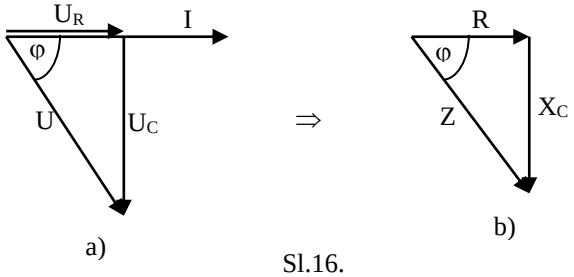
Ako je kod redne veze R,L i C induktivni otpor $X_L = 0$, nastaje redna veza R i C. Impedansa kola je:

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^{\,2}}$; kompleksno: $\underline{Z} = R - jX_C \Rightarrow \underline{Z} = Z \cdot e^{-j\varphi}$.

Struja u kolu je: $I = \frac{U}{Z}$; kompleksno: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$.

Za struju data analitički: $i = I_m \sin \omega t \Rightarrow u_R = U_{Rm} \sin \omega t$; $u_C = U_{Cm} \sin (\omega t - \pi/2)$; $u = U_m \sin (\omega t - \varphi)$.
Dakle,kod redne veze R i C **napon fazno kasni u odnosu na struju za ugao φ.**
Na osnovu analitičkih podataka sve napone i struju možemo predstaviti fazorski, grafički i kompleksno. Fazorski dijagram je prikazan na slici 16.a), i on ujedno predstavlja **trougao napona**. Deleći trougao napona sa strujom I nastaje **trougao otpora**, koji je predstavljen na slici 16.b).

Trougao napona : I = Trougao otpora



a) b)

Sl.16.

Fazni pomak između U i I redovito se određuje iz trougla otpora , i on iznosi: $\boldsymbol{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_C}{R} = \arccos \frac{R}{Z}}$

Naponi U_R, U_C i U su jednaki: $U_R = IR$; $U_C = IX_C$; $U = IZ$. (Omov z.)

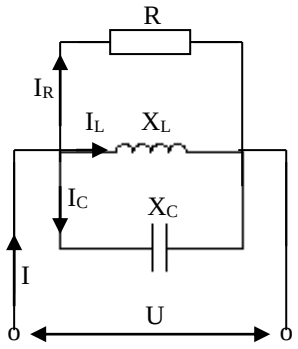
Ako u rednoj vezi R,L i C ostane samo jedan otpor (druga dva su jednaka nuli), tada dolazi do savršenog slučaja. Savršeno R kolo ima samo termogeni otpor R ($X_L = 0$ i $X_C = 0$). Savršeno L kolo ima samo induktivni otpor X_L ($R = 0$ i $X_C = 0$). Savršeno C kolo ima samo kapacitivni otpor X_C ($R = 0$ i $X_L = 0$). Ove otpornosti u kompleksnom obliku imaju slede' izraze:

1) savršeno R kolo : $\underline{Z}_R = R \Rightarrow \underline{Z}_R = Z_R \cdot e^{j\,0} = R \cdot e^{j\,0}$.
2) savršeno L kolo : $\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L \Rightarrow \underline{Z}_L = Z_L \cdot e^{j\,90°} = X_L \cdot e^{j\,90°} = \omega L \cdot e^{j\,90°}$.
3) savršeno C kolo : $\underline{Z}_C = -jX_C = -j\,(1/\omega C) \Rightarrow \underline{Z}_C = Z_C \cdot e^{-j\,90°} = X_C \cdot e^{-j\,90°}$.

Ako otpore u kolu naizmenične struje predstavimo kompleksno, tada svi proračuni u kolima naizmenične struje postaju isti kao i u kolima jednosmerne struje. To znači da se na isti način primenjuju svi zakini, na isti način se rešavaju i prosta i složena kola. Razlika je samo u tome što umesto otpora R (kolo jednosmerne struje) sada primenjujemo impedansu Z, ali u kompleksnob obliku (zbog računskih operacija: R, X_L i X_C).
Na osnovu navedenog se vidi koliki je značaj kompleksnog računa u kolima naizmenične struje.

4.2. P A R A L E L N A V E Z A

4.2.1. PARALELNA VEZA RLC

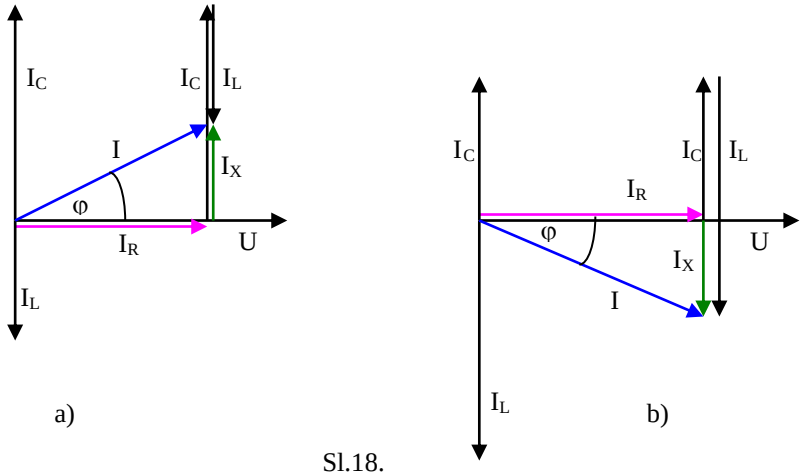


Sl.17.

Ako je napon, koji je zajednički za sve grane, prema sl.17. dat analitički :$u = U_m \sin \omega t \Rightarrow$
$i_R = I_{Rm} \sin \omega t$; $i_L = I_{Lm} \sin(\omega t - \pi/2)$; $i_C = I_{Cm} \sin(\omega t + \pi/2)$;
i = ?
Kompleksno: $\underline{U} = U \cdot e^{j0}$; $\underline{I}_R = I_R \cdot e^{j0}$; $\underline{I}_L = I_L \cdot e^{-j\,90°}$; $\underline{I}_C = I_C \cdot e^{j\,90°}$
Struje po granama su:

$$I_R = \frac{U}{R} = UG\,; \quad I_L = \frac{U}{X_L} = UB_L\,; \quad I_C = \frac{U}{X_C} = UB_C\,.$$

Na osnovu efektivnih vrednosti struja i početnih uglova sledi fazorski dijagram, koji je prikazan na sl.18.
Na sl.18.a) je za slučaj kada je $I_L < I_C$ ($X_L > X_C \Rightarrow B_L < B_C$), dok sl.18.b) je za slučaj kada je $I_L > I_C$ ($X_L < X_C \Rightarrow B_L > B_C$).



Sl.18.

Ukupna struja, prema prvom Kirhofovom zakonu jednaka je zbiru pojedinačnih,(kompleksno, ili vektorski): $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$; ili analiti;ki: $i = i_R + i_L + i_C$.
Kako su struje I_L i I_C u opoziciji, njihova rezultanta je jednaka: $\underline{I}_X = \underline{I}_C + \underline{I}_L$, odnosno $I_X = I_C - I_L$.
Aktivna (realna) komponenta struje I_R i reaktivna (imaginarna) I_X sa ukupnom strujom I čine jedan pravougli trougao (sl.18.a. ili sl.18.b.). Iz tog pravouglog trougla sledi da je ukupna struja jednaka:

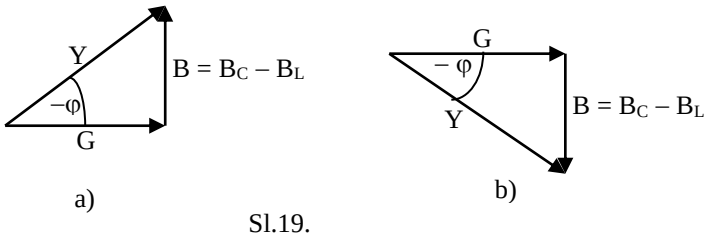
$$I = \sqrt{I_R^{\,2} + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{(UG)^2 + (UB_C - UB_L)^2} = U\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = U\sqrt{G^2 + B^2} = UY \cdot$$

Kako je $Z = \frac{U}{I} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = Y \;\Rightarrow\; Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$, gde je:

Y… prividna provodnost kola, koja se još naziva ADMITANSA;
G… aktivna (termogena) provodnost, koja se još naziva KONDUKTANSA;
B_L... induktivna (reaktivna) provodnost, koja se još naziva SUSCEPTANSA;
B_C…kapacitivna (reaktivna) provodnost, koja se još naziva SUSCEPTANSA;
$B = B_L - B_C$… ukupna (ekvivalentna) reaktivna provodnost, tj SUSCEPTANSA.
Jedinica za sve navedene provodnosti je S (simens).

Izraz $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ predstavlja Pitagorinu teoremu,a to znači da admitansa Y u sebi sadrži aktivnu G i reaktivnu B provodnost. Trougao provodnosti (Y = I/U) nastaje tako što se trougao struja podeliti sa U. Struje su srazmerne sa admitansama, samim tim i trougao admitansi je identičan sa trouglom struja. Na taj način nastaju trouglovi provodnosti, slika19. a) i b). Sl. 19.a) odgovara sl. 18.a), a sl. 19.b) odgovara sl.18.b).

Trougao provodnosti



Sl.19.

Iz trougla provodnosti može se zaključiti da će ugao biti pozitivan kada je $B_L > B_C$, a samim tim ukupna struja će prednjačiti naponu (sl.18.a.). Kako je kod redne veze R,L i C struja prednjačila za $X_L < X_C$, sledi da je trougao otpora obrnut u odnosu na trougao provodnosti. Postupak proračuna je isti, ali kod određivanja ugla φ treba imati u vidu da je on kod trougla provodnosti isti kao i kod trougla otpornosti ali suprotnog predznaka.

On se određuje iz relacije: $-\varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{G}$

(voditi raČuna o predznaku, tj. on je suprotnog predznaka pa se uzima ″–″)

NAPOMENA: Vektorski dijagram struja, odnosno, provodnosti kod paralelne veze otpora je identičan vektorskom dijagramu napona i otpora kod redne veze otpora, ali sa suprotnim predznakom ugla φ.

Ukupnu provodnost kola možemo napisati kompleksno: $\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) \;\Rightarrow\; \underline{Y} = Y \cdot e^{-j\varphi}$.
Impedansa kola je Z = 1/Y, kompleksno $\underline{Z} = 1 / \underline{Y} = (1/Y) \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi}$. Ovaj kompleksni prikaz potvrđuje da je ugao φ kod trougla otpora isti kao i kod trougla provodnosti, ali suprotnog smera.

Ukupnu struju u kolu možemo odrediti na sledeće načine:

1) pomoću admitanse: $I = UY$;
2) pomoću pojedinačnih struja (prvi Kirhofov zakon): $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$;
3) pomoću impedanse (koju najčešće moramo izračunati kompleksnim brojem): $I = U/Z$.

Kompleksni račun daje veću sigurnost pa je njegova primena najčešća. Za sl. 17 admitansa kola kompleksno je:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = G - jB_L + jB_C = G + j(B_C - B_L).$$

Treba uočiti da se reaktivne komponente admitanse i impedanse razlikuju u predznaku ($\underline{Z}_2 = jX_L \Rightarrow \underline{Y}_2 = -jB_L$; $\underline{Z}_3 = -jX_C \;\Rightarrow\; \underline{Y}_3 = jB_C$; što potvrđuje da je ugao φ kod trougla admitanse i impedanse suprotnih predznaka).

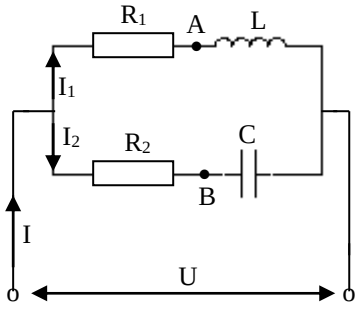
4.2.2.PARALELNA VEZA R I L

Kod ove veze nema grane sa kondenzatorom , pa je trougao struja i provodnosti sličan kao na sl.18.b) odnosno 19.b). Admitansa kola je $\underline{Y} = \underline{G} - jB_L \;\Rightarrow\; \underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L \;\Rightarrow\; \underline{I} = I_{\underline{R}} - I_L$; $\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}$; $\underline{I}_1 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_1$; $\underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_2$.

4.2.3. PARALELNA VEZA R I C

Postupak je isti kao kod paralelne veze R i L. Razlika je u tome što će sada umesto I_L biti struja I_C, a samim tim trougao struja i provodnosti je prema slici 18.a), odnosno 19.a).

4.2.4. PARALELNA VEZA RL I RC.



Sl.20.

Prema slici 20. struje po granama iznose:
$I_1 = U/Z_1 = UY_1$; $I_2 = U/Z_2 = UY_2$; $I = U/Z = UY$.
Odnosno, $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$; gde je $\underline{I}_1 = \underline{U}\cdot\underline{Y}_1$, $\underline{I}_2 = \underline{U}\cdot\underline{Y}_2$.

Kako je: $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$.

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + jX_L}\cdot\frac{R_1 - jX_L}{R_1 - jX_L} = \frac{R_1}{R_1^{\,2} + X_L^{\,2}} - j\frac{X_L}{R_1^{\,2} + X_L^{\,2}}$$

$$\underline{Y}_1 = G_1 - jB_L\,;\quad G_1 = \frac{R_1}{R_1^{\,2} + X_L^{\,2}}\,;\quad B_L = \frac{X_L}{R_1^{\,2} + X_L^{\,2}}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_2}{Z_2^{\,2}} + j\frac{X_C}{Z_2^{\,2}} \Rightarrow G_2 = \frac{R_2}{Z_2^{\,2}}\,;\, B_C = \frac{X_C}{Z_2^{\,2}}$$

Impedansu možemo odrediti na dva načina:

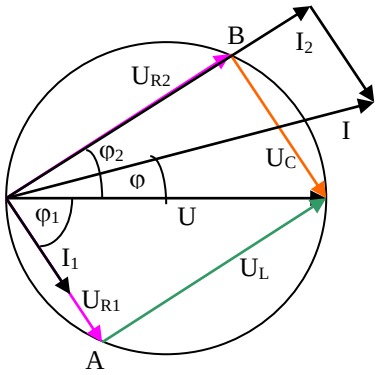
1) preko admitanse: $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$;

2) preko pojedinačnih impedansi: $\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.

Uglove φ_1, φ_2 i φ izračunamo iz trougla otpora ili trougla provodnosti, i oni iznose:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{X_L}{R_1}\;;\quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{X_C}{R_2}\;;\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{R}{Z}\;.$$

Na osnovu navedenih izraza sve struje kao i svi naponi mogu da se predstave: analitički, fazorski, grafički i kompleksno. Fazorski dijagram je najpraktičniji, pa je on predstavljen na sl.40.



Sl.21.

$\underline{U} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_L = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_C \Rightarrow u = u_{R1} + u_L = u_{R2} + u_C$;
$U_{R1} = I_1R_1$; $U_L = I_1X_L$; $U_{R2} = I_2R_2$; $U_C = I_2X_{C2}$.
Napon između tačaka A i B, prema II Kirh. zakonu iznosi:
$\underline{U}_{AB} - \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AB} = \underline{U}_{R1} - \underline{U}_{R2}$.
Tačke A i B se nalaze na kružnici čiji je prečnik jednak U, jer su jedino u tom slučaju fazori $\underline{U}_{R2}$ i $\underline{U}_C$, odnosno $\underline{U}_{R1}$ i $\underline{U}_L$ međusobno normalni.
Ukupna struja može da prednjači u odnosu na napon za ugao φ (kao na sl.21), a to će se dogoditi kada je ekvivalentna reaktansa negativna (prevladava kapacitivno opterećenje). Obrnuto, kada prevladava induktivno opterećenje (u ekvivalentnom spoju) struja će da kasni za naponom za ugao φ.

4.2.5. MEŠOVITA VEZA RLC

Na isti način se rešavaju i sve ostale kombinacije (jer sl.27 možemo smatrati i mešovitom vezom). Kada se koristi kompleksni račun, tada se sva naizmenična kola (i prosta i složena) rešavaju kao i jednosmerna, sa jedinom razlikom što otpornik R (jednosmerna kola) zamenjujemo impedansom Z (naizmenična kola). Admitansa Y (naizmenična kola) ima ulogu provodnosti G (jednosmerna kola).

NAPOMENA!
Bez obzira kakvo je kolo ekvivalentna impedansa, kao i ekvivalentna admitansa daje jedan pravougli trougao. Ako je u pitanju impedansa, trougao predstavlja ekvivalentnu rednu vezu R_e i X_e ($\underline{Z} = R_e + j\,X_e$).
Ako se radi o admitansi, trougao predstavlja paralelnu vezu ekvivalentnog G i B ($\underline{Y} = G_e + j\,B$).
IMPEDANSA = REZISTANSA + J REAKTANSA ($\underline{Z} = R + j\,X$);
ADMITANSA = KONDUKTANSA + J SUSCEPTANSA ($\underline{Y} = G + j\,B$).

Z A D A C I :

4.1.1. Redna veza R,L i C priključena je na napon $\underline{U} = 120 \cdot e^{j\,0}$. Ako je R = 10 Ω; L = 20 mH; C = 1`mF i f = 50 Hz, odrediti analitički izraz za struju i.

4.1.2. Kroz rednu vezu R = 10 Ω, X_L = 10 Ω i X_C = 20 Ω protiče struja $\underline{I}$ = 15 + j 8 A. Odrediti $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$, $\underline{U}_C$, $\underline{U}$, U_R, U_L, U_C i U i nacrtati fazorski dijagram napona i struje.

4.1.3. U kolu redne veze R,L i C priključeni napon iznosi $\underline{U}$ = 120 + j 40 [V], a otpori R = 10 Ω, X_C = 6 Ω. Koliki je X_L da bi ugao φ iznosio φ = π/4 ? Nacrtati fazorski i kompleksni dijagram napona.

4.1.4. Odrediti kružnu učestanost ω i kapacitivnost C za rednu vezu R, L, C tako da ugao φ bude jednak π/3, ako je R = $20\sqrt{3}$ Ω, L = 90 mH a X_L tri puta veći od X_C.

4.1.5. Nacrtati vektorski dijagram struje i napona za redno kolo L i C ako je $X_L = 3 \cdot X_C$, I = 2 A i napon u = 141 sin ωt.

4.1.6. Dva kondenzatora vezana su redno sa dva otpora. Nacrtati fazorski dijagram napona ako je R_1 = 10 Ω, R_2 50 Ω, C_1 = 20 μF, C_2 = 10 μF, napon U = 200 V i ω = 1 875 rad/s.

4.1.7. Impedanse $\underline{Z}_1 = 5 - j\,3$; $\underline{Z}_2 = 3 - j\,5$ i $\underline{Z}_3 = 7 - j\,12$ vezane su redno na napon u = 1 000 sin (ωt + π/3). Kako glasi analitički izraz za struju i.

4.1.8. Redna veza dva otpora i dva kondenzatora priključena je na napon U = 220 V učestanosti ω = 1 000 rad/s. Naći Z, $\underline{Z}$, I, φ i nacrtati fazorski dijagram napona i struje za $R_1 = R_2 = 10\sqrt{3}$ Ω i $C_1 = C_2$ = 100 μF.

4.1.9. Redna veza dva kalema sa otporima: prvi R_1 = 20 Ω, X_{L1} = 40 Ω; i drugi R_2 = 40 Ω, X_{L2} = 20 Ω; priključena je na napon u = 400 sin 100 t. Odrediti struju I, ugao φ, induktivnosti L_1 i L_2.

4.1.10. Redna veza dva kalema sa otporima R_1 = 10 Ω, X_{L1} = 30 Ω i R_2 = 20 Ω, X_{L2} = 10 Ω priključena je na napon u = $200\sqrt{2}$ sin 314 t. Odrediti Z_1, Z_2, Z, I, L_1 i L_2.

4.1.11. Nacrtati vektorski dijagram napona i struje kod redne veze dva kalema otpora R_1 = 24 Ω, X_{L1} = 12 Ω; i R_2 = 0, X_{L2} = 20 Ω koji su priključeni na napon u = $200\sqrt{2}$ sin ωt.

4.1.12. Data je redna veza R i L u kolu naizmenične struje kroz koje protiče struja i = $2\sqrt{2}$ sin 100 t, pri naponu na kalemu $u_L = 60\sqrt{2}$ cos 100 t. Ako je R = 40 Ω odrediti induktivnost L , ukupni napon u i u_R.

4.1.13. Kalem termogenog otpora R = 10 Ω i induktivnosti L = 0,15 H spojen je redno sa kondenzatorom kapaciteta C = 20 μF i priključen je na napon U = 220 V frekvencije f = 50 Hz. Odrediti impedansu kola i struju u kolu. Kako će se promeniti struja u kolu ako dođe do proboja kondenzatora (odstraniti C) ?

4.1.14. Odrediti učestanost pri kojoj će redna veza kalema L = 2 H i R = 50 Ω sa kondenzatorom C = 1 μF imati impedansu od 77,4 Ω.

4.1.15. Napon prostog kola iznosi $\underline{U}$ = 60 – j 40 [V], a impedansa $\underline{Z}$ = 2 + j 1 [Ω]. Kolika je struja, njena početna faza i fazna razlika između napona i struje.

4.1.16. Dva kalema: prvi R_1 = 5 Ω, X_{L1} = 21 Ω i drugi R_2 = 3 Ω, X_{L2} = 10 Ω ; otpornik R_3 = 4 Ω i kondenzator X_C = 15 Ω vezani su na red. Kolika je ukupna impedansa kola. Impedansu napisati kompleksno.

4.1.17. Odrediti jačinu struje u rednom RL kolu kada je na njegovim krajevima napon u = 100 cos 314 t [V] ako je R = 100 Ω, a L = 70 mH.

4.1.18. Na krajevima rednog RLC kola napon iznosi u = 220 cos 314 t [V]. Ako je R = 1 KΩ, C = 1 μF a L = 10 mH, izračunati jačinu struje u kolu.

4.1.19. U nekom kolu nalazi se redno vezan termogeni otpor R i induktivnost L. Ako su padovi napona na njima $U_R = 120$ V i $U_L = 160$ V sa strujom $I = 40$ A odrediti ukupni napon kola U i otpore R i X_L.

4.1.20. U kolu naizmenične struje frekvencije $f = 50$ Hz redno su vezani termogeni otpornik $R_1 = 4\ \Omega$ i kalem sa termogenim otporom R_L i induktivnošću L. Merenjem je ustanovljeno da su padovi napona na otporniku R_1 $U_{R1} = 56$ V, a na kalemu $U_L = 148$ V. Ukupni napon kola je $U = 168$ V. Kolika je struja I, termogeni otpornik kalema R_L, induktivnost L i ugao φ.

4.1.21. U jednom kolu na napon stezaljki $U = 100$ V vezani su na red otpor $R = 10\ \Omega$, i induktivnost L sa svojim termogenim otporom R_L impedanse $Z_L = 12\ \Omega$. Kroz kolo teče struja $I = 6$ A, a frekvencija mreže je $f = 50$ Hz. Koji pad napona U_X vlada na stezaljkam prigušnice i koliki su R_L i L ? Napisati izraz za struju i.

4.1.22. Koliki induktivni otpor treba staviti na red sa nekim termogenim (aktivnim) potrošačem $R = 10\ \Omega$ da bi na njemu vladao pad napona $U_R = 160$ V kod napona stezaljki $U = 250$? Rezultate proveriti fazorski.

4.1.23. Neki potrošač kod napona $U = 110$ V uzima struju $I = 20$ A uz $\cos\varphi = 0{,}55$ (induktivno). Koliki je aktivni otpornik R a koliki reaktivni X_L ovog potrošača?

4.1.24. Izvor napona $U = 10$ V priključen je na rednu vezu otpora R i kondenzatora C. Napon na otporu je $U_R = 2$ V kod struje $I = 10$ mA i frekvencije $f = 0{,}5$ MHz. Koliki su R i C?

4.1.25. U nekom kolu $\cos\varphi = 0{,}8$ (kapacitivno). Ako se u kolo veže redno $C_2 = 2\ \mu$F kolo ima $\cos\varphi_2 = 0{,}6$. Frekvencija kola je $f = 5\,000/\pi$ [s^{-1}]. Koliki su R i C_1 toga kola?

4.1.26. U nekom kolu koje je priključeno na napon $U = 200$ V priključena je prigušnica sa unutrašnjim otporom R_L redno sa kondenzatorom kapaciteta C. Merenjem je ustanovljen napon na prigušnici $U_L = 440$ V i pad napona na kondenzatoru $U_C = 320$ V. Treba odrediti fazni ugao φ ovoga kola te aktivnu komponentu napona U_R i reaktivnu komponentu napona na prigušnici U_{XL}.

4.1.27. U nekom kolu nalazi se impedansa $Z = 40\ \Omega$ sa $\cos\varphi = 0{,}6$ (induktivno). Koliki kapacitivni otpor X_C treba vezati na red sa ovom impedansom da bi se ostvario $\cos\varphi_1 = 0{,}8$? Kolika je vrednost novonastale impedanse Z_1 i koliki je termogeni otpor kola R ? Rezultate proveriti fazorskim dijagramom.

4.1.28. Na izvor napona $u = 4\sqrt{2}\sin 2\,000\,t$ [V] redno su vezani kalem otpora $R_L = 10\ \Omega$ i induktivnosti $L = 10$ mH i kondenzator kapaciteta $C = 20\ \mu$F. Napisati izraz za pad napona u_L koji deluje na krajevima kalema.

4.1.29. Kolo sadrži rednu vezu R, L i C. Pri određenoj frekvenciji induktivni otpor je $X_L = 20\ \Omega$. Ako je termogeni otpor $R = 10\ \Omega$, koliki mora da bude kapacitivni otpor X_C da bi u kolu bio fazni pomak $\varphi = \pm \pi/4$.

4.1.30. Kod kojih će učestanosti redna veza $R = 40\ \Omega$, $L = 10$ H i $C = 10\ \mu$F imati impedansu $Z = 50\ \Omega$?

4.1.31. Kroz rednu vezu termogenog otpora $R = 10\ \Omega$ i kalema induktivnosti $L = 10$ mH teče struja $i = 1{,}5 \sin 1\,000\,t$. Odrediti izraz za napon u na koji je priključena ova veza.

4.1.32. Redna veza aktivnog otpora R i induktiviteta L priključena je napon $u = 150 \sin (500\,t + 10°)$. Odrediti vrednosti za aktivni otpor R i induktivitet L, ako kroz ovu vezu teče struja $i = 3 \sin (500\,t - 35°)$.

4.1.33. Kroz rednu vezu $R = 10\ \Omega$ i $C = 10\ \mu$F teče struja $i = 5 \cos 5\,000\,t$. Kako glasi izraz za napon u ?

4.1.34. Za rednu vezu RLC poznato je $R = 670\ \Omega$, $L = 8$ H , $C = 4\ \mu$F i $f = 50$ Hz. Koliki je napon mreže (kola) ako napon na kondenzatoru iznosi $U_C = 100$ V.

4.1.35. Za jedan prijemnik zna se da je aktivni otpor R jednak kapacitivnom otporu kondenzatora X_C. Ako su izrazi za napon i struju toga prijemnika: $i = 25 \sin (314\,t - 28°)$; $u = 100 \sin (314\,t + 17°)$, odrediti R,L i C.

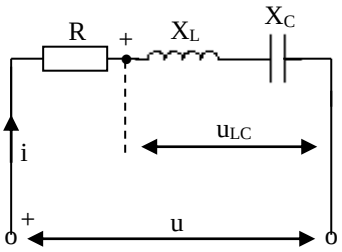
4.1.36. Prigušnica sa termogenim otporom $R_L = 300\ \Omega$ i induktivnim $X_L = 400\ \Omega$ vezana je redno sa kondenzatorom kapacitivnog otpora $X_C = 100\ \Omega$. Ako na krajevima prigušnice deluje napon $U_L = 50$ V, kolika je vrednost ukupnog napona U ?

4.1.37. U rednom RLC kolu u kojem prevladava induktivno opterećenje poznat je ukupni napon $U = 50$ V, napon na otporniku R $U_R = 30$ V i napon na kondenzatoru $U_C = 20$ V. Koliki je napon na krajevima savršenog kalema U_L?

4.1.38. Impedansa redne veze otpornosti $R = 4\ \Omega$ i savršene prigušnice L pri frekvenciji $f = 50$ Hz iznosi $Z = 5\ \Omega$. Kolika je impedansa te veze pri $f_1 = 200$ Hz ?

4.1.39. Kada kalem priključimo na jednosmerni napon $U_1 = 120$ V, struja iznosi $I_1 = 20$ A, a kada se priključi na naizmenični napon $U_2 = 220$ V učestanosti $f = 50$ Hz, struja iznosi $I_2 = 28{,}2$ A. Kolika je induktivnost kalema ?

4.1.40.



Sl.4.1.40.

Za deo kola prema sl.4.1.40. poznato je:

$u_{LC} = 8\sqrt{2}\ \sin(\omega t - \pi/2)$ V; $R = 6$ kΩ; $X_L = 2$ kΩ;

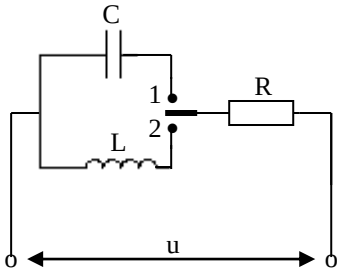
a) Odrediti X_C, za koje je $\cos\varphi = 0{,}6$ (factor snage).
b) Nacrtati fazorski dijagram.
c) Naći trenutnu vrednost napona u

4.1.41. U rednom RLC kolu napon i struja se menjaju po zakonu: $u = 353{,}5 \cos(3\,000\,t - 10°)$ V; $i = 12{,}5 \cos(3\,000\,t - 55°)$ A. Ako je induktivnost kola $L = 0{,}01$ H, odrediti termogenu otpornost R i kapacitet kondenzatora C.

4.1.42. Otpornik otpornosti $R = 10\ \Omega$, savršeni kalem induktivnosti $L = 50$ mH i kondenzator kapaciteta $C = 100\ \mu$F vezani su na red i priključeni na naizmenični napon $\underline{U} = (176 + j\,132)$ [V]. Odrediti maksimalnu i efektivnu vrednost indukovane ems samoindukcije u datom kolu.

4.1.43. Kalem termogenog otpora $R=10\ \Omega$ uključen je u kolo naizmenične struje frekvencije $f = 50$ Hz. Odrediti koeficijent samoindukcije (induktivnost) L kalema ako je fazna razlika između napona i struje $\pi/3$.

4.1.44.



Sl.4.1.44.

Kondenzator od 500 μF, kalem induktivnosti 0,1 H, zanemarljivog termogenog otpora i otpornik R vezani su na izvor naizmenične struje frekvencije 50 Hz prema sl.4.1.44.

Strujno kolo se uspostavlja stavljanjem prekidača u položaj 1 ili 2.

Kolika treba da bude vrednost otpora R, da bi jačina struje kroz njega kada je prekidač u položaju 1 bila dva puta veća od jačine struje kada je prekidač u položaju 2.

4.1.45. Efektivna vrednost ems naizmenične struje je 100 V, a kružna učestanost 500 rad/s. Sa izvorom je vezan na red otpornik od 3 Ω, kondenzator od 50 μF i kalem zanemarljivog termogenog otpora čija se induktivnost menja od 10 mH do 80 mH. Maksimalna vrednost napona na pločama kondenzatora ne sme da pređe vrednost od 1 200 V.

a) Kolika je efektivna vrednost struje koja sme da se propusti kroz kolo ?
b) Kolika je tada induktivnost kalema ?

4.1.46. Kolika je efektivna vrednost naizmenične struje kroz kalem koji ima termogenu otpornost 2 Ω, a induktivnost 1 H ako je efektivna vrednost napona 220 V a frekvencija 50 Hz ? Šta će biti sa efektivnom vrednošću struje ako se ne menjajući uslove u kolu redno kalemu priključi kondenzator kapaciteta 10 μF ?

4.1.47. Kondenzator nepoznatog kapaciteta C, kalem induktivnosti 5 mH zanemarljiva termogenog otpora i otpornik otpora 20 Ω vezani su redno i priključeni na naizmenični izvor ems $e = 10 \cos 100\pi t$ [V]. Jačina struje u kolu je $i = I_m \cos 100\pi t$. Naći amplitudu (maksim. vrednost) napona na pločama kondenzatora U_{Cm}.

4.1.48. U rednom LC kolu induktivnost je 10 mH, a kapacitivnost 1 μF. Kolika će biti impedansa kola ako je frekvencija naizmenične struje dva puta veća od frekvencije pri kojoj su struja u kolu i napon na krajevima kola u fazi ?

4.1.49. Redno vezani otpornik od 20 Ω, kalem od 15 mH i kondenzator od 5 μF priključeni su na naizmenični napon. Kolika je frekvencija toga napona ako je impedansa kola 100 Ω ? Termogeni otpor kalema zanemarljiv.

4.1.50. Kroz redno RLC kolo protiče struja efektivne vrednosti 5 A. Kolo je priključeno na efektivni napon od 90 V. Ako je aktivni otpor 9 Ω, odrediti faznu razliku između struje i napona.

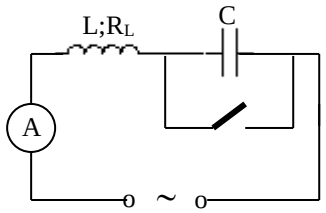
4.1.51. Kalem i kondenzator vezani su redno i priključeni na izvor naizmenične struje. Jačina struje u kolu menja se po zakonu $i = 2 \sin 100\pi t$ [A] , a napon $u = 40 \sin (100\pi t + 45°)$ [V]. Koliki je aktivni otpor kola ?

4.1.52. Deo strujnog kola čine termogeni otpornik od 500 Ω i kalem induktivnosti 0,5 H ($R_L = 0$), koji su vezani redno. Kroz kolo protiče struja $i = 0{,}5 \sin \omega t$ [A]. Odrediti frekvenciju naizmenične struje ako je amplituda napona (maksimalna vrednost) na otporniku tri puta veća nego na kalemu. Koliki je napon na krajevima datog kola posle 612,3 ms od trenutka uključivanja ?

4.1.53. U rednom RLC kolu naizmenični napon na krajevima kola ima efektivnu vrednost 100 V. Pri frekvenciji $f_1 = 50$ Hz i $f_3 = 100$ Hz efektivna vrednost jačine struje je ista i iznosi 10 A. Pri nekoj frekvenciji f_2 efektivna vrednost struje je maksimalna i iznosi $I_{max} = 20$ A. Odrediti R, L, C i f_2.

4.1.54. Kondenzator kapaciteta 10 μF i otpornik od 200 Ω vezani su redno i priključeni na gradsku mrežu napona 100 V frekvencije 60 Hz. Pri raspadu energetskog sistema došlo je do poremećaja u napajanju potrošača, usled čega je napon gradske mreže opao za 10%, a frekvencija se smanjila za 5%. Koliko se procentualno promenila jačina struje u datom kolu ?

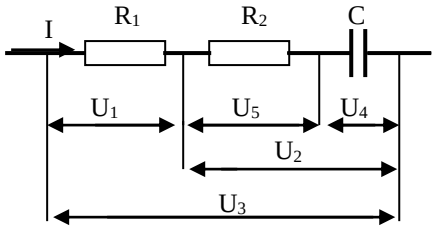
4.1.55.



Sl.4.1.55.

Za krajeve kola, sl.4.1.55, priključen je izvor naizmeničnog napona efektivne vrednosti 120 V i frekvencije 330 Hz. Kapacitet kondenzatora je podešen tako da je struja koju pokazuje ampermetar ista pri otvorenom i zatvorenom prekidaču i iznosi 4 A. Koliki su induktivnost L i termogeni otpor R_L kalema ako je kondenzator podešen na 10μF ?

4.1.56.

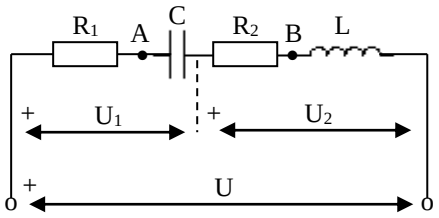


Sl.4.1.56.

Za deo kola prostoperiodične naizmenične struje prikazanog na slici 4.1.56. poznato je: $U_1 = 20$ V; $U_2 = 25$ V; $U_3 = 40$ V.

a) Nacrtati fazorski dijagram napona
b) Koliki je fazni pomak između struje I i napona U_2 φ_2 ?

4.1.57.

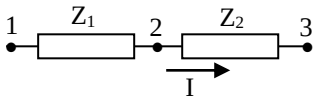


Sl.4.1.57.

Za deo kola prostoperiodične naizmenične struje, prema sl.4.1.57, poznato je:
$R_1 = 60\ \Omega$; $X_C = 80\ \Omega$; $U_1 = 9$ V; $U_2 = 4{,}5$ V.
Ako napon U_1 fazno zaostaje za naponom U_2 za ugao $\pi/2$, odrditi:

a) efektivnu vrednost napona U;
b) efektivnu vrednost napona U_{AB} koji vlada između tačaka A i B.

4.1.58.



Sl.4.1.58.

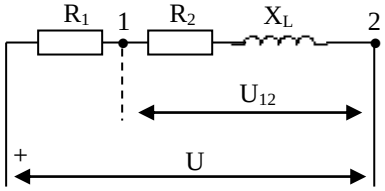
Dva prijemnika vezana su na red, sl.4.1.58, i priključena u kolo prostoperiodične naizmenične struje. Za određenu učestanost naizmenične struje impedanse su jednake, i iznose: $Z_1 = Z_2 = 100\ \Omega$. Napon U_{21} fazno zaostaje za naponom U_{23} za ugao π, a struja I fazno prednjači naponu U_{23} za ugao $\pi/3$.
Kolika je ukupna impedansa kola Z_{13} ?

4.1.59. Prigušnica termogenog otpora R i induktivnosti L redno je vezana sa kondenzatoron kapaciteta C. Ako je napon na prigušnici (na rednoj vezi RL) $U_{RL} = 80$ V i njegova početna faza $\theta_{RL} = 30°$, a na kondenzatoru $U_C = 40$ V odrediti:

a) trenutne vrednosti napona u_R, u_L, u_C i u;
b) efektivne vrednosti U_R, U_L i U;
c) fazorski dijagram.

Za početnu fazu struje I uzeti nulu.

4.1.60.



Sl.4.1.60.

Za deo kola na slici 4.1.60 odrediti otpor R_1 tako da napon U_{12} fazno prednjači ukupnom naponu U za ugao $\pi/6$.

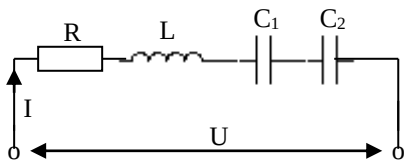
Brojni podaci: $R_2 = 5\ \Omega$; $X_L = 15\ \Omega$.

4.1.61. U rednom RC kolu struja ima vrednost $I_1 = 0{,}1$ A, pri $f_1 = 800$ Hz, a vrednost $I_2 = 0{,}08$ A pri $f_2 = 400$ Hz. U oba slučaja efektivna vrednost napona na krajevima kola iznosi $U = 20$ V. Odrediti R i C.

4.1.62. Prigušnica termogenog otpora R_L i induktivnosti L redno je vezana sa kondenzatorom kapaciteta C. Poznato je: kapacitivna otpornost kondenzatora $X_C = 1\ k\Omega$ i efektivne vrednosti prostoperiodičnih napona na prigušnici $U_{RL} = 20$ V(napon na rednoj vezi RL) i kondenzatoru $U_C = 10$ V, frekvencije f = 138 kHz.
Napon na kondenzatoru U_C fazno kasni u odnosu na napon na prigušnica U_{RL} za 150°. Izračunati:

a) parametre R, L i C;
b) efektivnu vrednost ukupnog napona U.

4.1.63.



Sl.4.1.63.

U kolu prema slici 4.1.63 poznato je:
$R = 100\ \Omega$; $L = 10$ mH; $C_1 = 0{,}1\ \mu$F; $\omega = 10^5$ rad/s.
Ako je fazni pomak između napona U i struje I ugao φ, izračunati:

a) kapacitet C_2 za koji je $\varphi = \pi/4$;
b) kapacitet C_2 za koji je $\varphi = -\pi/4$;
c) kapacitet C_2 pri kojem je struja I u kolu maksimalna.

4.1.64. Kada se prijemnik nepoznate impedanse Z priključi na naizmenični napon $u = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 40°)$, u njemu se uspostavi naizmenična struja $i = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 20°)$. Odrediti:

a) faznu razliku između napona i struje, odnosno karakter prijemnika;
b) impedansu, aktivnu i reaktivnu otpornost prijemnika;
c) fazorski dijagram napona i struje.

4.1.65. Otpornik otpornosti R, kalem induktivnosti L i kondenzator kapaciteta C, vezani su na red i priključeni na nepoznati naizmenični napon u. Ako je poznat izraz za trenutnu vrednost naizmenične struje $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi)$, odrediti:

a) impedansu i admitansu kola;
b) fazorski dijagram napona i struje u kolu;
c) izraze (analitičke) za trenutne vrednosti napona u_R, u_L, u_C i u.
Brojni podaci: $R = 15\ \Omega$; $L = 80$ mH; $C = 30\ \mu$F; $\omega = 500\ s^{-1}$; $I = 2$ A; $\psi = 90°$.

4.1.66. Otpornik otpornosti R i kalem induktivnosti L vezani su na red i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti U. Pri učestanosti f_1, efektivna vrednost struje u kolu je I_1, a pri učestanosti f_2, struja u kolu je I_2. Odrediti otpornost R i induktivnost L.
Brojni podaci: $U = 220$ V; $f_1 = 40$ Hz; $f_2 = 80$ Hz; $I_1 = 39{,}4$ A; $I_2 = 31{,}2$ A.

4.1.67. Kada se kalem nepoznate otpornosti R i nepoznate induktivnosti L priključi na naizmenični napon efektivne vrednosti U, učestanosti f, u kalemu se uspostavi struja efektivne vrednosti I. Ako se u ovako obrazovano kolo na red sa kalemom veže otpornik otpornosti R_1, efektivna vrednost struje u kolu opadne na I_1. Odrediti nepoznatu otpornost R i induktivnost kalema L.
Brojni podaci: $U = 230$ V; $f = 50$ Hz; $I = 5$ A; $R_1 = 20\ \Omega$; $I_1 = 4$ A.

4.1.68. Za normalni rad termogenog prijemnika potrebno je obezbediti na njegovim krajevima efektivni napon U i efektivnu struju I. Odrediti kapacitet C kondenzatora koji je potrebno vezati na red sa prijemnikom, da bi on normalno radio priključenjem ove redne veze na naizmenični napon U_1, učestanosti f.
Brojni podaci: $U = 50$ V; $I = 0{,}2$ A; $U_1 = 110$ V; $f = 50$ Hz.

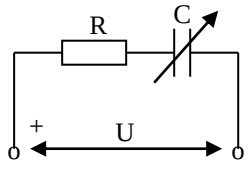
4.1.69. Dva prijemnika impedansi Z_1 i Z_2 vezani su na red i priključeni na nepoznati naizmenični napon U. Poznate su efektivne vrednosti napona U_1 i U_2 koji deluju na krajevima pojedinačnih prijemnika. Sem toga, napon U_1 fazno prednjači za φ_1, dok napon U_2 fazno zaostaje za φ_2, u odnosu na struju u kolu. Odrediti:

a) fazor napona na koji su prijemnici priključeni $\underline{U}$;
b) fazni pomak između ukupnog napon i struje u kolu.

Brojni podaci: $U_1 = 150$ V; $\varphi_1 = 30°$; $U_2 = 180$ V; $\varphi_2 = 50°$.

4.1.70. Kroz dve impedanse vezane na red priključene na naizmenični napon $\underline{U} = (35{,}25 + j\,35{,}25)$ V protiče struja $\underline{I} = (2{,}41 - j\,0{,}65)$ A. Ako je vrednost prve impedanse $\underline{Z}_1 = (5 + j\,8)\ \Omega$, odrediti vrednost druge impedanse $\underline{Z}_2$.

4.1.71.

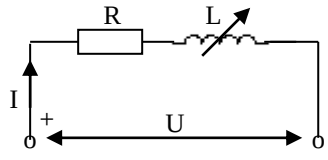


Sl.4.1.70.

U mreži, prema slici 4.1.70, kapacitivni otpornik se menja od nule do beskonačnosti. Nacrtati fazorski dijagram (kružni dijagram) napona i struje.

Brojni podaci:
$U = 100$ V; $R = 10\ \Omega$; razmera $1\text{cm} \equiv 20\text{ V} \equiv 2{,}5$ A.

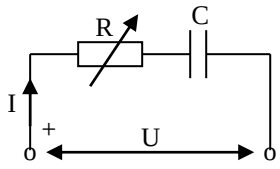
4.1.72.



Sl.4.1.72.

U mreži prikazanoj na slici 4.1.72. idealna induktivnost se menja od nule do beskonačnosti. Kakav oblik ima dijagram (kružni) napona i struje.
Dijagram nacrtati i prokomentarisati.

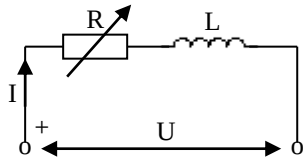
4.1.73.



Sl.4.1.73.

U kolu, prikazanom na slici 4.1.73, termogeni otpornik se menja od nule do beskonačnosti. Kakav će oblik imati vektorski (križni) dijagram struje i napona ?

4.1.74.



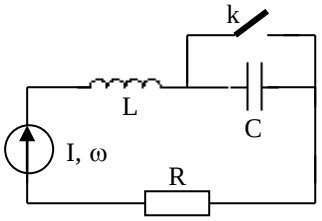
Sl.4.1.74.

U kolu, prikazanom na slici 4.1.74, redno su vezani kalem savršene induktivnost i termogeni otpornik R, koji se menja od nule do beskonačnosti.
Kakav oblik ima vektorski dijagram struje i napona ?

4.1.75. Kalem (bez jezgra) priključen je na prostoperiodični napon $u = 100 \sin 2\,000\, t$ [V]. Intezitet struje u kalemu je dat izrazom $i = 25 \sin (2\,000\, t - 60°)$ [A]. Odrediti izraz za intezitet struje ako se kružna učestanost priključenog napona smanji za dva puta.

4.1.76. Kalem induktivnosti $L = 10$ mH vezan je na red sa elementom nepoznatih karakteristika i ova redna veza je priključena na prostoperiodični napon $u = 50 \sin (5\,000\, t + 60°)$ V. Izraz za intezitet struje u ovom kolu je $i = 0{,}25 \sin (5\,000\, t + 150°)$ A (sa usaglašenim referentnim smerovima).
Odrediti koji je element vezan na red sa kalemom i koje su njegove karakteristika.

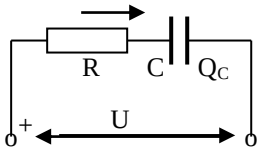
4.1.77.



Sl.4.1.77.

U kolu prikazanom na sl.4.1.77. generator prostoperoidične struje ima efektivnu vrednost struje I i kružnu učestanost ω. Induktivnost kalema je L, a otpornost termogenog otpornika R.
Odrediti kapacitet kondenzatora C tako da efektivna vrednost napona na krajevima strujnog generatora bude ista pri otvorenom i zatvorenom kontaktoru k (prekidaču).

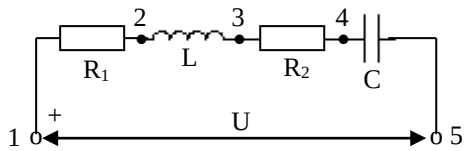
4.1.78.



Sl.4.1.78.

Redna veza termogenog otpornika otpornosti $R = 10$ kΩ kondenzatora kapacitivnosti $C = 2$ μF uključena je u kolo prostoperiodične struje kružne učestanosti $\omega = 100$ rad/s . Kondenzator je opterećen količinom naelektrisanja $\underline{Q}_C = (0{,}2 + j\, 0{,}6)$ mC, prema referentnom smeru označenom na slici.4.1.78. Odrediti izraz za napon $\underline{U}$ (kompleksno) na krajevima ove redne veze.

4.1.79.

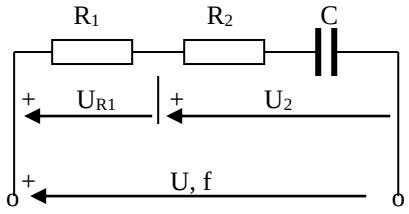


Sl.4.1.79.

Za deo kola prostoperiodične struje, prema sl.4.1.79, dato je: $R_1 = 2\ \Omega$; $X_C = 12\ \Omega$; $U_{24} = 8$ V; $I = 1{,}4$ A, a napon U_{24} fazno prednjači struji I za $\varphi_{24} = 45°$.
Odrediti efektivnu vrednost ukupnog napona U.

4.1.80. Kod redne veze RLC kola poznato je: ukupni napon U = 20 V; pad napona na R U_R = 16 V i pad napona na L U_L = 18 V.
Kolika je efektivna vrednost pada napona na kondenzatoru i koliki je fazni pomak između napiona U i struje I ?

4.1.81.



Sl.4.1.81.

Za kolo prostoperiodične naizmenične struje prikazano na sl.4.1.81. poznato je: U = 10 V; U_1 = 5 V; U_2 = 6 V. Odrediti efektivnu vrednost napona između krajeva termogenog otpornika R_2 U_{R2} i efektivnu vrednost napona na krajevima kondenzatora U_C.

4.1.82. Idealni kondenzator redno je vezan sa idealnim termogenim otpornikom i ova veza je priključena na jednosmerni napon U = 141 V. Ako je R = 10 Ω i C = 100 μF , odrediti struju kola i napone na ovim otporima U_R i U_C. Rešenje prokomentarisati.

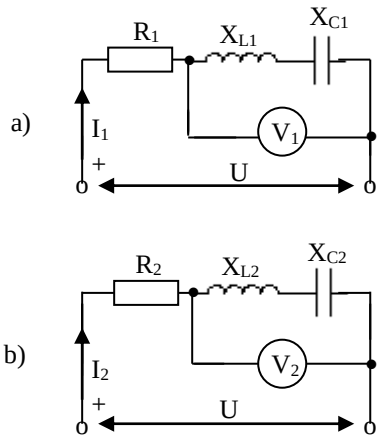
4.1.83. Dve impedanse induktivnog karaktera, $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$, vezane su redno, i njihova ekvivalentna impedansa iznosi $\underline{Z}$ = (12 + j 5) Ω. Za elemente ovog kola poznato je: R_1 = 5 Ω, X_{L2} = 2 Ω, L_1 = 3 mH. Veza je priključena na prostoperiodični naizmenični napon efektivne vrednosti U = 260 V. Kolika je kružna učestanost priključenog napona ?

4.1.84. Redna veza savršenog kalema i termogenog otpornika priključena je na jednosmerni napon U = 100 V. Ako je R = 10Ω i L = 50 mH, odrediti struju u kolu i napone na R i L (U_R i U_L). Rešenje prokomentarisati.

4.1.85. Savršeni kalem (bez F_e jezgra) i termogeni otpornik se nalaze u rednoj vezi, koja je priključena na stalan naizmenični napon stalne frekvencije. Kako će se promeniti naponi na R i L (poveća ili smanji) ako u kalem ubacimo feromagnetno jezgro ? Rešenje postupno obrazložiti.

4.1.86. Redna veza RL priključena je na konstantan naizmenični napon promenljive frekvencije. Kako će se promeniti napon na otporniku R ako povećavamo vrekvenciju f ? Rešenje obrazložiti.

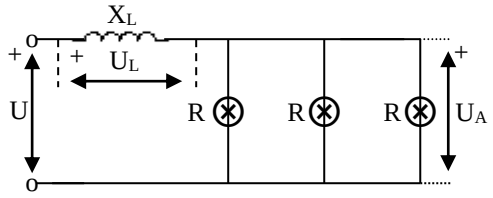
4.1.87.



Sl.4.1.87.

Za kolo prema slici 4.1.87. a) i b) poznate su sledeće brojne vrednosti:
$\underline{U}$ = 220 V; R_1 = R_2 = 6 Ω; X_{L1} = 10 Ω; X_{C1} = 2 Ω;
X_{L2} = 100 Ω; X_{C2} = 92 Ω.
Kakav je odnos između pokazivanja voltmetara V_1 i V_2 ?

4.1.88.



Sl.4.1.88.

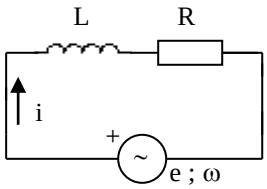
Objasniti kako se menjaju naponi U_L i U_A u kolu prema slici 4.1.88, pri pregorevanju jedne od sijalica? Napon U je konstantan.

4.1.89. Ako kalem koji ima istu termogenu i induktivnu otpornost ($R = X_L$) priključimo na naizmenični napon U u njemu se uspostavi struje efektivne vrednosti $I = 10$ A. Kolika će biti struja u istom tom kalemu ako se on priključi na jednosmerni napon iste vrednsti kao i efektivna vrednost naizmeničnog napona U?

4.1.90. Ako su napon i struja prijemnika date izrazima: $u = 100 \sin (\omega t + 17°)$ i $i = 25 \sin (\omega t - 28°)$, odrediti u kojem su odnosu aktivna i reaktivna otpornost prijemnika.

4.1.91. U rednom RLC kolu poznati su naponu $U_R = 50$ V, $U_L = 100$ V i $U_C = 60$ V; frekvenciju $f = 50$ Hz. U kolu je pri ukupnom prostoperiodičnom naponu efektivne vrednosti U uspostavljena struja $I = 5$ A. Odrediti za koju vrednost napona U vrednost struje ostaje nepromenjena ako se frekvencija poveća za dva puta?

4.1.92.



Sl.4.1.92.

Za kolo prostoperiodične struje, prikazano na slici4.1.92, poznato je: $I = 0{,}1$ A; $\omega = 10^6\ s^{-1}$; $L = 10\ \mu H$ i $R = 1\ k\Omega$.
Izračunati trenutnu vrednost elektromotorne sile idealnog naponskog generatora kada je jačina struje u kolu jednaka nuli i nalazi se u fazi porasta (nakon nulte vrednosti)

4.1.93. Prijemnik nepoznate impedanse priključen je na prostoperiodični napon efektivne vrednosti $U = 100$ V. U trenutku kada je napon maksimalan, jačina struje prijemnika je $i(t_1) = 10$ mA i opada, a u trenutku kada je jačina struje maksimalna, napon je $u(t_2) = 100$ V. Referentni smerovi napona i struje su usaglašeni. Izračunati impedansu prijemnika i napisati je kompleksno.

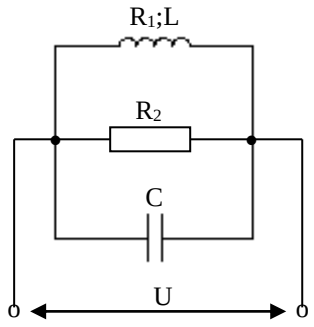
4.1.94. Kada se torusni kalem, termogene otpornosti $R = 11\ \Omega$priključi na izvor naizmenične struje, napona $U = 210$ V i frekvencije $f = 50$ Hz, kroz njega protiče struja jačine $I = 3{,}5$ A.

a) Odrediti induktivnost kalema;
b) Kolika bi struja proticala kroz polovinu ovog kalema ako bi se ona priključila na isti električni izvor ?

4.2.1. Termogeni otpornik R = 2 Ω, kalem induktivnog otpora X_L = 2 Ω i kondenzator kapacitivnog otpora X_C = 1 Ω vezani su paralelno ipriključeni na napon efektivne vrednosti $U = 20\sqrt{2}$ V. Odrediti:

a) pojedinačne impedanse po granama Z_1, Z_2, Z_3 i predstaviti ih kompleksno $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$;
b) pojedinačne admitanse po granama Y_1, Y_2, Y_3 i predstaviti ih kompleksno $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$;
c) Ukupnu impedansu Z i admitansu Y i predstaviti ih kompleksno $\underline{Z}$ i $\underline{Y}$.
d) Sve struje u kolu: I_1, I_2, I_3 i I i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.
e) Fazni pomak φ između ukupnog napona U i ukupne struje I.

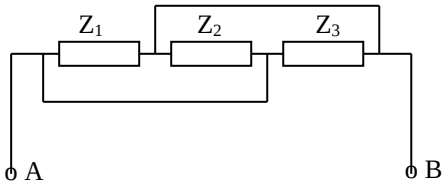
4.2.2.



Sl.4.2.2

Za kolo na slici 4.2.2 odrediti ukupnu admitansu ako je: R_1 = 2 Ω; L = 1 mH; R_2 = 29/27 Ω; C = 6 800/29 μF i ω = 5 000 rad/s.

4.2.3.



Sl.4.2.3.

Za kolo prema slici 4.2.3 odrediti ukupnu impedansu i ukupnu admitansa ako je: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (6 + j\,9)$ Ω.

4.2.4. Admitanse $\underline{Y}_1 = (0{,}09 + j\,0{,}03)$ S i $\underline{Y}_2 = (0{,}06 + j\,0{,}02)$ S vezane su paralelno i priključene na prostoperiodični naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 100\sqrt{10}$ V kružne frekvencije ω = 1 000 rad/s. Izračunati: R_1; R_2; C_1; C_2; I_1; I_2 i I.

4.2.5. Impedanse $\underline{Z}_1 = (10 + j\,10)$ Ω i $\underline{Z}_2$ vezane su paralelno i kroz njih protiču struje $\underline{I}_1 = (12 + j\,5)$ A i $\underline{I}_2$ = 10 A. Odrediti impedansu $\underline{Z}_2$ i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

4.2.6. Kroz dve paralelne grane protiču struje $\underline{I}_1 = (4 + j\,2)$ A i $\underline{I}_2 = (5 + j\,4)$ A pri naponu na granama $\underline{U} = (60 + j\,80)$ V. Odrediti koje elemente u sebi sadrže grane i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

4.2.7. Kolika je ukupna impedansa kola u kojem su vezane tri paralelne admitanse vrednosti: $\underline{Y}_1 = (0{,}5 - j\,0{,}5)$ S, $\underline{Y}_2 = (0{,}2 - j\,0{,}3)$ S i $\underline{Y}_3 = (0{,}3 - j\,0{,}2)$ S ?

4.2.8. Poznat je modul ukupne impedanse Z paralelno vezanih impedansi $\underline{Z}_1 = R_1 - j\,X_1$ i $\underline{Z}_2 = R_2 - j\,X_2$ koji iznosi $Z = 1{,}3\sqrt{2}$ Ω. Ako je $R_1 = X_2 = R$ i $R_2 = X_1 = R + 1$, odrediti $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$.

4.2.9. Kod paralelne veze termogenog otpora R i kondenzatora kapacitivnog otpora $X_C = 2R$ moduo impedanse iznosi $Z = 8\sqrt{5}$ Ω. Ako je kružna učestanost ω = 500 rad/s, koliko iznosi R i C ?

4.2.10. Termogeni otpor R = 2,5 Ω i kondenzator kapaciteta C = 300 nF paralelno su vezani i priključeni na napon U = 10 mV, kružne učestanosti $\omega = 10^6$ rad/s. Kolika je struja I u datom kolu ?

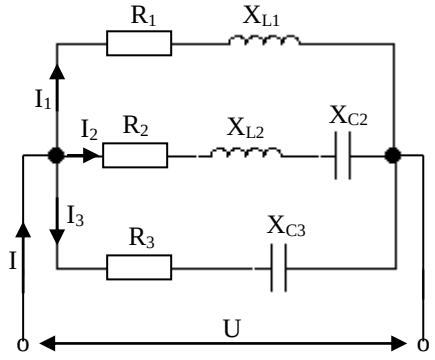
4.2.11. Kolika je ekvivalentna impedansa dveju paralelnih grana čije su impedanse po granama jednake: $\underline{Z}_1 = (1 - j\,0{,}5)$ Ω i $\underline{Z}_2 = (1 + j\,0{,}5)$ Ω ?

4.2.12. Dva kalema vezana su paralelno i priključena na prostoperiodični naizmenični napon efektivne vrednosti U = 120 V. Ako je za prvi kalem $R_1 = 6\ \Omega$, $X_{L1} = 5\ \Omega$ a za drugi $R_2 = 3\ \Omega$, $X_{L2} = 8\ \Omega$, odrediti struje po granama kao i ukupnu struju kola. Koliki je fazni pomak između napona i ukupne struje u kolu ?

4.2.13. Dve paralelne grane, čije su impedanse $\underline{Z}_1 = (9 - j\ 15)\ \Omega$ i $\underline{Z}_2 = (12 - j\ 10)\ \Omega$ priključene su na naizmenični napon U = 100 V. Odrediti sve struje u kolu, kao i faznu razliku između njih i napona U.

4.2.14. Dve paralelne grane sadrže sledeće parametre: prva $R_1 = 80\ \Omega$, L = 190 mH; a druga $R_2 = 260\ \Omega$, C = 21 μF. Ako su grane priključene na prostoperiodični napon U = 120 V, frekvencije f = 50 Hz, odrediti sve struje u kolu i faktor snage u kola.

4.2.15.



Sl.4.2.15.

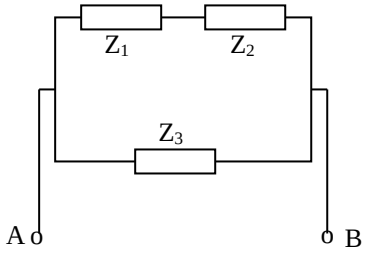
Dati su podaci za kolo prema sl.4.2.15. i oni iznose:
$R_1 = 1\ \Omega$, $X_{L1} = 4\ \Omega$; $R_2 = 8\ \Omega$, $X_{L2} = 10\ \Omega$, $X_{C2} = 2\ \Omega$;
$R_3 = 6\ \Omega$; $X_{C3} = 7\ \Omega$ i U = 120 V.
Izračunati sve struje u kolu (I_1, I_2, I_3 i I), kao i njihov fazni pomak u odnosu na napon U.

4.2.16. Kada se na krajeve jednog električnog kola priključi prostoperiodični naizmenični napon koji je dat izrazom (kompleksno) $\underline{U} = (10 + j\ 10)$ V, u kolu se uspostavi naizmenična struja koja iznosi $\underline{I} = (5 + j\ 3)$ A. Odrediti impedansu i admitansu kola..

4.2.17. Na krajevima prijemnika impedanse $\underline{Z} = (2 + j\ 4)\ \Omega$ deluje naizmenični napon $\underline{U} = (20 + j\ 10)$ V. Odrediti:

a) admitansu kola i nacrtati trougao provodnosti,
b) struju u kolu i nacrtati trougao struje (kolika je aktivna a kolika reaktivna komponenta struje ?).
c) nacrtati trougao impedanse, admitanse i trougao napona i prokomentarisati sve navedene trouglove.

4.2.18.



Sl.4.2.18.

Impedanse triju prijemnika vezane su kao na slici 4.2.18 i priključene na naizmenični napon učestanosti f = 100 Hz. Ako prvi prijemnik sadrži $R_1 = 14\ \Omega$ i $L_1 = 0{,}5$ H; a drugi $R_2 = 6\ \Omega$ i $C_2 = 10\ \mu$F; i na kraju treći $C_3 = 5\ \mu$F, odrediti ekvivalentnu impedansu i admitansu kola (između tačaka A i B). Umesto kola prema sl.4.2.18. nacrtati ekvivalentnu sliku i naznačiti vrednosti (parametre) na njoj.

4.2.19. Na izvor napona U vezani su kondenzatori kapaciteta C. Treba odrediti kako se menja otpor kola ako se kondenzatori vežu: a) redno; b) paralelno, i to 1; 2 ... do n kondemzatora istog kapaciteta.

4.2.20. Jedno kolo sadrži R i L elemente u paralelnoj vezi čija je ekvivalentna provodnost (admitansa) jednaka Y = 0,05 S, uz $\cos\varphi = 0{,}6$.Odrediti sve struje u ovom kolu, kao i induktivnost L ako je napon na ovim elementima U = 100 V, a frekvencija f = 50 Hz.

4.2.21. Na izvor napona U = 60 V vezan je paralelno termogeni otpora $R = 4\ \Omega$ i kondenzator kapacitetivnog otpora $X_C = 3\ \Omega$. Odrediti sve struje u kolu, i napisati sve impedanse i sve admitanse u kolu (pojedinačno po granama i ukupnu). Koliki je fazni pomak između napona U i struje I ?

4.2.22. Dva prijemnika sa impedansama $\underline{Z}_1 = 22 \cdot e^{j15^\circ}\ \Omega$ i $\underline{Z}_2 = 14 \cdot e^{j36^\circ}$ vezana su paralelno.
Kolika je ukupna impedansa i admitansa u kolu.

4.2.23. Paralelna veza termogenog otpora i induktiviteta ima ukupnu admitansu $Y = 0{,}05$ S i $\cos\varphi = 0{,}6$.
Kolike su provodnosti po granama i kolika je ukupna strija ako se veza priključi na napon $U = 220$ V ?

4.2.24. Paralelna veza kalema induktivnosti $L = 0{,}1$ mH (zanemarljivog termogenog otpora) i kondenzatora kapaciteta $C = 200$ pF priključena je na napon $U = 200$ V, frekvencije $f = 1$ MHz.
Odrediti sve struje u kolu, kao i ekvivalentnu impedansu kola.

4.2.25. Napisati izraz za ukupnu struju paralelne veze kalema induktivnosti $L = 50$ mH i kondenzatora kapaciteta $C = 0{,}67\ \mu$F, ako je ona priključena na naizmenični napon $u = 200 \sin 5\,000\,t$ V.

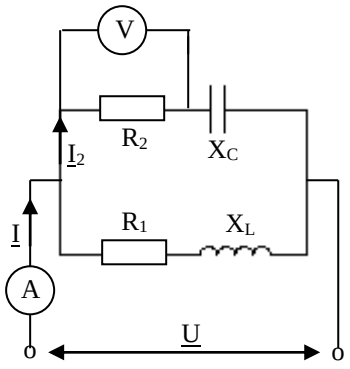
4.2.26. Na mrežu napona $U = 240$ V i frekvencije $f = 50$ Hz spojeni su paralelno termogeni otpornik otpora $R = 16\ \Omega$, kalem induktivnosti $L = 38{,}22$ mH (zanemarljivog termogenog otpora) i kondenzator kapaciteta $C = 159{,}24\ \mu$F. Odrediti sve struje u kolu.

4.2.27. Paralelna veza termogenog otpornika otpora $R = 300\ \Omega$, kalema induktivnosti $L = 0{,}5$ H i kapaciteta $C = 10\ \mu$F priključena je na napon $u = 100 \sin 1\,000\,t$.
Napisati analitički izraz za ukupnu struju u kolu i odrediti impedansu kola.

4.2.28. Paralelna veza aktivne provodnosti $G = 0{,}2$ S; reaktivne induktivne provodnosti $B_L = 4$ S i reaktivne kapacitivne provodnosti $B_C = 5$ S priključena je na napon mreže $U = 10$ V.
Kolika je ukupna struje ove veze ?

4.2.29. Paralelna veza termogenog otpora $R_1 = 120\ \Omega$ i kalema, čiji termogeni otpor iznosi $R_L = 40\ \Omega$ a induktivni $X_L = 31{,}4\ \Omega$, priključena je na naizmenični napon U.
Odrediti ukupnu struju $\underline{I}$, te struju $\underline{I}_1$ koja protiče kroz termogeni otpornik R_1, ako kroz kalem protiče struja inteziteta $\underline{I}_2 = 4$ A.

4.2.30.



Sl.4.2.30.

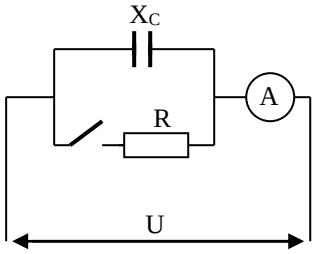
Koju će struji izmeriti ampermetar, prema sl.4.2.30, ako voltmetar meri $U_V = 22{,}5$ V; a vrednost otpora iznose: $R_1 = 2{,}5\ \Omega$; $X_L = 1\ \Omega$; $R_2 = 1{,}5\ \Omega$ i $X_C = 1{,}5\ \Omega$?

4.2.31. Tri prijemnika sa podacima: $R_1 = 24\ \Omega$ i $X_{L1} = 32\ \Omega$ (prvi); $R_2 = 40\ \Omega$ i $X_{L2} = 30\ \Omega$ (drugi) i $R_3 = 7\ \Omega$ i $X_{L3} = 24\ \Omega$ (treći) vezana su paralelno i priključena na naizmenični napon $U = 220$ V. Odrediti:

a) struje pojedinačnih prijemnika $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ i $\underline{I}_3$,
b) fazne pomake između struja I_1, I_2 i I_3 i napona U.
c) Ukupnu struju I i fazni pomak između nje i napona U.

4.2.32. Na naizmenični napon $\underline{U} = 20 \cdot e^{j50^\circ}$ V priključen je prijemnik nepoznate impedanse Z. Ako je u prijemniku uspostavljena struja $i = 5\sqrt{2}\ \sin(\omega t - 10^\circ)$ A, odrediti parametre nepoznate impedanse Z i napisati je kompleksno.

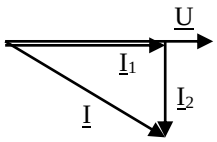
4.2.33.



Sl.4.2.33.

Kolo sa slike 4.2.33, kod kojeg je $R = X_C$, priključeno je na naizmenični napon efektivne vrednosti U. Ako je pre zatvaranja prekidača ampermetar pokazivao jačinu struje I, koliku će pokazivati struju I_1 nakon zatvaranja prekidača ?

4.2.34.



Sl.4.2.34.

Za fazorski dijagram prema slici 4.2.34. nacrtati odgovarajuću električnu šemu

4.2.35. Dva prijemnika poznatih provodnosti vezana su paralelno. Ako je aktivna provodnost prvog prijemnika $G_1 = 0{,}2$ mS i reaktivna (kapacitivna) $B_{C1} = 1$ mS; odnosno aktivna provodnost drugog prijemnika $G_2 = 0{,}6$ ms i reaktivna (induktivna) $B_{L2} = 0{,}4$ mS, odrediti:

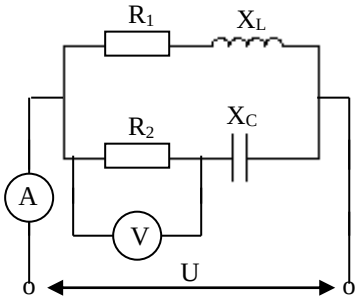
a) admitansu paralelne veze prijemnika,
b) faznu razliku između napona na paralelnoj vezi (U) i ukupne struje (I).

4.2.36. Na paralelnoj RL vezi priključen je napon, koji se menja po zakonu: $u = 100 \sin (1\,000\, t + 50°)$ V. Ako je $R = 5\ \Omega$ a $L = 20$ mH odrediti izraz za ukupnu struju u kolu i fazni pomak između nje i napona U.

4.2.37. Izračunati admitansu, konduktansu i susceptansu kola kod kojeg je rezistansa $X = 10\ \Omega$ vezana redno sa induktorom čiji je koeficijent samoindukcije $L = 0{,}1$ H, ako je frekvencija $f = 50$ Hz.

4.2.38. Admitansa kola naizmenične struje iznosi $\underline{Y} = (0{,}05 - j\ 0{,}08)$ S. Odrediti rezistansu i induktivnu reaktansu kola ako su ta dva elementa vezana: a) paralelno; b) redno.
Nacrtati fazorski dijagram napona i struja za oba slučaja.

4.2.39.



Sl.4.2.39.

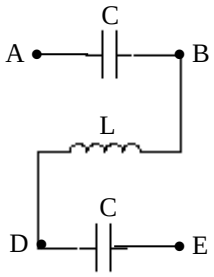
U kolu prikazanom na slici 4.2.39 voltimetar pokazuje efektivnu vrednost napona $U_V = 45$ V. Šta će pokazati ampermetar ako je: $R_1 = 5\ \Omega$; $X_L = 2\ \Omega$; $R_2 = 3\ \Omega$ i $X_C = 3\ \Omega$?

4.2.40. Tri impedanse $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_3$ vezane su paralelno i priključene su na napon mreže $\underline{U} = 50 \cdot e^{j60°}$ V. Ako je ukupna struja kola $\underline{I} = 31{,}5 \cdot e^{j24°}$ A a impedanse $\underline{Z}_2 = 10\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (4 + j\ 3)\ \Omega$, odrediti vrednost impedanse $\underline{Z}_1$.

4.2.41. Termogeni otpornik i savršeni kalem su paralelno vezani i priključeni na naizmenični napon. Njihove otpornosti iznose: $R = 60\ \Omega$ i $X_L = 80\ \Omega$.

a) Koliki je ukupni otpor veze?
b) Koliki će biti otpor veze ako se termogeni otpornik zameni kondenzatorom čija je kapacitivna otpornost jednaka termogenoj ?

4.2.42.



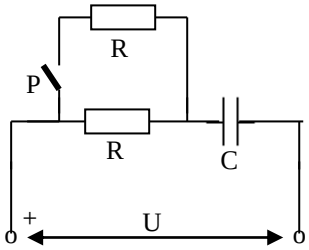
Sl.4.2.42.

Izračunati ekvivalentnu impedansu između tačaka A i D za kolo prema slici 4.2.42. ako su tačke B i E :

a) kratko spojene
b) otvorene

Brojni podaci: $C = 1\ \mu F$; $L = 30\ mH$; $f = 1\ 000\ Hz$.

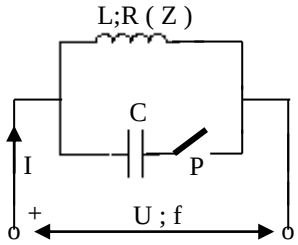
4.2.43.



Sl.4.2.43.

Kako će se promeniti napon na kondenzatoru, na slici 4.2.43. posle zatvaranja prekidača P, pod uslovom da se priključeni napon nije promenio ? Šta se dogodilo sa naponom na otporniku R ? Odgovor argumentovano obrazložiti.

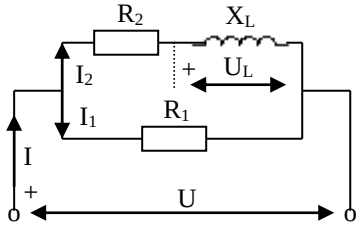
4.2.44.



Sl.4.2.44.

Induktivni prijemnik, čija je induktivnost $L = 50\ mH$ i impedansa $Z = 22\ \Omega$, priključen je na mrežu kao na slici 4.2.44.
Odrediti kapacitivnost kondenzatora koji treba vezati paralelno da bi struja u glavnom vodu I (ukupna struja) bila u fazi sa naponom.

4.2.45.



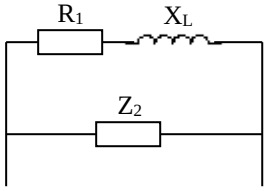
Sl.4.2.45.

Za kolo na slici 4.2.45 dati su sledeći podaci:
$R_1 = 10\ \Omega$; $X_L = 5\ \Omega$; $U_L = 10\ V$.
Napon U_L fazno prednjači naponu U za $\varphi = 45°$.
Odrediti:

a) efektivnu vrednost struja I_1, I_2, I i napona U_{R2} i U;
b) nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

4.2.46. Prijemnik koji sadrži rednu vezu R i L elemente ima fazni pomak između napona U i struje I od $\varphi = 53{,}13°$ ($\cos\varphi = 0{,}6$). Koliki će biti $\cos\varphi'$ (faktor snage) prijemnika koji se sastoji od istih elemenata, ali u paralelnoj vezi ?

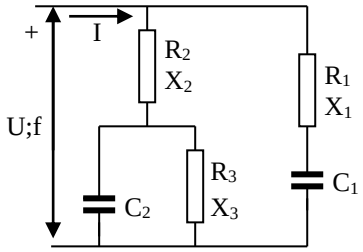
4.2.47.



Sl.4.2.47.

Za kolo na slici 4.2.47. odrediti nepoznate otpore R_1 i X_L, tako da je $\varphi = \pi/4$, ako je poznato:
$R_1 = 2\,X_L$; $\underline{Z}_2 = (\,10 + j\,20\,)\ \Omega$.

4.2.48.

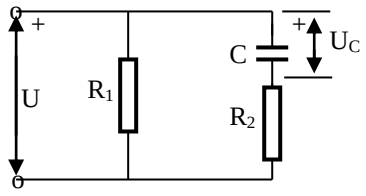


Sl.4.2.48.

Tri kalema poznatih aktivnih i reaktivnih otpornosti i dva kondenzatora poznatih kapaciteta C_1 i C_2 vezani su u kolo prema sl.4.2.48. Ako se kolo priključi na naizmenični napon efektivne vrednosti U i učestanosti f, odrediti efektivnu vrednost ukupne struje I.

Brojni podaci:
$U = 220$ V; $f = 50$ Hz; $R_1 = 12\ \Omega$; $X_1 = 12\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $X_2 = 6\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$; $X_3 = 5\ \Omega$; $C_1 = 300\ \mu$F; $C_2 = 200\ \mu$F.

4.2.49.



Sl.4.2.49.

Dva termogena otpornika R_1 i R_2 i kondenzator kapaciteta C vezani su u kolo prema sl.4.2.49. i priključeni na nepoznati naizmenični napon. Ako je poznat izraz za trenutnu vrednost napona na krajevima kondenzatora u_C, u odnosu na prikazani pozitivni smer, odrediti:

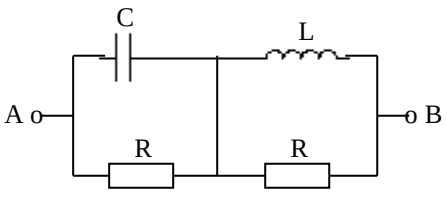
a) ekvivalentnu impedansu kola,
b) izraze za trenutne vrednosti svih struja u kolu (i_1, i_2, i), kao i za ukupni napon u.

Brojni podaci:
$u_C = 192\sqrt{2}\sin\omega t$ [V]; $R_1 = 50\Omega$; $R_2 = 28\ \Omega$; $X_C = 96\ \Omega$.

4.2.50. Kalem otpornosti R_L i induktivnosti L i kondenzator nepoznatog kapaciteta C, vezani su paralelno i priključeni na naizmenični napon učestanosti f. Odrediti kapacitet C tako da ukupna struja kola bude u fazi sa priključenim naponom.
Brojni podaci: $R_L = 5\ \Omega$; $L = 100$ mH; $f = 50$ Hz.

4.2.51. Tri prijemnika vezana su paralelno i priključena na naizmenični napon, koji je dat kompleksnim izrazom $\underline{U} = (\,(\,25 + j\,43{,}3\,)$ V. Poznati su kompleksni izrazi za ukupnu struju u kolu $\underline{I} = (\,28{,}76 + j\,12{,}6\,)$ A i za impedanse $\underline{Z}_1 = (\,2 + j\,2\,)\ \Omega$ i $\underline{Z}_2 = 10\ \Omega$. Odrediti kompleksni izraz za impedansu trećeg prijemnika $\underline{Z}_3$.

4.2.52.



Sl.4.2.52.

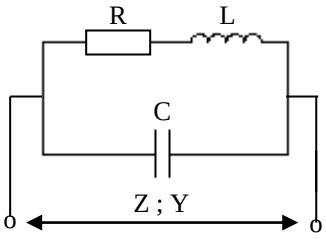
Dva otpornika otpornosti R, kalem induktivnosti L i kondenzator kapaciteta C vezani su kao na slici 4.2.52. Odrediti otpornost R tako da ekvivalentna impedansa između tačaka A i B ne zavisi od učestanosti.

4.2.53. Kalem induktivnosti L i termogenog otpora R_L i kondenzator kapaciteta C paralelno su vezani i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti U, početne faze θ i promenljive učestanosti f. Odrediti:

a) Učestanost f pri kojoj su napon $\underline{U}$ i ukupna struja $\underline{I}$ u fazi;
b) Kompleksne izraze za sve struje u kolu ($\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ i $\underline{I}$).

Brojni podaci: $L = 1$ H; $C = 0{,}25\mu$F; $R_L = 400\ \Omega$; $U = 100$ V; $\theta = 0°$.

4.2.54.

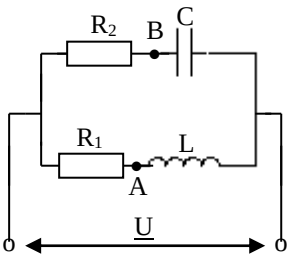


Sl.4.2.54.

Za kolo prikazano na sl.4.2.54. pri učestanosti f poznato je $R = X_L = X_C = 2\ \Omega$. Odrediti impedansu i admitansu kola za učestanosti: a) $f_1 = f/2$; b) $f_2 = f$ i c) $f_3 = 2\ f$.

Nacrtati trougao otpora i trougao provodnosti za sva tri slučaja..

4.2.55.



Sl.4.2.55.

Kolo, prikazano na sl.4.2.55, priključeno je na naizmenični napon $\underline{U} = 10$ V.
Naći napon između tačaka A i B i nacrtati potpuni fazorski dijagram napona i struja.

Brojni podaci: $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$; $X_L = X_C = 2\ \Omega$.

4.2.56. Efektivna vrednost prostoperiodičnog napona između krajeva jednog prijemnika iznosi $U = 200$ V, a efektivna vrednost prostoperiodične struje je $I = 0{,}1$ A. Struja fazno prednjači naponu za 30°, pri čemu su referentni smerovi napona i struje usaglašeni (isti početak). Odrediti:

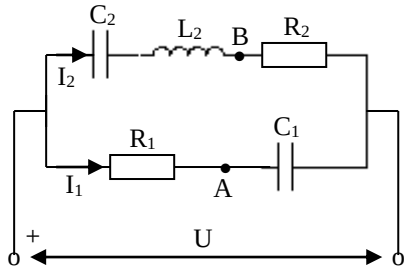
a) impedansu, aktivnu i reaktivnu otpornost prijemnika;
b) admitansu, aktivnu i reaktivnu provodnost prijemnika.

4.2.57. Kalem induktivnosti L i kondenzator kapaciteta C vezani su paralelno i priključeni na prostoperiodični napon čija se učestanost može menjati.

Predstaviti grafički u funkciji kružne učestanosti:

a) reaktivnu provodnost i admitansu ove paralelne veze;
b) reaktivnu otpornost i impedansu ove paralelne veze;
c) faznu razliku između ukupne struje (napojne grane) i priključenog napona na ovoj paralelnoj vezi.

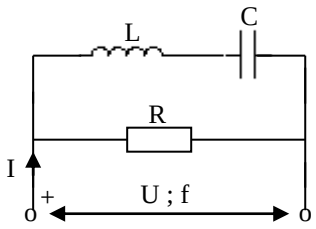
4.2.58.



Sl.4.2.58.

Za kolo prema sl.4.2.58. poznata je aktivna i reaktivna otpornost prve grane $R_1 = 400\ \Omega$ i $X_1 = 300\ \Omega$, efektivne vrednosti struja $I_1 = 10$ mA i $I_2 = 20$ mA, a struja I_1 fazno prednjači struji I_2 za $\alpha = 60°$. Odrediti efektivnu vrednost napona između tačaka A i B.

4.2.59.

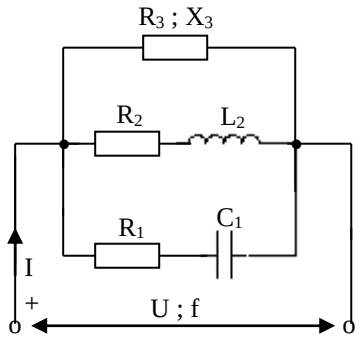


Sl.4.2.59.

Za kolo prostoperiodične struje prikazano na sl.4.2.59. dato je: $U = 220$ V; $\omega = 10^4\ s^{-1}$; $L = 20$ mH.

Odrediti R i C tako da maksimalna vrednost ukupne struje bude jednaka $I_m = 0{,}44$ A i da ona fazno prednjači naponu U za ugao 45°.

4.2.60.

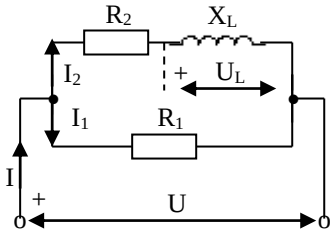


Sl.4.2.60.

Za kolo prema sl.4.2.60. poznato je:
$U = 100$ V; $f = 50$ Hz; $R_1 = 10\ \Omega$; $C_1 = 318\ \mu$F; $R_2 = 20\ \Omega$; $L_2 = 64$ mH; $I = 10$ A; $\varphi = 0$ (fazni pomak između U i I).

Kolika je aktivna i reaktivna otpornost trećeg prijemnika (R_3 i X_3) ?

4.2.61.



Sl.4.2.61.

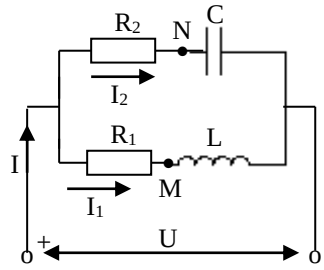
Za deo kola prostoperiodične struje prikazanog na slici 4.2.61. poznato je:
$R_1 = 10\ \Omega$; $X_L = 2\ \Omega$; $U_L = 4{,}5$ V;
a napon U_L fazno prednjači naponu U za ugao $\alpha = 63°40'$.

Izračunati efektivnu vrednost ukupne struje I.

4.2.62. Termogeni otpornik otpornosti R, kalem induktivnosti L i kondenzator kapacitivnosti C vezani su međusobno paralelno i priključeni su na prostoperiodični napon U. Ako su poznate efektivne vrednosti struja: ukupna struja $I = 10$ mA; struja kroz termogenu otpornost $I_R = 6$ mA i struja kondenzatora $I_C = 25$ mA.

Kolika je efektivna vrednost struje u grani sa kalemom I_L ?

4.2.63.



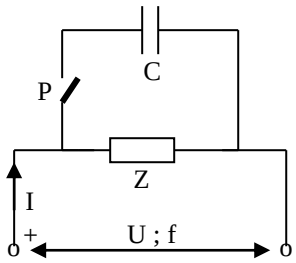
Sl.4.2.63.

Za kolo prema sl.4.2.63. poznato je:
$U = 100$ V; $I_1 = 20$ A; $I_2 = 10$ A; $I = 10\sqrt{5}$ A; $R_1 = 3\ \Omega$.

Odrediti:

a) efektivne vrednosti sviju padova napona i napon između tačaka M i N,
b) Otpornosti R_2, X_L i X_C, i
c) Ukupnu aktivnu i reaktivnu otpornost kola.

4.2.64.



Sl.4.2.64.

Induktivni prijemnik, induktivnosti L = 50 mH i impedanse Z = 20 Ω priključen je na naizmenični napon U prema slici 4.2.64.

Odrediti kapacitivnost kondenzatora C koju treba vezati paralelno prijemniku tako da ukupna struja I u napojnom vodu bude u fazi sa naponom U.

Koliki je cos φ ove paralelne veze ?

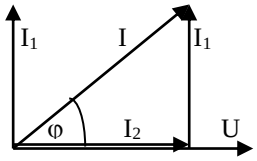
4.2.65. Otpornik otpornosti R vezan je paralelno sa jednim prijemnikom nepoznatih karakteristika. Ova paralelna veza je priključena na prostoperiodični napon $u = 120 \sin (4\,000\, t - 30°)$ V. Ukupna struja (struja napojne grane) je $i = 6 \sin (4\,000\, t + 30°)$ A, pri čemu su referentni smerovi usaglašeni.

Odrediti otpornost R i parametre (otpore) prijemnika.

4.2.66. Realan kalem vezan je paralelno sa idealnim kondenzatorom i priključen je na prostoperiodični napon efektivne vrednosti U = 150 mV. Pri određenoj učestanosti napona, impedansa kola iznosi $Z_L = 20\ \Omega$, $\cos \varphi_L = 0{,}8$, a kapacitivna otpornost $X_C = 12\ \Omega$. Kolika je efektivna vrednost ukupne struje u kolu i kolika je fazna razlika između nje i napona U ?

4.2.67. Reaktansa prijemnika je $X = 100\ \Omega$ a susceptansa $B = -1$ mS. Kolika je impedansa prijemnika ?

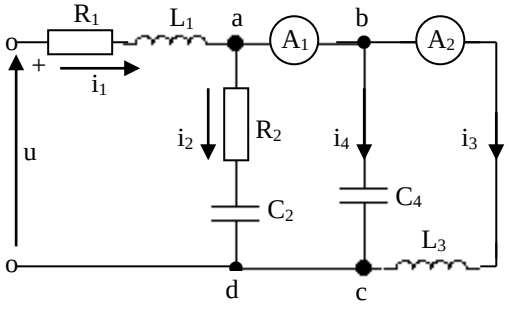
4.2.68.



Sl.4.2.68.

Za dati fazorski dijagram prema sl.4.2.68. nacrtati odgovarajuću šemu električnog kola.

4.2.69.

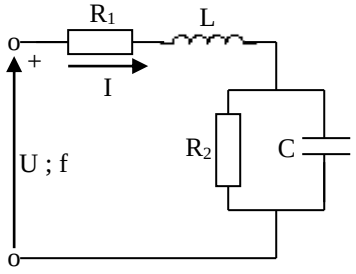


Sl.4.2.69.

U kolu, prema sl.4.2.69, prvi ampermetar pokazuje nulu. Koju struju pokazuje drugi ampermetar, ako elementi u kolu imaju sledeće podatke:

U = 100 V; f = 50 Hz ; $R_1 = 50\ \Omega$; $L_1 = 0{,}1$ H; $R_2 = 50\ \Omega$; $C_2 = 101{,}5\ \mu$F; $L_3 = 0{,}2$ H; .

4.2.70.



Sl.4.2.70.

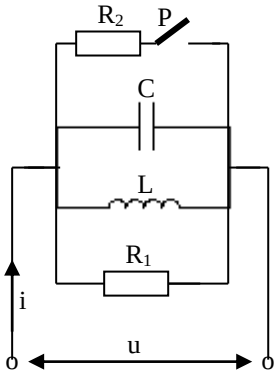
U kolu prostoperiodične struje, prikazanom na sl.4.2.70, poznato je: U = 50 V; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 6\ \Omega$; L = 300 μH i C = 250 μF.

Odrediti:

a) učestanost f pri kojoj je struja I u fazi sa naponom U;

b) struju I kada je ispunjen uslov pod a)

4.2.71.

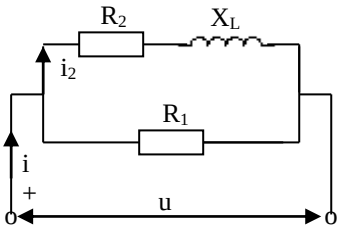


Sl.4.2.71.

Dato kolo, prema sl.4.2.71, priključeno je na napon $\underline{U} = 100\, e^{j\,\pi/4}$. Fazni pomak između U i I je $\varphi = \pi/4$ rad. Merenjem je ustanovljeno da je efektivna vrednost struje kroz kalem tri puta veća od efektivne vrednosti struje kroz kondenzator za $R_1 = 20\ \Omega$ i $\omega = 1\,000$ rad/s.

a) Nacrtati fazorski dijagram napona i struja.
b) Odrediti kapacitet kondenzatora C i induktivnost kalema L.
c) Šta će se dogoditi sa faznim pomakom φ ako se uključi prekidač P ?

4.2.72.



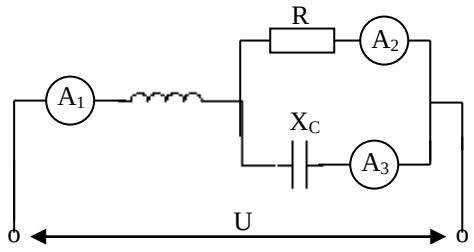
Sl.4.2.72.

Za kolo prema sl.4.2.72, poznato je da napon na kalemu U_L fazno prednjači naponu U za ugao $\beta = 60°$. Ako je $R_1 = 100\ \Omega$; $X_L = 2\ \Omega$ i $U_L = 4{,}5$ V,

a) nacrtati fazorski dijagram napona i struja
b) izračunati fazni pomak između U i I_2 (φ_2)
c) izračunati ukupnu struju I

4.2.73. Paralelna veza RLC (sl.4.2.71. bez R_2) priključena je na naizmenični napon dat izrazom $u = 169{,}2 \sin 314\, t$ [V].
Napisati izraz za ukupnu struju i u kolu ako je: $R = 12\ \Omega$; $X_L = 6\ \Omega$ i $X_C = 12\ \Omega$.

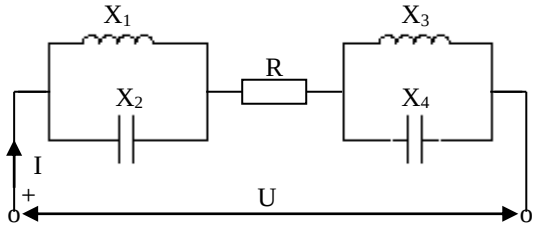
4.2.74.



Sl.4.2.74.

Kolo na sl.4.2.74. priključeno je na naizmenični napon efektivne vrednosti U = 25 V.
Šta će pokazivati ampermetri A_1, A_2 i A_3 (koji mere efektivne vrednosti struja) ako je: $R = 5\ \Omega$, $X_L = 5\ \Omega$ i $X_C = 2{,}5\ \Omega$.

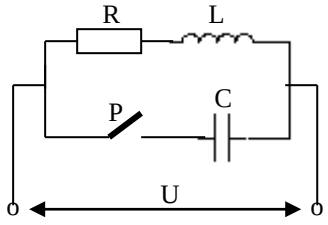
4.2.75.



Sl.4.2.75.

Za kolo, prema sl.4.2.75, poznati su sledeći podaci:
$U = 100$ V; $f = 50$ Hz; $R = 10\ \Omega$; $X_1 = 20\ \Omega$; $X_2 = 10\ \Omega$ i $X_3 = 10\ \Omega$.
Koliko iznosi kapacitivna otpornost X_4, ako su napon U i struja I međusobno u fazi ?

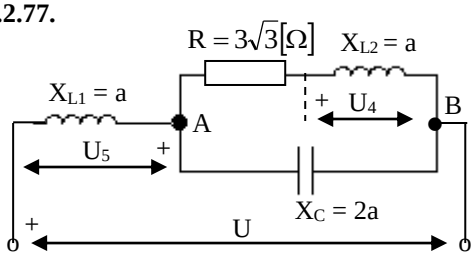
4.2.76.



Sl.4.2.76.

Kolo na sl.4.2.76. priključeno je na naizmenični napon efektivne vrednosti U = 380 V, učestanosti f = 50 Hz. Pri otvorenom prekidaču struja iznosi I = 24 A, a fazni pomak između napona i struje je $\varphi = \pi/6$.
Nakon zatvaranja prekidača napon i struja kola (ukupna struja) su u fazi, odnosno $\varphi' = 0$.
Koliki je kapacitet kondenzatora C?

4.2.77.

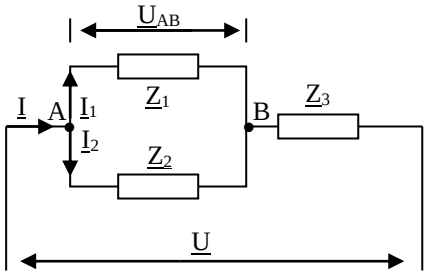


Sl.4.2.77.

U kolu sa slike 4.2.77. napon $\underline{U}_5$ fazno kasni za naponom $\underline{U}_4$ za ugao 120°. Odrediti:

a) vrednost konstante **a** u omima,
b) fazni pomak između napona U i ukupne struje I
c) Nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

4.2.78.



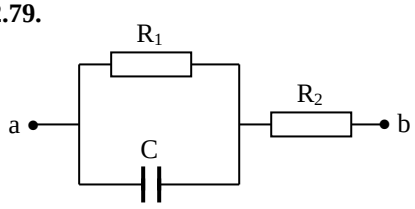
Sl.4.2.78.

Na sl.4.2.78. data je mešovita veza impedansi (otpora), koje su priključene na napon mreže $\underline{U} = 220 \cdot e^{j\,0^\circ}$ V.

a) Izračunati struje $\underline{I}$, $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$, kao i napone na svakoj od impedansi $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_3$.
b) Nacrtati odgovarajući dijagram struja i napona (Razmera 1 cm ≡ 0,5 A ≡ 20 V).

Brojni podaci:
$\underline{Z}_1 = (20 + j\,25{,}12)\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = (2 - j\,31{,}83)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (5 - j\,159{,}16)\ \Omega$

4.2.79.



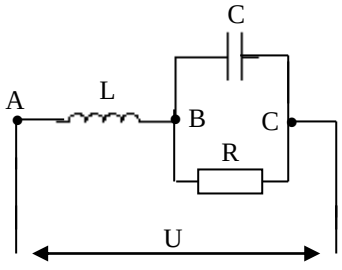
Sl.4.2.79.

Kolo prema slici 4.2.79. priključeno je na naizmenični napon efektivne vrednosti U = 16 V.

a) Kolika je vrednost otpornika R_2 da bi ukupna struja imala intezitet od I = 5 A ?
b) Koliki je fazni pomak φ između napona U i struje I ?
c) Nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

Brojni podaci: $R_1 = 3\ \Omega$; $X_C = 4\ \Omega$.

4.2.80.



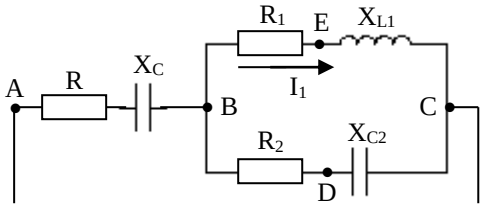
Sl.4.2.80.

Na mešovitu vezu RLC, prema sl.4.2.80 priključen je naizmenični napon $u = 240 \cos 10^3\, t$ [V].

a) Izračunati sve napone i struje u kolu
b) Fazni pomak φ između ukupnog napona i ukupne struje.
c) Nacrtati potpuni fazorski dijagram napona i struja.

Brojni podaci: L = 0,2 H; C = 5 μF; R = 100 Ω.

4.2.81.



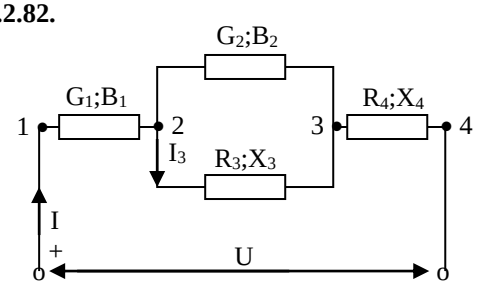
Sl.4.2.81.

Za kolo prema sl.4.2.91, poznata je struja koja prolazi kroz L_1 i R_1 i ona iznosi $I_1 = 2$ A. Odrediti:

a) sve padove napona i napon između tačaka D i E,
b) preostale struje u kolu.
c) Nacrtati potpuni fazorski dijagram napona i struja

Brojni podaci: $R = 2\ \Omega$; $X_C = 3\ \Omega$; $R_1 = 3\ \Omega$; $X_{L1} = 4\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $X_{C2} = 3\ \Omega$.

4.2.82.

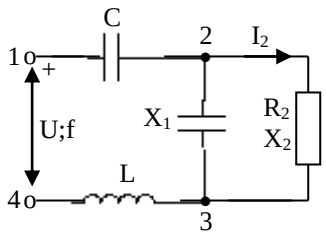


Sl.4.2.82.

Četiri prijemnika su vezana kao na slici 4.2.82. i priključena su u kolo prostoperiodične struje. Ako je struja trećeg prijemnika $I_3 = 5$ mA uz sledeće parametre: $G_1 = 0{,}2$ mS; $B_1 = -0{,}1$ mS; $G_2 = 0{,}1$ mS; $B_2 = -0{,}3$ mS; $R_3 = 1$ kΩ; $X_3 = -1$ kΩ; $R_4 = 6$ kΩ; i $X_4 = -3$ kΩ.
Odrediti:

a) efektivnu vrednost napona između tačaka 1 i 4,
b) faznu razliku između napona U_{14} i struje I.

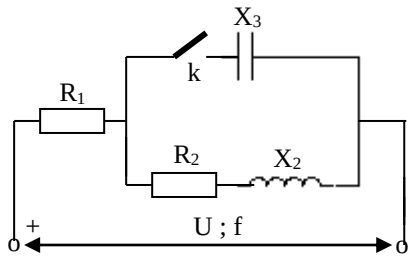
4.2.83.



Sl.4.2.83.

Za kolo prostoperiodične struje, prema sl.4.2.83, poznato je: $X_1 = -400\ \Omega$; $C = 0{,}5\ \mu$F; $L = 30$ mH; $R_2 = 400\ \Omega$; $X_2 = 400\ \Omega$; $I_2 = 50$ mA; i $U_{21} = 10$ V.
Kolika je efektivna vrednost napona U ?

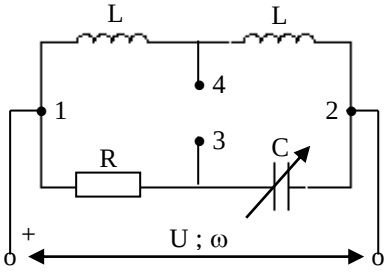
4.2.84.



Sl.4.2.84.

Za kolo prostoperiodične struje prikazano na sl.4.2.84. poznato je:
$U = 220$ V; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 12\ \Omega$; $X_2 = 16\ \Omega$ i $X_3 = -20\ \Omega$.
Prekidač **k** je prvo bio otvoren, a zatim se zatvori.
Odrediti za koliko je promenjena (porasla) efektivna vrednost struje prvog prijemnika ?

4.2.85.



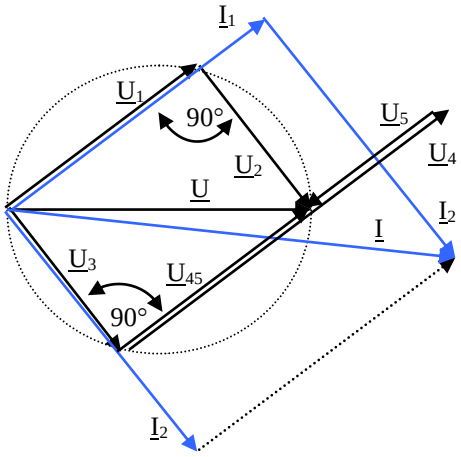
Sl.4.2.85.

U kolu prostoperiodične struje , prema sl.4.2.85, kapacitivnost C se menja u granicama:

od $C_{min} = \dfrac{1}{\omega R\sqrt{3}}$ do $C_{max} = \dfrac{\sqrt{3}}{\omega R}$

Odrediti promenu (porast) efektivne vrednosti napona između tačaka 3 i 4 U_{34}.

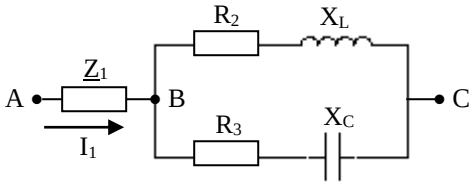
4.2.86.



Sl.4.2.86.

Na sl.4.2.86. je prikazan fazorski dijagram napona i struja jednog naizmeničnog kola prostoperiodične struje.
Nacrtati odgovarajuću šemu tog kola.

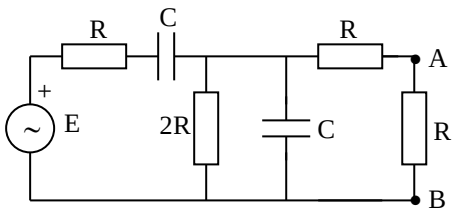
4.2.87.



Sl.4.2.87.

Za kolo prema sl.4.2.87, poznati su sledeći podaci: $R_2 = 6\ \Omega$; $R_3 = 4\ \Omega$; $X_L = 8\ \Omega$; $X_C = 18\ \Omega$.
Efektivna vrednost struje prijemnika impedanse Z_1 iznosi $I_1 = 5$ A, a njena početna faza je $\theta_1 = -36°52'$ u odnosu na označeni smer (zadati početni trenutak važi za celo kolo).
Izračunati struje I_1, I_2 i I_3 i nacrtati njihov fazorski dijagram u razmeri 1 cm ≡ 1 A.

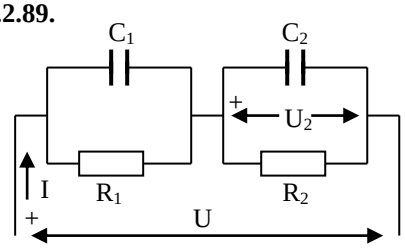
4.2.88.



Sl.4.2.88.

Na kojoj frekvenciji f će u kolu, prema sl.4.2.88, napon između tačaka A i B iznositi $\underline{U}_{AB} = (1 + j\ 1)$ [V], ako je $\underline{E} = (6 + j\ 6)$ [V], $R = 1$ kΩ i $C = 1$ nF ?

4.2.89.

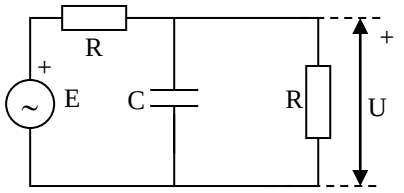


Sl.4.2.90.

Odrediti parametre R_1, R_2 i C_1 u kolu, prikazanom prema sl.4.2.90, ako je poznato da je napon $\underline{U}_2$ u fazi sa naponom napajanja $\underline{U}$ i da je pet puta manji od njega.

Brojni podaci:
$R_1 + R_2 = 1$ MΩ i $C_2 = 10$ pF.

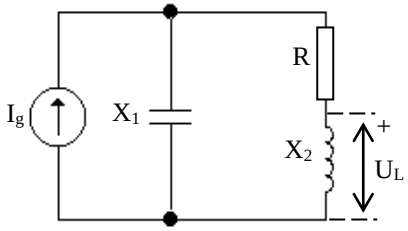
4.2.90.



Sl.4.2.90.

U kolu prostoperiodične struje, prema slici 4.2.90, dato je: E = 2 V, R = 2 kΩ i C = 1 μF. Ako se kružna učestanost ω menja, skicirati zavisnost efektivne vrednosti napona U od ω.

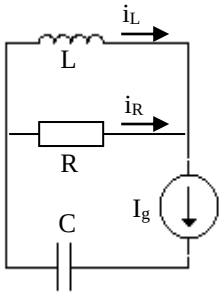
4.2.91.



Sl.4.2.91.

U kolu prostoperiodične struje, prikazanom na slici 4.2.91, poznato je:
I_g = 2 mA; R = 200 Ω i X_2 = 100 Ω.
Napon kalema je u fazi sa strujom generatora.
Kolika je reaktansa X_1 ?

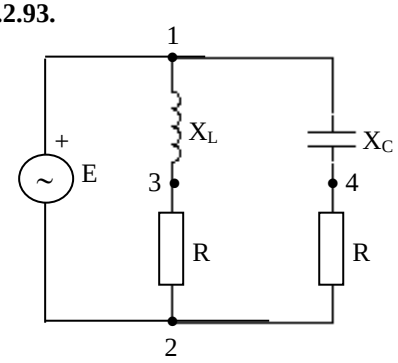
4.2.92.



Sl.4.2.92.

U kolu prostoperiodične struje, prema slici 4.2.92, poznato je:
$R = 100\sqrt{3}\ \Omega$; ωL = 300 Ω i $i_R = 20\sqrt{6}\cos(\omega t + \pi/3)$ mA.
Nacrtati fazorski dijagram struja i odrediti početnu fazu (početni ugao) struje i_g.

4.2.93.

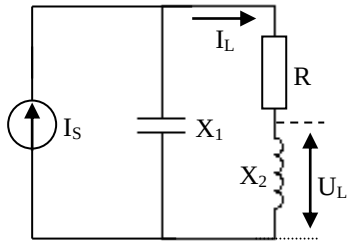


Sl.4.2.93.

Za kolo prostoperiodične struje, prikazano na slici 4.2.93, poznato je:
E = 100 V i R = X_L = 200 Ω.

a) Nacrtati fazorski dijagram napona.
b) Kolika je otpornost kondenzatora X_C da bi efektivna vrednost napona u_{34} bila maksimalna ?
c) Kolika je ta efektivna vrednost napona U_{34} ?
d) Kolika je pri tome fazna razlika između napona u_{34} i u_{12} ?

4.2.94.



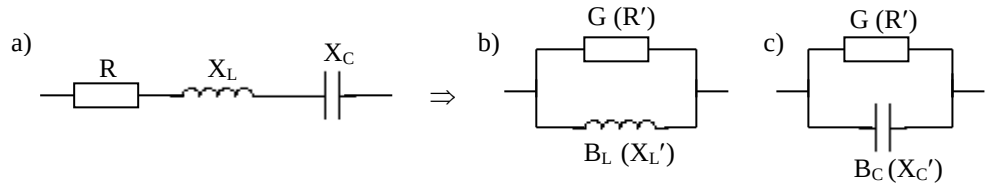
Sl.4.2.94.

U prostoperiodičnom kolu naizmenične struje, prikazanom na slici 4.2.94, poznato je $I_S = 2$ mA, $R = 200\ \Omega$ i $X_2 = 100\ \Omega$.
Napon kalema je u fazi sa strujom generatora.
Koliko iznosi reaktansa X_1 ?

5. EKVIVALENTNE VEZE

Rešavajući paralelnu vezu otpora preko admitansi, mi smo u stvari tu vezu sveli na jednu aktivnu i jednu reaktivnu provodnost (konduktansu i susceptansu). U ovom slučaju ekvivalentna admitansa je jednaka: $\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L) = G \pm j\,B$. Na osnovu ovih podataka (G i B) može se nacrtati trougao provodnosti (sl.36). Kako je $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$, sledi da se paralelna veza G i B može pretvoriti u rednu vezu R i X ,jer ekvivalentna impedansa u sebi sadrži aktivnu i reaktivnu otpornost (rezistansu i reaktansu). Ekvivalentna impedansa je uvek jednaka $\underline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) = R \pm j\,X$, bez obzira kakva je veza. To praktično znači da je u jednom slučaju ekvivalentno kolo u paralelnoj vezi (kada se radi sa admitansom), a u drugom slučaju u rednoj vezi (kada se radi sa impedansom). **I u jednom i u drugom slučaju ukupna struja (ekvivalentna) mora ostati ista, kao i fazni pomak između nje i napona**, **što čini osnovni uslov ekvivalentnosti ta dva spoja**.

5.1. PRETVARANJE REDNE VEZE RLC U PARALELNU VEZU GB



Sl.22.

Kako je kod redne veze RLC kola iz trougla otpora i provodnosti (sl.22.) $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y}$, odnosno

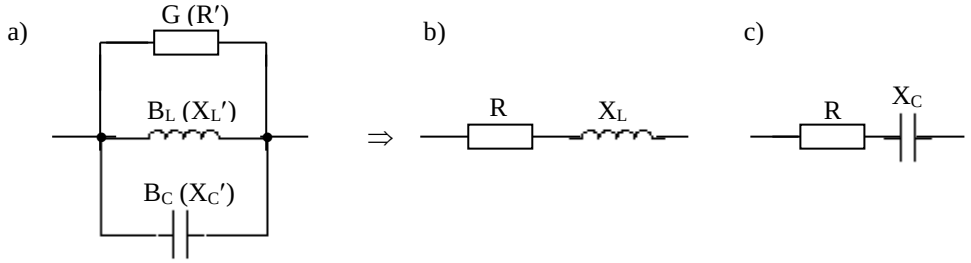
$$\sin\varphi = \frac{X}{Z} = \frac{B}{Y} \;\Rightarrow\; G = \frac{R}{Z}Y = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad ; \quad B = \frac{X}{Z}Y = \frac{X}{Z^2} = \frac{X}{R^2 + X^2} \; .$$

Dakle, ako rednu vezu RLC pretvorimo u paralelnu vezu G i B, tada umesto otpora R, X_L i X_C nastaju novi otpori u paralelnoj vezi R′ (R′ = 1/G) i X′ (X′ = 1/B). Sledi:

$$R' = \frac{Z^2}{R} = \frac{R^2 + X^2}{R}, \text{ odnosno } \quad X' = \frac{Z^2}{X} = \frac{R^2 + X^2}{X}$$

Za $X_L > X_C$ redna veza RLC se transformiše u paralelnu G i B_L vezu ($\underline{Z} = R + j\,X \Rightarrow \underline{Y} = G - j\,B_L$), sl.22. b) a za $X_C > X_L$ redna veza RLC se pretvara u paralelnu vezu G i B_C ($\underline{Z} = R - j\,X_C \Rightarrow \underline{Y} = G + j\,B_C$), sl.22.c).

5.2. PRETVARANJE PARALELNE VEZE RLC (G B_L B_C) U REDNU VEZU R X



Sl.23.

Iz trougla provodnosti i otpora sledi: $\cos\varphi = \frac{G}{Y} = \frac{R}{Z}$, odnosno $\sin\varphi = \frac{B}{Y} = \frac{X}{Z}$.

Na osnovu navedenih izraza izvedu se relacije za određivanje parametara u rednoj vezi (R i X).

$$R = \frac{G}{Y}Z = \frac{G}{Y^2} = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad \text{odnosno} \quad X = \frac{B}{Y}Z = \frac{B}{Y^2} = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

Za $B_L > B_C$ ($\underline{Y} = G - j\,B$) paralelna veza G B_L B_C (R′ X_L′X_C′), sl.23. a) se transformiše u rednu vezu R i X_L ($\underline{Z} = R + j\,X_L$), sl.23. b); a za $B_L < B_C$ u rednu vezu R i X_C, što je prikazano na sl.23. c).

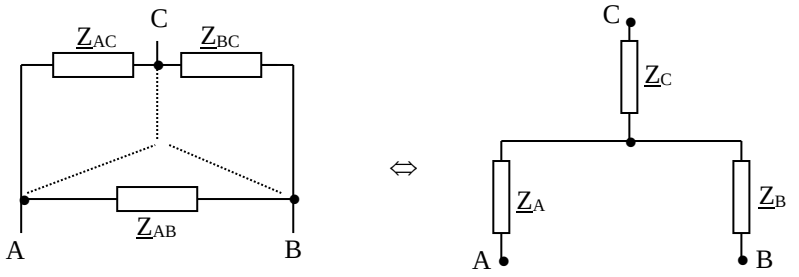
NAPOMENA! Navedena pretvaranja se mogu izvršiti i kompleksnim rešavanjem impedanse i admitanse. Ako se pretvara redna veza RLC u paralelnu GB vezu, toj vezi pronaći kompleksnu admitansu $\underline{Y}$, a samim tim tako nastaju parametri G i B. Kod pretvaranja paralelne veze GB_LB_C u rednu vezu RLC samo kompleksno izračunamo impedansu $\underline{Z}$ čime smo i odredili parametre R i X_L ili R i X_C (redna veza).

5.3. METODA TRANSFORMACIJE (Pretvaranje veze u trougao u zvezdu i obrnuto)

Impedanse vezane u trougao mogu se zamenuti ekvivalentnim spojem vezanim u zvezdu, i obrnuto. Prilikom ove transformacije (pretvaranja) napon između tačaka na koje su vezane impedanse mora ostati isti, samim tim i struja koju povlače ove impedanse mora ostati ista. Pored toga fazni pomak između navedenih napona i struja mora ostati nepromenjen (što je bilo i kod predhodnih ekvivaklentnih spojeva).

Način transformacije je isti kao i kod otpornika R (kod kola sa jednosmernom strujom). Razlika je u tome što se umesto otpornika sada koristi impedansa $\underline{Z}$ u kompleksnom obliku.

5.3.1. PRETVARANJE IMPEDANSI VEZANIH U TROUGAO U VEZU U ZVEZDU



a) Sl.24. b)

Prilikom pretvaranja impedansi vezanih u trougao u impedanse vezane u zvezdu poznate su vrednosti impedansi u trouglu $\underline{Z}_{AB}$, $\underline{Z}_{BC}$ i $\underline{Z}_{AC}$ (Sl.24.a) a traže se vrednosti ekvivalentnih impedansi vezanih u zvezdu $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$ i $\underline{Z}_C$ (Sl.24.b). Poštujući uslove ekvivalentne povezanosti slede izrazi na osnovu kojih se rešavaju nepoznate impedanse vezane u zvezdu:

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_{AB}\cdot\underline{Z}_{AC}}{\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}+\underline{Z}_{AC}} \quad ; \quad \underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_{AB}\cdot\underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}+\underline{Z}_{AC}} \quad ; \quad \underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_{BC}\cdot\underline{Z}_{AC}}{\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}+\underline{Z}_{AC}}$$

Ako impedanse zamenimo admitansama, vrede sledeći izrazi:

$$\underline{Y}_A = \underline{Y}_{AB}+\underline{Y}_{AC}+\frac{\underline{Y}_{AB}\cdot\underline{Y}_{AC}}{\underline{Y}_{BC}} \quad ; \quad \underline{Y}_B = \underline{Y}_{AB}+\underline{Y}_{BC}+\frac{\underline{Y}_{AB}\cdot\underline{Y}_{BC}}{\underline{Y}_{AC}} \quad ; \quad \underline{Y}_C = \underline{Y}_{BC}+\underline{Y}_{AC}+\frac{\underline{Y}_{BC}\cdot\underline{Y}_{AC}}{\underline{Y}_{AB}}$$

.

5.3.2. PRETVARANJE IMPEDANSI VEZANIH U ZVEZDU U VEZU U TROUGAO

Kod ovoga pretvaranja postupak je isti kao i prilikom pretvaranja trougla u zvezdu. Sada su poznate impedanse vezane u zvezdu ($\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$ i $\underline{Z}_C$),sl.24.b, a traže se ekvivalentne impedanse vezane u trougao ($\underline{Z}_{AB}$, $\underline{Z}_{BC}$ i $\underline{Z}_{AC}$), sl.24.a.:

Konačna rešenja impedansi vezanih u trougao, poštujući ekvivalentnost veze, iznose:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_A+\underline{Z}_B+\frac{\underline{Z}_A\cdot\underline{Z}_B}{\underline{Z}_C} \quad ; \quad \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_B+\underline{Z}_C+\frac{\underline{Z}_B\cdot\underline{Z}_C}{\underline{Z}_A} \quad ; \quad \underline{Z}_{AC} = \underline{Z}_A+\underline{Z}_C+\frac{\underline{Z}_A\cdot\underline{Z}_C}{\underline{Z}_B}$$

Zamenom impedansi sa admitansama nastaju sledeći izrazi:

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{\underline{Y}_A\cdot\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A+\underline{Y}_B+\underline{Y}_C} \quad ; \qquad \underline{Y}_{BC} = \frac{\underline{Y}_B\cdot\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A} \quad ; \qquad \underline{Y}_{AC} = \frac{\underline{Y}_A\cdot\underline{Y}_C}{\underline{Y}_B}$$

ZADACI:

5.1. Za jedno kolo poznata je admitansa, koja iznosi $\underline{Y} = (0{,}2 - j\ 0{,}1)$ S. Nacrtati odgovarajuću šemu za datu impedansu i na njoj odrediti vrednosti odgovarajućih otpora. Da li se ova veza može transformisati u drugu vezu (ako je bila redna u paralelnu, ili obrnuto)? Ako može koliki će biti otpori kod transformisane veze ?

5.2. Otpornik $R = 10\ \Omega$ i kondenzator kapaciteta $C = 15{,}9$ nF vezani su paralelno. Koliki bi bili parametri ekvivalentne redne veze ako je učestanost $f = 1$ MHz ?

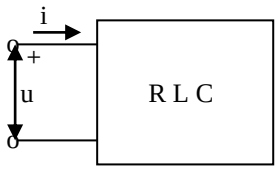
5.3. Rednu vezu termogenog otpora $R = 6\ \Omega$ i kalema induktivnog otpora $X_L = 8\ \Omega$ pretvoriti u odgovarajuću paralelnu vezu. Koliko iznose G', B_L', R' i X_L' u paralelnoj vezi ?

5.4. Električno kolo sastoji se od impedanse čija je vrednost $Z = 30\ \Omega$ i $\cos\varphi = 0{,}2$. Odrediti parametre impedanse R_L, X_L, G_L i B_L i to :

a) R_L i X_L su redno vezani ;
b) b) R_L i X_L su paralelno vezani. Na koji način se može povećati $\cos\varphi$ na $\cos\varphi = 0{,}8$? Koliko je u tom slučaju G_L' , B_L' , R' i X' ?

5.5. Redna veza termogenog otpora i kondenzatora treba da se pretvori u ekvivalentnu paralelnu vezu. Odrediti parametre R_p i C_p paralelne veze, ako su poznati parametri redne veze $R_R = 200\ K\Omega$, $C_R = 450$ pF i frekvencija $f = 2$ KHz.

5.6.



Sl.112.

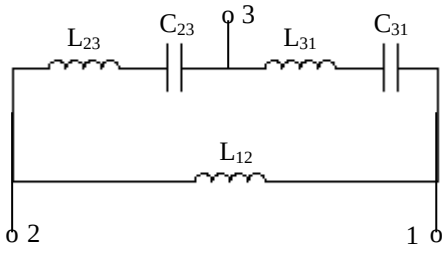
Prema sl.112 dat je jedan RLC prijemnik nepoznatih parametara. Ako se prijemnik priključi na prostoperiodični naizmenični napon dat izrazom $u = 123 \sin 5\,000\ t$ [V] on povlači struju koja iznosi $i = 12{,}3 \sin (5\,000\ t + 60°)$ [mA].

a) Prikazati ovaj prijemnik, pri zadanoj frekvenciji, jednom paralelnom vezom. Odrediti parametre ove veze.
b) Prikazati prijemnik jednom rednom vezom i izračunati parametre ove veze.
c) U slučaju redne veze, odrediti induktivnost kalema odnosno kapacitivnost kondenzatora koji vezan redno sa datom vezom, prouzrokuje da struja I i napon U budu u fazi.
d) U slučaju paralelne veze, odrediti induktivnost kalema odnosno kapacitet kondenzatora, koji vezan paralelno sa datom vezom, prouzrokuje da napon U i struja I budu u fazi.

5.7. Na paralelno RL kolo priključen je prostoperiodični napon $U = 60$ V, frekvencije $f = 50$ Hz. Otpornost termogenog otpornika je $R = 20\ \Omega$, a induktivnost kalema $L = 47{,}8$ mH.
Odrediti:

a) struje u paralelnim granama i ukupnu,
b) impedansu odgovarajućeg ekvivalentnog prijemnika sastavljenog od redne veze otpornika i kalema.

5.8.

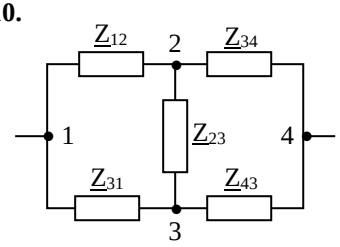


Sl.5.8.

Datu vezu u trougao induktiviteta i kapaciteta , prema sl.5.8, pretvoriti u ekvivalentnu vezu u zvezdu. Koliki su parametri ekvivalentne veze ako je: $L_{12} = 20$ mH; $L_{23} = L_{31} = 10$ mH; $C_{23} = C_{31} = 1{,}5\ \mu$F i $f = 795{,}8$ Hz.

5.9. Tri jednake impedanse $\underline{Z}_T = (15 - j\ 15)\ \Omega$ vezane su u trougao. Pretvoriti ovu vezu u zvezdu i odrediti kolika je impedansa ekvivalentne veze (zvezde) ?

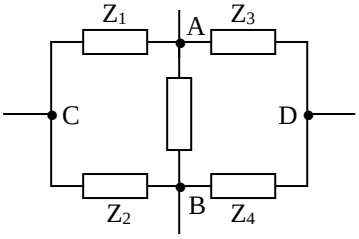
5.10.



Sl.5.10.

Odrediti ekvivalentnu impedansu između tačaka 1 i 4 , prema sl.5.10, ako je:
$\underline{Z}_{12} = (5 + j\,3)\ \Omega$; $\underline{Z}_{23} = (2 + j\,2)\ \Omega$; $\underline{Z}_{31} = (3 + j\,2)\ \Omega$;
$\underline{Z}_{24} = (10 + j\,6)\ \Omega$ i $\underline{Z}_{43} = (6 + j\,4)\ \Omega$.
(PREPORUKA! Trougaonu vezu 1-2-3 predhodno pretvoriti u zvezdu.)

5.11.

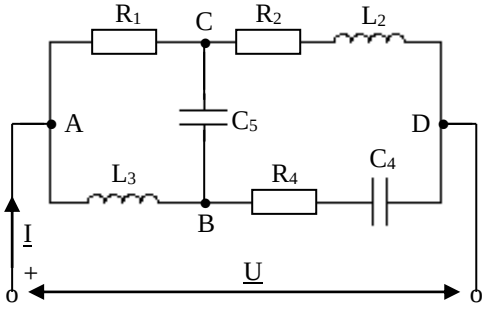


Sl.5.11.

Pet prijemnika poznatih impedansi vezani su prema sl.5.11. Odrediti ekvivalentnu impedansu i admitansu kola:
a) između tačaka A i B,
b) između tačaka C i D

Brojni podaci: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_5 = (6 + j\,12)\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = (4 + j\,6)\ \Omega$.

5.12.

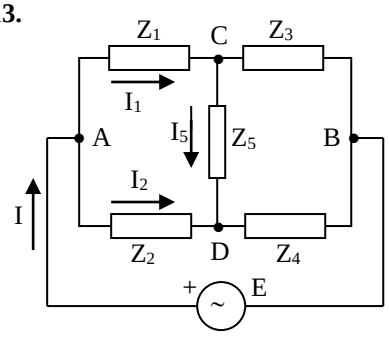


Sl.5.12.

Za dato kolo (most) prema sl.5.12, naći ukupnu struju $\underline{I}$, i to:
a) transformacijom trougla R_1, L_3 i C_5 u zvezdu,
b) transformacijom zvezde R_1, R_2L_2 i C_5 u trougao.

Brojni podaci:
$R_1 = 5\ \Omega$; $X_2 = 6\ \Omega$; $R_2 = 2{,}2\ \Omega$; $X_3 = 3\ \Omega$; $R_4 = 6\ \Omega$;
$X_4 = 3\ \Omega$; $X_5 = 3\ \Omega$; $\underline{U} = 53{,}64$ V.

5.13.

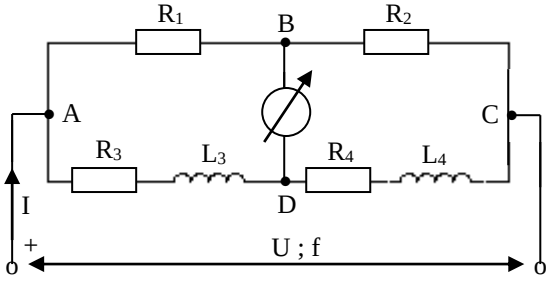


Sl.5.13.

U kolu prema sl.5.13, koje predstavlja Vitstonov most, poznate su sve impedanse sem $\underline{Z}_1$. Kolika je impedansa $\underline{Z}_1$ da bi most bio u ravnoteži ($\underline{I}_5 = 0$)?

Brojni podaci: $\underline{Z}_2 = 2\ \Omega$; $Z_3 = 5\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = -\,j\,40\ \Omega$.

5.14.



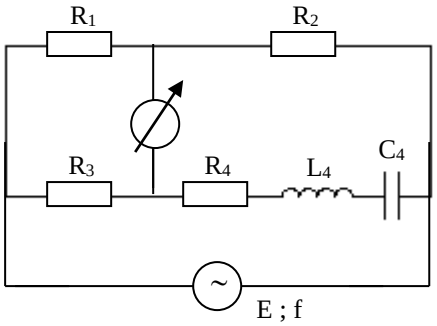
Sl.5.14.

Za dati most, prema slici 5.14, uspostavljena je ravnoteža (indikator pokazuje nulu) sa sledećim vrednostima parametara:
$R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $L_3 = 0{,}2$ H; $U = 100$ V; $f = 50$ Hz.

Odrediti:

a) vrednosti R_4 i L_4,
b) ukupnu struju I.

5.15.

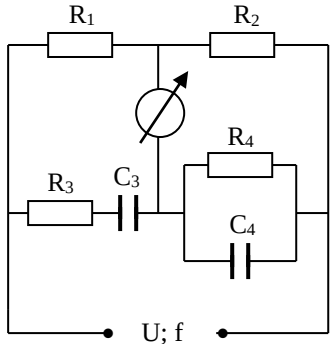


Sl.5.15.

Za dati most, prema sl.5.15, uspostavljena je ravnoteža (kroz indikator ne teče struja) pri sledećim vrednostima:
$R_1 = 300\ \Omega$; $R_2 = 150\ \Omega$; $R_3 = 10\ \Omega$; $L = 25$ mH; $C = 400$ pF.

Odrediti nepoznatu otpornost R_4 , kao i učestanost izvora f.

5.16.



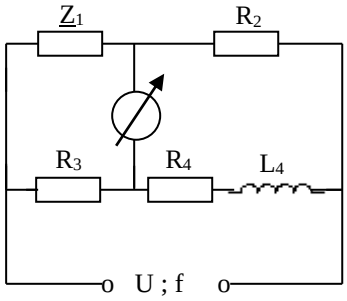
Sl.5.16.

Za most prema slici 5.16. (Vinov most) pri uspostavljenoj ravnoteži, odrediti:

a) učestanost izvora,
b) struje u svim granama
c) obrazložiti kako se dolazi do ravnoteže mosta

Brojni podaci: $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = R_3 = R_4 = 80\ \Omega$; $C_3 = C_4 = 4\ \mu$F; $U = 240$ V.

5.17.



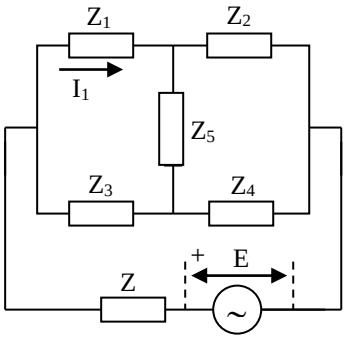
Sl.5.17.

Za uravnoteženi most, prema slici 5.17. odrediti elemente impedanse $\underline{Z}_1$.

Kolike će biti struje u granama mosta ako se on priključi na naizmenični napon $\underline{U} = 100$ V?

Brojni podaci:
$R_2 = 6\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $R_4 = 2\ \Omega$; $L_4 = 10$ mH; $f = 50$ Hz.

5.18.



Sl.5.18.

U kolu prikazanom na sl.5.18. (most) poznate su impedanse: $\underline{Z}_1 = (10 + j\,80)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 40\ \Omega$; $\underline{Z} = (50 + j\,60)$ i efektivna vrednost ems priključenog generatora $E = 154$ V. Odrediti:

a) nepoznatu impedansu Z_4, ako impedansa Z_5 nema nikakvog uticaja na struju I_1 (most u ravnoteži)
b) struje u svim granama,
c) fazorski dijagram napona i struja,

6. SNAGA I ENERGIJA U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE

6.1. TRENUTNA I SREDNJA VREDNOST SNAGE

Naizmenična struja prolazeći kroz neki prijemnik vrši određeni rad, što je već pomenuto prilikom određivanja efektivne vrednosti naizmenične struje. Ako je prijemnik priključen na na naizmenični napon **u** kroz njega protiče struja **i** i u svakom trenutku na njemu vlada snaga snaga **p**, koja iznosi:

$$\mathbf{p = u\,i.}$$

Navedeni izraz predstavlja ***trenutnu vrednost snage***. Kako se vrednosti napona i struje menjaju i po intezitetu i po smeru, sledi da će i snaga naizmenične struje biti na isti način promenljiva. Za pozitivni smer snage kažemo da je to ona snaga koju izvor daje potrošaču, dok će negativna snaga biti ona koju potrošač daje izvoru.

Energija (rad) je proizvod snage i vremena, te će trenutna vrednost snage u vremenu od jedne periode predstavljati energiju potrošača. Matematički (viša matematika) to je dato izrazom:

$$A = \int_0^T uidt \quad ,$$

pri čemu je A... električni rad (energija) koji se u potrošaču za vreme jedne periode pretvori u neki drugi vid energije (toplotna, magnetna, elektrostatička...).

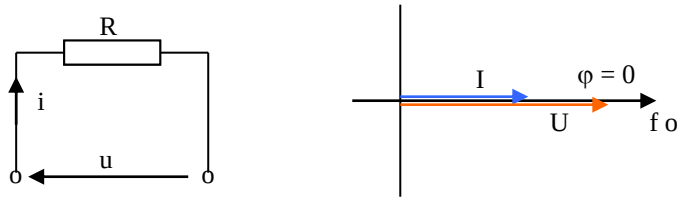
Energija, koja se u potrošaču troši u nepovratnom procesu (toplota) nastaje na osnovu srednje vrednosti snage.

Srednja vrednost snage u jednoj periodi, samim tim i za sve ostale periode iznosi:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt\ .$$

Srednja vrednost naizmenične snage naziva se ***aktivnom snagom*** *i ona predstavlja brzini pri kojoj se električna energija pretvara u toplotnu* ***(P = W$_J$ /t).***

6.2. SNAGA U KOLU SA SAVRŠENIM OTPOROM R



Sl.25.

Kako su napon i struja u fazi možemo ih analitički (trenutno) predstaviti izrazima:

$u = U_m \sin \omega t$, odnosno $i = I_m \sin \omega t$. Za ove izraze fazorski dijagram napona i struje je kao na slici 25.

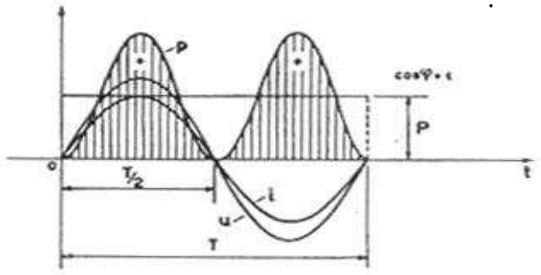
Izraz za trenutnu vrednost snage je

$p = u\,i = U_m \sin \omega t\ I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = 2UI \sin^2 \omega t.$

Kako je $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \Rightarrow$

$$\mathbf{p = UI(\ 1 - \cos 2\omega t\ ).}$$

Grafički (vremenski) dijagram snage je prikazan na sl.26.



Sl.26.

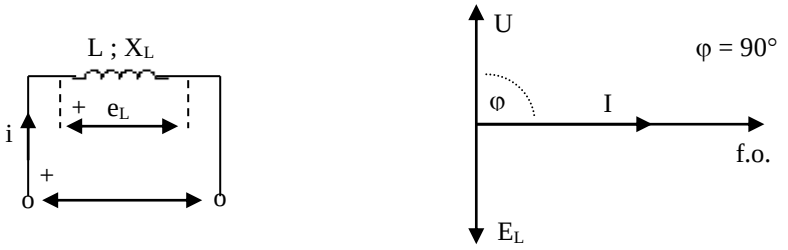
Snaga na termogenom otporniku R osciluje od vrednosti $P_{min} = 0$ do vrednosti $P_{max} = U_m I_m$ sa učestanošću 2f (duplo većom od napona i struje). Iz slike 26 se vidi da je snaga kod otpora R uvek pozitivna, što znači da on stalno prima energiju od izvora (izuzimajući nulte vrednosti).

Ako povučemo jedan pravac paralelno sa vremenskom osom tako da on maksimalnu vrednost P_{max} deli na polovinu nastaje jedan pravougaonik čija je površina jednaka površini trenutne vrednosti snage u jednoj periodi. Površina pravougaonika (oscilacije p u periodi) je jednaka $P \cdot T$ i ona predsravlja električnu energiju koja se nepovratno pretvara u toplotu na otporniku R. Snaga pri kojoj ovaj proces nastaje naziva se **aktivnom snagom** i ona je jednaka:

$$P = P_{max}/ 2 = U_m I_m/2 = 2UI/2 = UI.$$

Dakle, **aktivna snaga** je jednaka srednjoj vrednosti snage, i ona iznosi: **$P = U\,I$ [W] ,** a jedinica je **vat**. Koristeći Omov zakon ($U = IR$) navedeni izraz se može predstaviti **$P = I^2R$ [W] .**

6.3. SNAGA U KOLU SA SAVRŠENIM KALEMOM

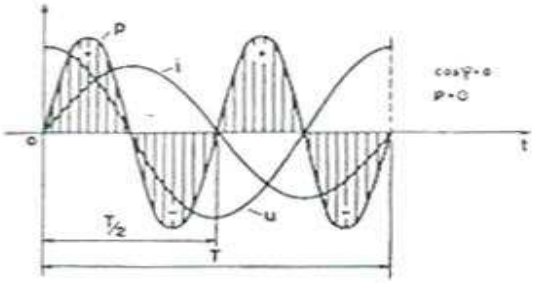


Sl.27.

Ako je savršeni kalem ($R = 0$) induktivnosti L priključen na napon $u = U_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \cos \omega t$, tada će kroz kalem da protiče struja koja je fazno pomerena unazad za $\pi/2$ u odnosu na napon, i ona je data izrazom $i = I_m \sin \omega t$. Na osnovu ovih analitičkhi izraza nastaje fazorski dijagram koji je prikazan na sl.27.
Trenutna snaga iznosi

$$p = U_m \cos\omega t \cdot I_m \sin\omega t = U_m I_m \sin\omega t \cos\omega t = 2UI \cdot \frac{1}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t$$

($\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow \sin\omega t \cos\omega t = \sin 2\omega t / 2$).



Sl.28.

Na sl.28 dat je grafički dijagram trenutnih vrednosti napona struje i snage za ovaj slučaj. Vidimo da trenutna vrednost snage oscilira dvostrukom frekvencijom u odnosu na napon i struju ($f_S = 2f$).
Šrafirana površina ispod krive p i vremenske ose predstavlja električni rad (energiju). Kako su šrafirane površine iznad i ispod vremenske ose za jednu periodu simetrične sledi da će srednja vrednost energije a samim tim i snage u ovom slučaju biti jednaka nuli. To se može matematički dokazati (viša matematika) izrazom

$$p_L = \frac{1}{T}\int_0^T p_L dt = 0$$

Kako je energija u prvoj i trećoj četvrtini periode pozitivna ovu energiju daje generator. Energija generatora se u ovim četvrtinama periode pretvara u energiju magnetnog polja kalema. U drugoj i četvrtoj četvrtini periode energija je negativna, što znači da se sada magnetna energija kalema vraća u električnu energiju generatora. U ovom delu periode kalem se ponaša kao izvor, dok je generator preuzeo ulogu potrošača. Ukupni rad kojeg obavlja generator je jednak nuli. Dakle, kod savršenog kalema (nema Džulovih gubitaka) energetski proces između generatora i kalema se odvija tako što će se ove dve energije (električna energija izvora i magnetna energija kalema) stalno pretvarati jedna u drugu u jednakim vremenskim intervalima (na osnovu zakona o održavanju energije).

Trenutna vrednost energije magnetnog polja iznosi

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m{}^2 \sin^2 \omega t}{2} = \frac{LI^2}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

Ukupna magnetna energija kalema predstavlja, srednju vrednost magnetne energije za T/4. Ona je ista kao i za celu periodu T. Može se odrediti pomoću površine koju čini ¼ sinusoide za vreme od T/4 (odnosno površini aproksimiranog pravougaonika za T/4). Matematički je to jednako:

$$W_L = \frac{1}{2} LI_m{}^2 = LI^2 [J]$$

gde je:

- W_L ..... magnetna energija sa kojom raspolaže kalem
- L ..... induktivnost kalema
- I_m ..... amplituda (maksimalna vrednost) struje koja protiče kroz kalem.

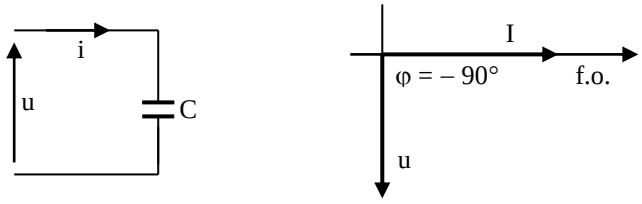
Iz grafičkog dijagrama (sl.28) se vidi da je maksimalna vrednost (amplituda trenutne snage) jednaka proizvodu efektivnih vrednosti napona i struje.
Dakle,

$$\mathbf{Q_L = UI\ [VAR]}$$

Ova vrednost snage (Q_L) se naziva **reaktivnom snagom kalema** i njena je jedinica **voltamper reaktivni.**
Reaktivna snaga kalema je jednaka maksimalnoj brzini pri kojoj se električna energija pretvara u magnetnu.
Kako je $U = IX_L \Rightarrow$

$$\mathbf{Q_L = UI = IX_L \cdot I = I^2 X_L.}$$

6.4. SNAGA U KOLU SA SAVRŠENIM KONDENZATOROM



Sl.29.

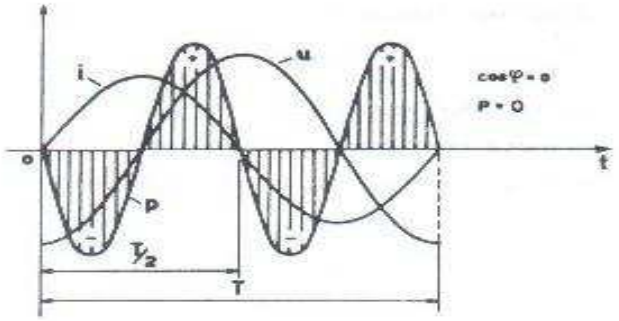
Fazorski dijagram napona i struje kod savršenog kondenzatora je dat na sl.29. Zbog faznog pomaka između napona i struje od $\varphi = -90° (-\pi/2)$, njihove trenutne vrednosti su:

$u = U_m \sin (\omega t - \pi/2) = - U_m \cos \omega t$; $i = I_m \sin \omega t$.

Trenutna snaga je

$p_C = u \cdot i = - U_m \cos \omega t\, I_m \sin \omega t = - U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = - 2UI \sin 2\omega t / 2 = - UI \sin 2\omega t$.

Grafički dijagram napona, struje i snage za savršeni kondenzator (bez džulovih gubitaka) dat je na sl.30.



Sl.30.

Trenutna vrednost snage, slično kao i kod savršenog kalema oscilira dvostrukom frekvencijom u odnosu na napon i struju. U prvoj i trećoj četvrtini periode energija (samim tim i snaga) je negativna, dok je u drugoj i četvrtoj četvrtini pozitivna. To znači da se u prvoj i trećoj četvrtini kondenzator ponaša kao izvor, dok je generator preuzeo ulogu potrošača. U drugoj i četvrtoj četvrtini su uloge izmenjene. Kako su ove površine, koje ujedno čine električnu energiju, iznad i ispod vremenske ose iste u jednoj periodi (naravno i za više perioda), sledi da je srednja vrednost električne energije kod savršenog kondenzatora, koji je priključen na naizmenični generator, jednaka nuli. To isto važi i za snagu na kondenzaturu. Matematički se to dokazuje integralnim računom (viša matematika)

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T p_C dt = 0$$

energija u istim vremenskim intervalima osciluje tako što se u jednom momentu energija generatora (2 i 4 četvrtina T) pretvara u energiju kondenzatora, da bi nakon toga energija kondenzatora se vraćala (reaktivirala) u električnu energiju izvora (1 i 3 četvrtina T).

Trenutna vrednost energije kondenzatora (električnog polja kondenzatora) je

$$w_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m{}^2 \cos^2 \omega t}{2} = CU^2 \cos^2 \omega t = \frac{CU^2}{2}\left(1+\cos 2\omega t\right),$$

jer je: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)$.

Ukupna energija električnog polja sa kojom raspolaže kondenzator, slično energiji kalema, jednaka je:

$$W_C = \frac{1}{2} U_m{}^2 C = U^2 C[J]$$

gde je:

- W_C..... energija kondenzatora (energija električnog polja kondenzatora),
- U_m .... maksimalna vrednost (amplituda) napona na kondenzatoru (izvora),
- C ..... kapacitat kondenzatora.

Amplituda (maksimalna vrednost snage) je

$$\mathbf{Q_C = UI\ [VAR]}$$

i naziva se **reaktivnom kapacitivnom snagom**, a jedinica je **voltamper reaktivni.**

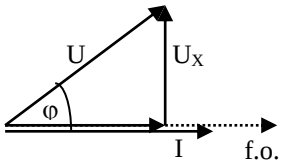
Reaktivna snaga na kondenzatoru , koja predstavlja brzinu kojom se električna energija izvora pretvara u energiju kondenzatora,se može dati i u sledećom izrazu

$$Q_C = UI = IX_CI = I^2X_C \quad [VAR]$$

6.5.1. Redna veza RLC (za $X_L > X_C$)

1. Analitička analiza

Ako pretpostavimo da se impedansa sastoji od redne veze RLC elemenata kod koje pravladava induktivno opterećenje ($X_L > X_C$), tada sledi fazorski dijagram napona i struje prema sl.31. Isti dijagram nastaje kod redne veze RL.



Sl.31.

Kako napon fazno prednjači u odnosu na struju za ugao φ, izrazi za trenutne vrednosti napona i struje, uz pretpostavku da je struja u faznoj osi , iznose:

$i = I_m \sin \omega t$; $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$.

Da bi se kod redne veze RLC mogla snaga analitički predstaviti, iz trigonometrije treba poznavati sledeće relacije:

$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$; $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$;

$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$; $\sin\alpha \sin\beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] / 2$;

$\cos\alpha \cos\beta = [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] / 2$.

Izraz za trenutnu vrednost snage, za ovaj slučaj, iznosi:

$P_z = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) = 2UI \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) = 2UI \sin \varpi t (\sin \varpi t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \Rightarrow$

$P_z = 2UI (\cos \varphi \sin^2 \omega t + \sin \varphi \sin \omega t \cos \omega t) = 2UI [\cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) / 2 + \sin \varphi (\sin 2\omega t) / 2] \Rightarrow$

$P_z = UI (\cos \varphi - \cos \varphi \cos 2\omega t + \sin \varphi \sin 2\omega t) \Rightarrow$

$P_z = UI \{\cos \varphi - [\cos (2\omega t - \varphi) + \cos (2\omega t + \varphi)] / 2 + [\cos (2\omega t - \varphi) - \cos (2\omega t + \varphi)] / 2 \} \Rightarrow$

$P_z = UI \{\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi) / 2 - \cos (2\omega t + \varphi) / 2 + \cos (2\omega t - \varphi) / 2 - \cos (2\omega t + \varphi) / 2 \} \Rightarrow$

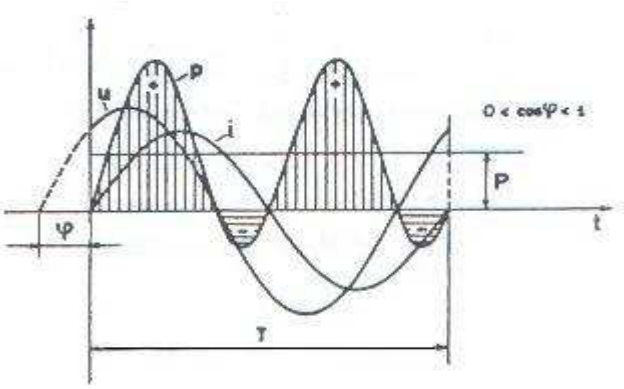
$P_z = UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)]$.

Dakle, konačni izraz za trenutnu vrednost snage kod redne veze RLC, za slučaj kada je $X_L > X_C$ je:

$$\mathbf{p_z = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \varphi).}$$

2. Grafička analiza (vremenski dijagram)

Grafički (vremenski) dijagram za trenutnu vrednost snage dat je prema sl.32



Sl.32.

.

Zbog faznog pomaka φ između napona i struje, poluperiodi trenutnih vrednosti energija (snaga) nisu simetrični u odnosu na faznu osu, pa je srednja vrednost snage sada različita od nule (veća).

Matematički se dobije da je srednja vrednost snage jednaka

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{UI}{T}\int_0^T [\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]\,dt = IU\cos\varphi$$

Ova srednja vrednost snage predstavlja snagu koja omogućava da se električna energija izvora nepovratno pretvara u toplotnu energiju na prijemniku. Ova se snaga naziva **aktivnom** i ona je jednaka:

$$P = UI\cos\varphi = UI\frac{R}{Z} = \frac{U}{Z}IR = I^2R \qquad [\,W\,]$$

Dakle, aktivna snaga je jednaka proizvodu aktivnog otpornika R i struje na kvadrat (Džulov zakon). Identično tome, reaktivna snaga je jednaka proizvodu reaktivnog otpornika X i struje na kvadrat, tj:

$$Q = I^2X = I^2\,(X_L - X_C) = Q_L - Q_C = IIX = U_XI = UI\sin\varphi \quad [\,VAR\,].$$

Ukupna reaktivna snaga jednaka je razlici reaktivne snage na kalemu (Q_L) reaktivne snage na kondenzatoru (Q_C)

Proizvod napona i struje (amplituda snage) predstavlja ukupnu snagu kola koja se naziva **prividnom snagom**. Ona je jednaka

$$S = UI = IZI = I^2Z \quad [VA].$$

a njena jedinica se naziva **voltamper**.

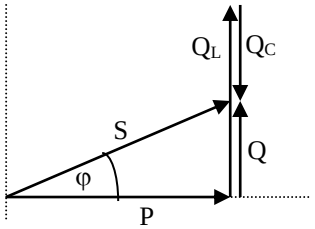
Aktivnu i reaktivnu snagu možemo izraziti preko prividne, i one iznose:

$P = UI\cos\varphi = S\cos\varphi$,

$Q = UI\sin\varphi = S\sin\varphi$.

3. Fazorska analiza

Ako trougao otpora kod redne veze pomnožimo sa I^2, odnosno napona sa I, nastaje trougao snaga, koji je sličan trouglu otpora (napona). Na taj način nastaje trougao snaga koji je prikazan na sl.33.



Sl.33.

Prividna snaga, koristeći Pitagorinu teoremu, jednaka je $S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$, gde je ukupna reaktivna snaga jednaka razlici reaktivnih snaga na kalemu i na kondenzatoru, tj

$$Q = Q_L - Q_C.$$

Fazni ugao φ se može odrediti preko kosinusa ili tangesa

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \;;\quad tg = \frac{Q}{P} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{P}{S} = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P}$$

4. Kompleksna analiza

Za trougao snaga, kod redne veze RLC, pri čemu je $X_L > X_C$ (sl.33) prividna snaga u kompleksnom obliku jednaka je

$$\underline{S} = P + j\,(Q_L - Q_C) = P + j\,Q$$

Snagu u kompleksnom broju možemo dobiti proizvodom napona i struje u kompleksnom broju, s tim što jedan od ova dva broja mora biti **konjugovano kompleksan** (najčešće se za to uzima struja).

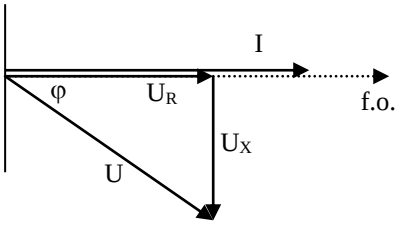
$$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^*$$

Razlog zbog kojeg se jedna veličina uzima konjugovano kompleksnom je taj što se na taj način dobije isti ugao φ (i brojčano i predznakom) kao iz trougla napona ili trougla otpora.

Konjugovani kompleksni broj je isti u svemu sa kompleksnim brojem, sa jedinom razlikom što se menja predznak ispred imaginarnog dela kompleksnog broja (za kompleksni broj, $\underline{Z} = a + j\,b$, konjugovani kompleksni broj je $\underline{Z}^* = (a - j\,b)$.

6.5.2. Redna veza RLC ($X_L < X_C$)

1. Analitička analiza



Sl.34.

Ako pretpostavimo da je početni ugao za struju jednak nuli (I je u faznoj osi), tada fazorski dijagram napona i struje ima izgled kao što je prikazano na sl.34. Dijagram, samim tim i ceo postupak, je isti i za rednu vezu RC.

Izrazi za trenutne vrednosti napona **u** i struje **i** su, prema sl.34:

$$u = U_m \sin (\omega t - \varphi) ,$$
$$i = I_m \sin \omega t.$$

Trenutna vrednost snage kod redne veze RC kola (odnosno redne veze RLC kola sa prevladavanjem klapacitivnog opterećenja) iznosi

$p_z = U_m \sin (\omega t - \varphi) \, I_m \sin \omega t = 2UI (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) \sin \omega t$

$p_z = 2UI (\sin^2 \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi) = 2UI \{ [(1 - \cos 2\omega t) / 2] \cdot \cos \varphi - [(\sin 2\omega t) / 2] \cdot \sin \varphi \} \Rightarrow$

$p_z = UI (\cos \varphi - \cos 2\omega t \cos \varphi - \sin 2\omega t \sin \varphi) \Rightarrow$

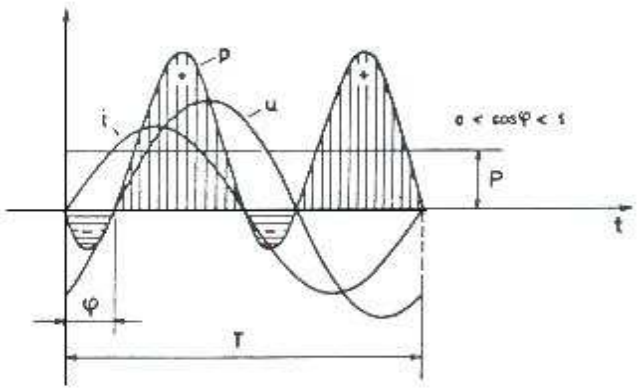
$p_z = UI \{ \cos \varphi - [\cos (2\omega t - \varphi) + \cos (2\omega t + \varphi)] / 2 - [\cos (2\omega t - \varphi) - \cos (2\omega t + \varphi)] / 2 \} \Rightarrow$

Konačni izraz za trenutnu vrednost snage, za ovaj slučaj je:

$$\mathbf{p_z = UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi).}$$

2. Grafička analiza (vremenski dijagram)

Grafički dijagram snage za rednu vezu RLC, pri $X_L < X_C$, dat je na sl.35.



Sl.35.

Srednja vrednost snage je ista kao i kod predhodnog slučaja ($X_L > X_C$), tj.

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R \quad [W]$$

Ova srednja vrednost snage omogučuje proces nepovratnog pretvaranja električne energije izvora u toplotnu energiju potrošača

Reaktivna snaga iznosi

$$Q = UI \sin\varphi = I^2 X = I^2 (X_L - X_C) = Q_L - Q_C \quad [VAR]$$

Pri ovoj snazi električna energija se pretvara u energije kalema i energiju kondenzatora , koje se ponovo vraćaju u električnu energiju (energije se reaktivira). Ukupna reaktivna snaga (samim tim i energija) jednaka

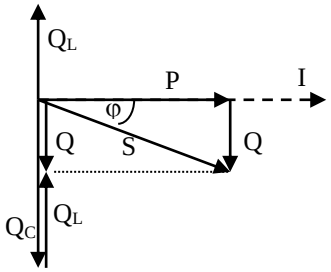
je razlici reaktivnih snaga na kalemu i na kondenzatoru. Ove energije u električnom kolu u istim vremenskim intervalima oscilatorno se smenjuju, odnosno pretvaraju, povratno, jedna u drugu. Zbog toga se ona i naziva **reaktivnom energijom.**

Na kraju ostaje prividna snaga, koja je ista kao i za predhodni slučaj, i ona iznosi

$$S = UI = I^2Z \quad [\ VA\ ]$$

3. Fazorska analiza

Množeći trougao napona sa strujom I, ili trougao otpora sa I^2, nastaje **trougao snaga** koji je prikazan na sl.36.



Sl.36.

Dijagram je sličan kao i kod $X_L > X_C$. Ralika je samo u tome što je kod $X_C > X_L$ i $Q_C > Q_L$, pa je trougao pomeren ka dole (ugao $\varphi < 0$). Koristeći pravougli trougao sledi:

$$S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad , \quad \text{odnosno}$$

$$\varphi = \arccos\frac{P}{S} = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P}$$

4. Kompleksna analiza

Ako kompleksni broj prilagodimo fazorskom dijagramu prema sl.36, sledi

$$\underline{S} = P + j\,(Q_L - Q_C) = P - j\,Q.$$

Kako je $Q_C > Q_L$ ukupna reaktivna snaga Q je negativna (kompleksno predstavljena), tj. prevladava kapacitivno opterećenje.

Isti trougao snaga će se dobiti kada se kompleksno pomnože napon $\underline{U}$ i konjugovano kompleksna struja $\underline{I}^*$

$$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^*$$

6.6. FAKTOR SNAGE

Odnos između aktivne i prividne snage naziva se **faktorom snage**.
On se dobije iz trougla snaga (sl.33 i 36), i njegova vrednost jednaka je

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

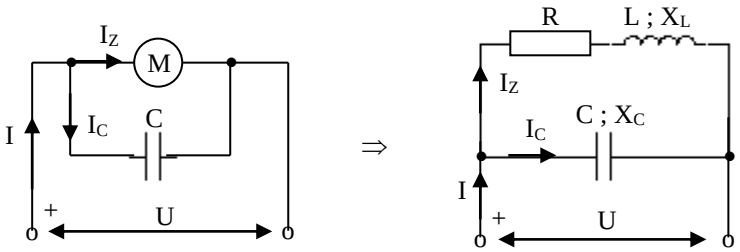
Faktor snage se kreće od nule (savršeno reaktivno opterećenje) pa sve do jedinice (savršeno aktivno opterećenje). Faktor snage u energetici zauzima veoma bitan značaj, jer se iz njega može videti racionalnost korišćenja električnih mašina i prenosnih vodova. Od električnih mašina se traži što veći faktor snage, jer se u tom slučaju za istu snagu iz mreže uzima manja vrednost struje, čime su manji gubici kako u vodovima tako i u generatoru ($P = I^2R$). To znači da faktor snage ujedno govori koliki je stepen iskorišćenosti generatora. Veliki sistemi koji su opterećeni velikim brojem motora imaju mali faktor snage. To je zbog toga što se kod motora javlja znatna induktivnost (magnetno polje $\Rightarrow$ magnetna energija). Kod ovakvih slučajeva redovito se veštački popravlja faktor snage.

Popravak faktora snage

Kako je aktivna snaga P = UIcos φ može se konstatovati da ona pored struje I i napona U zavisi od faktora snage cos φ. Najveća aktivna snaga se dobija kada je cos φ = 1 , tj. kada su napon i struja u fazi (savršeno R).

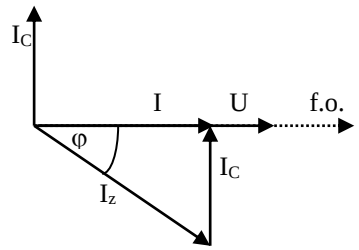
Iz $P = UI\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{U\cos\varphi}$

Navedeni izraz govori da je struja obrnuto srazmerna sa faktorom snage. Kako nam je cilj da struja u prenosnim vodovima bude što manja (zbog gubitaka) od prijemnika se zahteva što veći faktor snage. Zbog toga se kod motora, kod kojih je faktor snage mali (velika induktivnost) povećava faktor snage. To se postiže tako što se motoru doda jedan kondenzator (sl.37).



Sl.37.

Ako na napon mreže U priključimo električni motor, zbog njegove impedanse $\underline{Z} = R + j X_L = R + j \omega L$, struja koja prolazi kroz motor I_Z će fazno kasniti za naponom za ugao φ. Zbog same konstrukcije motora ovaj fazni pomak je nemoguće izbeći. Sve što se može postići kod motora je da njegova induktivnost bude što manja u odnosu na termogenost, čime se povećava faktor snage a samim tim i aktivna snaga. Ovo nam daje samo malu mogućnost podešavanja. Pored faznog pomaka između struje motora I_Z i napona U veoma je bitan i fazni pomak između struje mreže I i napona U. Zbog toga se paralelno motoru veže jedan kondenzator, čija je kapacitivnost predhodno određena. (Kod redne veze C smanjuje se impedansa, što bi povećalo struju prijemnika, tj. mreže).



Sl.38.

Fazorski dijagram struja i napona za kolo prema sl.37 dat je na sl.38.
Ukupna struja mreže jednaka je $\underline{I} = \underline{I}_Z + \underline{I}_C$.

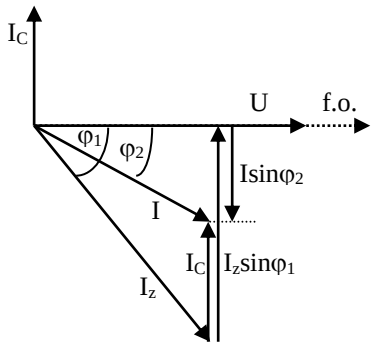
Struja kondenzatora iznosi: $I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C \cdot U \Rightarrow C = \frac{I_C}{\omega U}$

a motora: $I_Z = \frac{U}{Z}$

Ako faktor snage treba povećati na 1 (napon U i struja I su u fazi), pa je:
$I_C = I_z \sin\varphi \Rightarrow \omega CU = (U/Z)\cdot(\omega L/Z) \Rightarrow \omega CU = \omega LU/Z^2 \Rightarrow$

$$C = \frac{L}{Z^2} = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Navedena relacija daje vrednost kapaciteta pri kojem su napon i struja mreže u fazi. Samim tim i vrednost ukupne struje mreže sada se smanjila na iznos I. Struja motora je ostala nepromenjena. Dakle, paralelnim vezivanjem kondenzatora na motor, smanjuje se ukupna struja mreže, a ujedno povećava faktor snage. Što se motora tiče uslovi njegovoga rada su ostali isti. Ovaj način popravka faktora snage se isključivo i koristi, jer smanjenjem ukupne struje u vodovima se smanjuju Džulovi gubici, a motor normalno radi, kao i bez kondenzatora. Rasterećenjem mreže rasterećen je i generator. U praksi se faktor snage popravlja do 0,9, kao što je prikazano na sl.39, jer za veće vrednosti potrebni su jači kapaciteti kondenzatora a to znatno poskupljuje njihovu izradu. Sa stanovišta efikasnosti faktor snage iznad 0,8 smatra se zadovoljavajućim.



Sl.39.

Iz fazorskog dijagrama, struja kondenzatora je jednaka:

$I_C = I_Z \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2 \Rightarrow \omega CU = I_z\sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2 \Rightarrow$

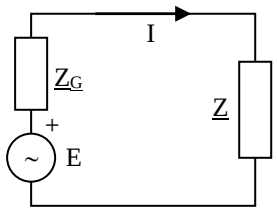
$$C = \frac{I_z \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2}{\omega U}$$

gde je:

- I_Z... struja prijemnika (motora)
- I.....struja mreže (ukupna struja)
- φ_1....fazni pomak između U i I na početku (U i I_Z)
- φ_2....fazni pomak između napona U i I (struje mreže) nakon obavljenog popravka faktora snage
- C.... kapacitet kondenzatora koji ostvaruje faktor snage cos φ_2

6.7. PODEŠAVANJE PRIJEMNIKA ZA MAKSIMALNU AKTIVNU SNAGU GENERATORA

Kod jednosmernih generatora maksimalna snaga koju generator daje nastaje kada se otpori prijemnika i generatora izjednače (usaglase). Ovo se može dokazati praktičnim ogledom ili matematički (viša matematika).



Sl.40.

Dakle, kod jednosmernog generatora pri $R = R_g$ generator daje maksimalnu korisnu snagu. Slično tome, kod naizmeničnih generatora, sl.40, maksimalna snaga koju generator daje nastaje kada su impedanse prijemnika i generatora izjednačene (po modulu), tj. kada je $\mathbf{Z_G = Z}$. Pored ovoga uslova potrebno je da su fazni pomaci istog iznosa ali suprotnog predznaka,tj. $\boldsymbol{\varphi = -\varphi_G}$.

Ova dva uslova (1. $Z = Z_G$ i 2. $\varphi = -\varphi_G$) mogu se spojiti u jedan, a to je:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Z}}_\mathbf{G}^{*}.$$

ZAKLJUČAK!

Kada su impedanse prijemnika i generatora međusobno konjugovano kompleksne tada generator daje maksimalnu aktivnu snagu.

Kako su impedanse konjugovano kompleksne ukupna impedansa kola jednaka je zbiru aktivnih otpora $\underline{Z} = R + R = 2R$ ($\underline{Z} = \underline{Z} + \underline{Z}_G = R + j\,X + R_G - jX = 2R$). Ukupna impedansa je najmanja, što struju povećeva na najveću vrednost (naponska rezonansa), a to dovodi do najveće aktivne snage kola, koja iznosi:

$$P_{max} = I^2R = \frac{E^2}{(R+R)^2}R = \frac{E^2}{4R}$$

ZADACI:

6.1. Kalem induktivnosti $L = 0{,}2$ H i otpor otpornosti $R = 6\ \Omega$ priključen je na napon $U = 200$ V i učestanosti $f = 50$ Hz. Odrediti aktivnu reaktivnu i prividnu snagu kalema. Nacrtati trougao snaga.

6.2. Za rednu vezu RL odrediti aktivnu reaktivnu i prividnu snagu , ako je $u = 282 \sin (1000t + 60°)$, $i = I_m \sin 1000t$ i $R = 40\sqrt{3}\ \Omega$. Kolika je induktivnost kalema ?

6.3. Impedansa $\underline{Z} = 5 + j\ 12$ priključena je na napon $u = 130\sqrt{2} \sin 314t$. Kolika je aktivna snaga P i faktor snage cos φ impedanse ?

6.4. Redna veza RC priključena je na napon $\underline{U} = -60 + j\ 80$ [V]. Aktivna snaga je $P = 400$ W pri $\cos \varphi = 0{,}4$. Kolika je struja kola I i otpornost R ?

6.5. Redna veza $R = 30\ \Omega$ i $X_C = 40\ \Omega$ priključena je na napon $u = 282 \sin 200t$. Naći I,C,P,Q,S i cos φ.

6.6. Dva otpornika i dva kondenzatora vezana su redno. Odrediti P;Q i S ako je $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $C_1 = 10\ \mu F$, $C_2 = 150\ \mu F$, $U = 250$ V i učestanost $f = 16\,000 / 3$ Hz.

6.7. Kod redne veze LC odrediti I;P;Q;S i cos φ ako je $L = 20$ mH, $C = 30\ \mu F$, $U = 520$ V i $f = 500$ Hz.

6.8. Redna veza LC , $L = 0{,}2$ H i $C = 250\ \mu F$ priključena je na napon $u = 400\sqrt{2} \sin 200t$. Odrediti P;Q i S.

6.9. Redna veza RLC priključena je na napon $U = 200$ V kružne učestanosti $\omega = 1\,000$ rad/s. Odrediti aktivnu snagu P i faktor snage cos φ, ako je $R = 10\ \Omega$, $L = 10$ mH i $C = 50\ \mu F$. Nacrtati trougao snaga.

6.10. Ako je na jednom prijemniku napon $u = 220\sqrt{2} \sin \omega t$ i struja $i = 20 \cos \omega t$, odrediti aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola. Nacrtati odgovarajući trougao snaga.

6.11. Za jedno kolo poznati su izrazi za struju i napon: $i = 10\sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/3)$ i $u = 50\sqrt{2} \sin \omega t$. Odrediti sve snage u kolu i nacrtati njihov fazorski (vektorski) i vremenski (grafički) dijagram.

6.12. Izračunati snagu koju uzima monofazni motor iz mreže ako su podaci za motor: $U = 220$ V, $I = 10$ A, $\cos \varphi = 0{,}9$ i stepen korisnosti motora $\eta = 0{,}8$.

6.13. Koliku struju uzima iz mreže monofazni motor od snage 368 W ako je priključen na napon 220 V pri $\cos \varphi = 0{,}75$ i $\eta = 0{,}87$?

6.14. Ako kroz prijemnik koji je priključen na napon $\underline{U} = 100 + j\ 50$ [V] protiče struja $\underline{I} = 10 + j\ 20$ [A] izračunati aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu. Koliki su i koji su parametri prijemnika (R i X) ?

6.15. Struja u nekom kolu je $\underline{I} = 80 - j\ 60$ [A] a aktivna snaga je $P = 5$ [KW] pri $\cos \varphi = 0{,}8$. Odrediti koliki je napon na tom kolu ?

6.16. Industrijsko postrojenje mesečno troši aktivnu energiju od $W_J = 86\,000$ KWh i reaktivnu $W_L = 84\,500$ VARh. Kolikom reaktivnom energijom, i na koji način, treba kompenzirati postrojenje da bi se postigao faktor snage od 0,9 ako je postrojenje u pogonu 280 sati mesečno ?

6.17. Na mrežu su paralelno priključena dva jednofazna motora čija zajednička snaga iznosi 1,8 KW, a zajednički faktor snage 0,8. Jedan motor ima snagu $P_1 = 980$ W i faktor snage 0,74. Koliki je faktor snage drugog motora ?

6.18. Niz RLC priključen je na napon $U = 180$ V, $f = 500$ Hz. U nizu je struja $I = 50$ mA, a na kondenzatoru pad napona $U_C = 120$ V. Uz ove uslove prividna snaga S je dva puta veća od reaktivne snage Q. Sračunati R,L i C u ovom nizu.

6.19. Sijalicu snage 25 W i napona 24 V treba priključiti na 250 V, f = 50 Hz preko kondenzatora. Sračunati kapacitet kondenzatora i njegov napon.

6.20. Kroz prijemnik, prividne snage S = 150 VA i faktor snage cos φ = 0,6 , protiče struja jačine I = 2,5 A. Kolika je admitansa datog prijemnika ?

6.21. Motor čija je impedansa $\underline{Z}$ = (6 + j 8) Ω priključen je na napon $\underline{U}$ = (100 + j 100) V, frekvencije f = 50 Hz. Odrediti:

a) faktor snage motora,
b) kapacitet kondenzatora C koji treba paralelno vezati sa motorom da bi faktor snage bio 1 (cos φ_1 = 1).

6.22. Na napon u = 220 $\sqrt{2}$ sin ωt [V] priključen je termogeni otpornik R = 10 Ω. Kolika je srednja snaga otpornika i nacrtati grafički (vremenski) dijagram srednje snage p(t). O kojoj se snazi radi ?

6.23. Napona u = 141 sin 314t [V] vlada na potrošaču kroz koji protiče struja i = 2,28 sin (314t – π/4) [A]. Kolika je srednja snaga P toga potrošača ?

6.24. Neko kolo sastoji se od redne veze otpora R = 10 Ω i induktivnog otpora X_L = 30 Ω. Kolom protiče struja I = 10 A. Koliki je faktor snage cos φ, aktivna snaga P, reaktivna snaga Q i priključeni napon U ?

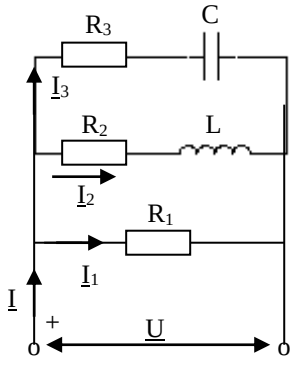
6.25. Za koji se iznos ΔQ_L treba smanjiti induktivna reaktivna snaga da bi potrošač sa S = 100 KVA uz cos φ = 0,75 (ind.) kod iste struje radio sa cos φ′ = 0,9 ? Kolike su aktivne snage P i P′ za oba slučaja ?

6.26. Neki je motor opterećen konstantnim mehaničkim teretom snage P = 22 KW. Motor ima konstantni napon na stezaljkama U = 220 V, a njegov faktor snage iznosi cos φ = 0,64 (ind.). Na izvor je vezan preko voda otpor R_V = 0,1 Ω. Odrediti gubitak snage na vodu P_V . Koliki bi bio taj gubitak P_V′ kada bi cos φ porastao na cos φ′ = 0,8 (ind.), uz pretpostavku da je napon na stezaljkama ostao isti ?

6.27. Dve prigušnice vezane su redno i kroz njih protiče struja I = 1 A. Pad napona na prvoj prigušnici je U_1 = 3,7 V, a na drugoj U_2 = 15 V. Reaktivne snage tih prigušnica su Q_1 = 3 VAR i Q_2 = 9 VAR. Treba odrediti ukupnu aktivnu snagu P ovoga kola , prividne snage prigušnica S_1 i S_2, ukupnu prividnu snagu S, cos φ mreže i induktivne otpore prigušnice X_1 i X_2 kao i ukupni napon izvora U .

6.28. Neku mrežu napaja generator snage P_1 = 3 MW i cos φ_1 = 0,7 (ind) Ako snaga mreže poraste na P_m = 5 MW, treba odrediti koliku bi snagu P_2 i cos φ_2 trebao imati paralelno vezani generator da bi ukupni cos φ = 0,8 (ind) ?

6.29.



Sl.6.29.

Tri potrošača paralelno su priključena na naizmenični napon U = 230 V, prema slici 6.29. Prvi potrošač uzima iz mreže aktivnu snagu P_1 = 4,6 KW uz faktor snage cos φ_1 = 1, drugi potrošač uzima prividnu snagu S_2 = 11,5 KVA radeći uz faktor snage cos φ_2 = 0,62 (ind), a treći potrošač uzima aktivnu snagu P_3 = 5 ,52 KW uz faktor snage cos φ_3 = 0,8 (kap). Odrediti:

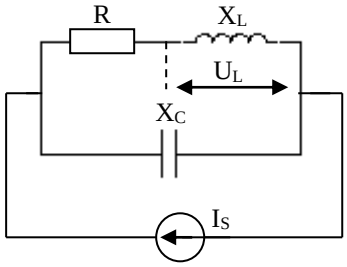
a) prividne snage u kompleksnom izrazu $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$ i $\underline{S}_3$. koje potrošači uzimaju iz mreže,
b) ukupnu prividnu, aktivnu i raektivnu snagu kola.

6.30. Impedanse $\underline{Z}_1$ = (10 + j 20) i $\underline{Z}_2$ = (10 – j 20) vezane su paralelno na napon $\underline{U} = 100e^{j\,45°}$ V. Odrediti aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu sistema.

6.31. Na izvor naizmeničnog napona U = 200 V, f = 50 Hz, priključen je kalem induktivnosti L = 0,1 H. Odrediti maksimalnu energiju koja u jednom trenutku može biti sadržana u magnetnom polju kalema.

6.32. Kalem termogene otpornosti $R_L = 40\ \Omega$ i induktivnosti $L = 30$ mH vezan je paralelno sa kondenzatorom kapaciteta $C = 25\ \mu$F. Ako je veza priključena na naizmenični napon $\underline{U} = (100 + j\ 100)$ V, kružne učestanosti $\omega = 1\ 000$ rad/s, kolika je aktivna snaga kola ?

6.33.

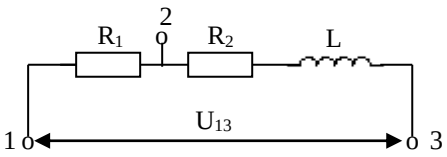


Sl.6.33.

U mreži prostoperiodične struje prikazanoj na slici 6.33, poznato je $I_S = 2$ mA, $R = 200\ \Omega$ i $X_L = 100\ \Omega$. Napon na kalemu je u fazi sa strujom strujnog generatora. Odrediti reaktansu kondenzatora X_C.

Kolika je prividna snaga strujnog generatora $\underline{S}_{Sg}$ (u kompleksnom obliku) ?

6.34.

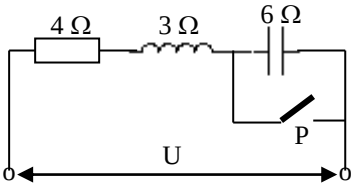


Sl.6.34.

U kolu naiymenične struje, prema sl.6.34, poznato je $U_{13} = 145$ V, $U_{12} = 100$ V, $U_{23} = 100$ V, $f = 50$ Hz. Aktivna snaga prijemnika otpornosti R_2 je $P_{R2} = 5$ W. Odrediti:

a) efektivnu vrednost napona na kalemu U_L;
b) efektivnu vrednost struje I;
c) induktivnost L i otpornost R_2

6.35.



Sl.6.35.

Za električno kolo, prema sl.6.35, u kojem su odnosu aktivna i reaktivna snaga pre i posle zatvaranja prekidača P ?

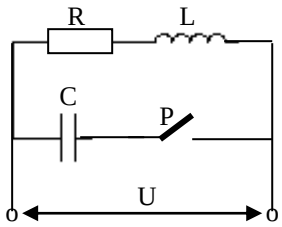
6.36. Kojom energijom raspolaže kondenzator kapaciteta $C = 80\ \mu$F ako je on priključen na napon $u = 380\sqrt{2}\ \sin 314\ t$ V ?

6.37. Redna veze RLC priključena je na napon $U = 100$ V. Otpori iznose $R = 10\ \Omega$, $X_L = 4\ \Omega$, $X_C = 8\ \Omega$. Kako će se promeniti aktivna i reaktivna snaga kola ako dođe do proboja kondenzatora ($X_C = 0$) ?

6.38. Kalem otpornosti $R_L = 8\ \Omega$ i $X_L = 40\ \Omega$ priključen je na naizmenični napon $U = 220$ V, $f = 50$ Hz.
a) Odrediti koliki kapacitet treba paralelno vezati kalemu, da bi faktor snage kola bio maksimalan ($\cos\varphi = 1$)?
b) Kolika je promena ukupne struje (struja mreže) nakon uključenja kondenzatora ?

6.39. Za kolo naizmenične struje koje se sastoji od paralelne veze R i X_L odrediti odnos R / X_L pri kojem je odnos između aktivne i reaktivne snage $P / Q = 3 / 4$.

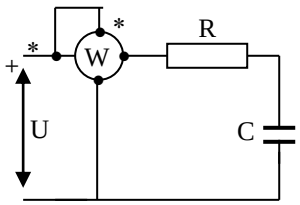
6.40.



Sl.6.40.

Kolo na sl.6.40. priključeno je na naizmenični napon U = 380 V, f = 50 Hz. Pri otvorenom prekidaču I = 24 A a $\cos\varphi_1 = \sqrt{3}/2$. Odrediti kapacitet kondenzatora C ako je posle zatvaranja prekidača faktor snage postao maksimalan ($\cos\varphi_2 = 1$).

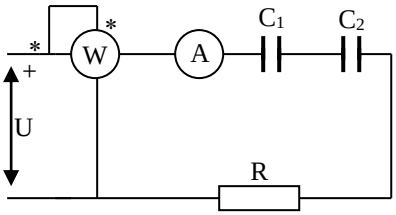
6.41.



Sl.6.41.

Realan kondenzator, prema sl.6.41, parametara R = 10 Ω i C = 318 μF, priključen je na napon u = 10 sin (628t – 60°) V. Odrediti vrednost L kalema kojeg treba vezati na red kondenzatoru, da bi vatmetar pokazao najveću snagu.
Kolika je ta snaga?

6.42.

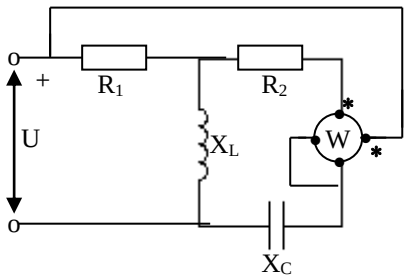


Sl.6.42.

Kako se manja pokazivanje instrumenata na sl.6.42. (povećava ili smanjuke)? pri:
a) kratkom spoju otpora R,
b) proboju kondenzatora C_2

6.43. Prijemnik raspolaže sa kompleksnom snagom $\underline{S} = (10 - j\,20)$ KVA uz efektivnu vrednost napona U = 100 V. Koji reaktivni element treba vezati paralelno prijemniku da bi se dobio maksimalni faktor snage i kolika je vrednost toga elementa ?

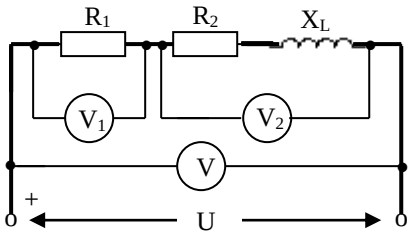
6.44.



Sl.6.44.

Naći pokazivanje vatmetra priključenog prema sl.6.44, ako je napon na ulazu U = 100 V, a parametri kola su: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $X_L = 40\ \Omega$, i $X_C = 20\ \Omega$.

6.45.



Sl.6.45.

Idealni voltmetri pokazuju, prema slici 6.45, $U = 10\sqrt{3}$ V, i $U_1 = U_2 = 10$ V.
Ako je $R_1 = 2\ \Omega$, kolika je reaktivna snaga kola ?

6.46. Potrošač otpornosti R i kondenzator kapacitivnosti C vezani su na red i priključeni na generator naizmeničnog napona koji se menja po zakonu $u = 400 \sin 5\,000\, t$ V. Ako je trenutna vrednost struje u kolu $i = 0{,}5 \sin (5\,000\, t + 30°)$ A, odrediti:

a) kapacitivnost C kondenzatora i otpornost R,
b) aktivnu i reaktivnu snagu potrošača.

6.47. Za kolo naizmenične struje koje se sastoji iz generatora naizmeničnog napona čija je trenutne vrednost $u = 212 \cos (\omega t + \pi/6)$ V i impedanse $\underline{Z} = (3 + j\, 3\sqrt{3})\ \Omega$ odrediti:

a) trenutnu vrednost struje u kolu,
b) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola.

6.48. Na generator naizmenične struje ems E i unutrašnje impedansa $\underline{Z}_g = R_g + j\, X_g$ redno je vezan potrošač impedanse $\underline{Z} = R + j\, X$.

a) kakva veza mora postojati između aktivnih i reaktivnih otpornosti da bi generator dao maksimalnu snagu potrošaču ?

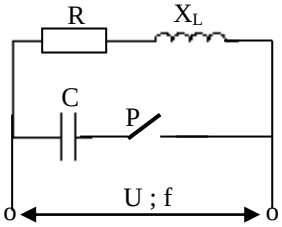
b) koliki je stepen iskorišćenja pod a)

6.49. Dve impedanse $\underline{Z}_1 = (3 + j\, 4)\ \Omega$ i $\underline{Z}_2 = 10\Omega$ vezane su paralelno i priključene na naizmenični napon. Ako je ukupna aktivna snaga kola $P = 1\,100$ W, odrediti pojedinačne aktivne snage po prijemniku i ukupnu struju kola.

6.50. Kod redne veze RL poznati su sledeći podaci: $I = 24$ A, $U = 120$ V, $P = 1\,730$ W i $f = 50$ Hz. Kolika je otpornost R i induktivnost L ?

6.51. Kolo naizmenične struje sastoji se iz dva redno vezana elementa. Snaga kola iznosi 940 W, a faktor snage $\cos \varphi = 0{,}707$. Na krajevima kola vlada napon koji se menja po zakonu $u = 99 \sin (6\,000t + 30°)$. Poznato je takođe da struja fazno prednjači naponu za 45°. Koji su to parametri elemenata i koliko oni iznose ?

6.52.



Sl.6.52.

Na naizmenični napon efektivne vrednosti U i učestanosti f, sl.6.52, priključen je prijemnik preko napojnog voda dužine l. Provodnici voda su od bakra, a površina preseka im je S. Reaktivna otpornost voda je zanemarljiva. Aktivna otpornost prijemnika je R, a reaktivna je X. Za krajeve prijemnika vezan je, preko prekidača P, kondenzator kapaciteta C.

a) Odrediti faktor snage u napojnom vodu pre i posle zatvaranja prekidača P
b) Za koliko se promeni snaga gubitaka u napojnom vodu (toplotni gubici) kada se zatvori prekidač P ?

Brojni podaci:
$l = 100$ m; $S = 35$ mm^2; $\rho_{Cu} = 0{,}0175\ \Omega$mm^2/m; $R = 1{,}7\ \Omega$; $X = 1{,}4\ \Omega$; $U = 230$ V; $f = 50$ Hz; $C = 300\ \mu$F.

6.53. Generator naizmenične struje efektivne vrednosti napona $U = 120$ V i učestanosti $f = 50$ Hz, napaja jedan uređaj za zavarivanje čija je impedansa $\underline{Z}_Z = (4 + j\, 3)\ \Omega$, električnu peć snage $P_p = 15$ KW i jedan motor snage $P_M = 60$ KW čiji je faktor snage $\cos \varphi_M = 0{,}8$. Sva tri opterećenja vezana su paralelno na generator. Odrediti kapacitivnost kondenzatora koji je paralelno vezan sa datim opterećenjima pod uslovom da faktor snage ukupnog opterećenja generatora bude maksimalan (jednak jedinici).

6.54. U rednoj vezi RLC ukupni napon ima efektivnu vrednost $U = 120$ V učestanosti $f = 50$ Hz. Struja od $I = 2{,}4$ A u kolu razvija aktivnu snagu od $P = 200$ W. Ako je $X_L = 2X_C$ odrediti R, L i C u kolu.

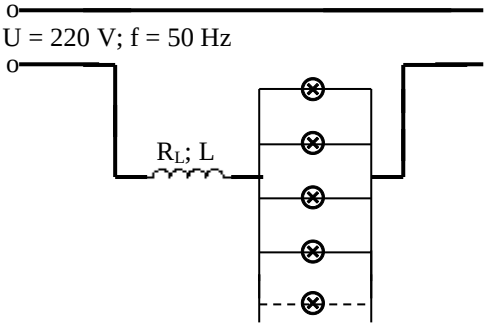
6.55. Kalem induktivnosti $L = 3{,}59$ mH i termogeni otpornik otpornosti $R = 12\ \Omega$ vezani su redno sa kondenzatorom kapacitivnosti C i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 12$ V, frekvencije $f = 600$ Hz. Odrediti kapacitet kondenzatora tako da aktivna snaga u kolu bude za 30% veća od reaktivne snage. Kolika je impedansa i aktivna snaga ? Termogeni otpor kalema je zanemarljiv.

6.56. Realni kalem i kondenzator vezani su redno i priključeni na izvor naizmenične struje. Jačina struje u kolu menja se po zakonu $i = 2 \sin 100\pi\, t$ [A], a napon $u = 40 \sin (100\pi\, t + \pi/4)$ [V].

a) Koliki je aktivni otpor kalema ?,
b) Kolika količina toplote se oslobodi na kalemu za vreme od 5 minuta ?

6.57. Sijalica snage $P = 20$ W , koja može da izdrži napon efektivne vrednosti od $U_S = 120$ V, priključiti na napon efektivne vrednosti $U = 220$ V, frekvencije $f = 50$ Hz. Koliki je kapacitet kondenzatora C kojeg vežemo redno sa sijalicom da bi ona maksimalno svetlila ? Kolika je induktivnost kalema kojim menjamo kondenzator.

6.58.



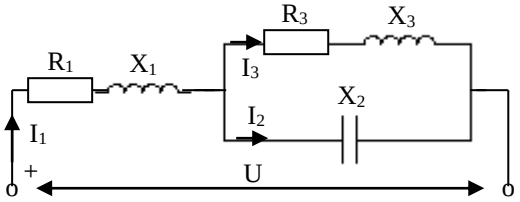
Sl.6.58.

Na mrežu naizmenične struje napona $U = 220$ V frekvencije $f = 50$ Hz, preko realne prigušnice aktivnog otpora $R_L = 2\ \Omega$ i induktivnosti $L = 0{,}1$ H priključena je grupa sijalica jednog stana, kao na slici 6.58.

a) Koliki je napon na sijalicama u stanu ako one troše ukupnu struju $I = 4$ A ?
b) Koliku će aktivnu snagu trošiti prigušnica ako je jedna od sijalica u kratkom spoju ?
c) Na koji način će sijalice trošiti maksimalnu snagu i kolika je ta snaga ? Odgovor detaljno obrazložiti.

6.59. U rednom RLC kolu poznato je: impedansa kola $\underline{Z} = (3 + j\ \sqrt{3}\ )\ \Omega$, napon na otporniku R $U_R = 6$ V, $X_L = 2\sqrt{3}\ \Omega$ i početna faza za napon U $\theta = -\pi/3$ rad. Odrediti aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu .

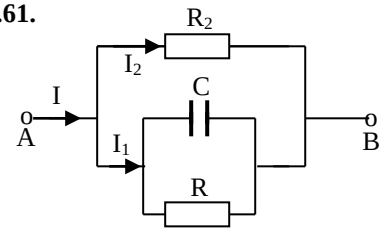
6.60.



Sl.6.60.

U kolu, prema sl.16.50, poznato je: $R_1 = 2\ \Omega$, $X_1 = 26\ \Omega$, $X_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $X_3 = 10\ \Omega$. Ukupna aktivna snaga kola je $P = 1{,}2$ KW. Odrediti sve struje u kolu

6.61.

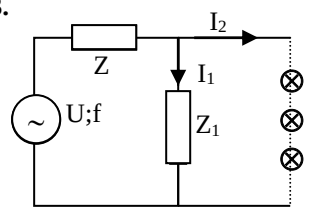


Sl.6.61.

Za kolo prostoperiodične struje, prikazanog na sl.6.61, poznato je: $R = 20$ kΩ, $I = 10$ mA, $I_1 = 6$ mA i $I_2 = 5$ mA. Kolika je aktivna snaga P_2 na prijemniku otpornosti R_2 ?

6.62. Za kolo prema sl.6.61. (predhodni zadatak) poznato je: $R = 20$ KΩ, $I_1 = 6$ mA, $I_2 = 5$ mA. Ako je aktivna snaga prijemnika otpornosti R_2, $P_2 = 390$ mW, kolika je ukupna struja I u kolu ?

6.63.

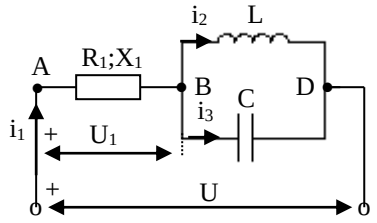


Sl.6.63.

Redna veza sijalica istih snaga $P_S = 100$ W pri istom naponu $U_S = 100$ V priključena je na napon 100 V, frekvencije $f = 50$ Hz, prema slici 6.63. Broj sijalica koje su redno povezane ne utiču na struju I_2.

a) Kakvi elementi treba da budu u impedansama Z i Z_1 a da struja koja kroz njih teče ne zavisi od broja sijalica ?
b) Izračunati sve elemente impedansi Z i Z_1, a da one rade u normalnom režimu rada ($U_S = 100$ V i $P_S = 100$ W).

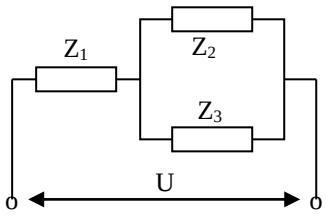
6.64.



6.64.

Impedansa Z_1 nepoznatih parametara vezana je u kolo prema sl.6.64. Ako je poznato: $U_1 = 144$ V, $I_2 = 1$ A, $I_3 = 3$ A i aktivna snaga celoga kola $P = 160$ W, kolika je aktivna i reaktivna otpornost impedanse Z_1 ?

6.65.



Sl.6.65.

Odrediti efektivnu vrednost napona U, na koji je priključeno kolo prema slici 6.65. Poznato je: $\underline{Z}_1 = (20 + j\,140)\ \Omega$, $P_2 = 600$ W, $P_3 = 1\,000$ W, $\cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 = 0{,}8$ ($\varphi_2 = \varphi_3 > 0$) i ukupna aktivna snaga kola $P = 2\,000$ W.

6.66. Za kolo prema slici 6.65. (predhodni zadatak) dato je: $\underline{Z}_1 = (600 - j\,800)\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = (300 - j\,400)\ \Omega$, $\underline{Z}_3 = (200 + j\,200)\ \Omega$ i aktivna snaga trećeg prijemnika $P_3 = 2$ W. Odrediti:

a) efektivnu vrednost priključenog napona,
b) faktor snage celog kola.

6.67. Prijemnik nepoznate impedanse $\underline{Z} = (R + j\,X)\ \Omega$ priključen je na generator naizmenične ems $\underline{E}$ i unutrašnje impedanse (otpornosti) $\underline{Z}_g = (R_g + j\,X_g)\ \Omega$.

Odrediti:

a) impedansu prijemnika, odnosno njegovu aktivnu i reaktivnu otpornost, pri kojoj je aktivna snaga na prijemniku maksimalna,
b) aktivnu snagu prijemnika i njegov faktor snage.

Brojni podaci: $E = 20$ V; $\underline{Z}_g = (2 + j\,4)\ \Omega$.

6.68. RL prijemnik čiji faktor snage iznosi $\cos\varphi = 0{,}866$ priključen je na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 240$ V, frekvencije $f = 40$ Hz. Efektivna vrednost struje u prijemniku je $I_L = 5$ A. Paralelno prijemniku vezati kondenzator kapaciteta C čija vrednost ostvaruje maksimalni faktor snage ($\cos\varphi_1 = 1$). Odrediti vrednost kapaciteta C i ukupnu struju I (struja u dovodnom vodu) nakon vezivanja kondenzatora.

6.69. Prijemnik induktivnog karaktera (RL) priključen je na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 200$ V,frekvencije $f = 50$ Hz. Ako je efektivna vrednost struje prijemnika $I = 20$ A i aktivna snaga $P = 2\,000$ W, odrediti:

a) faktor snage prijemnika $\cos\varphi$,
b) kapacitet kondenzatora C koji se paralelno veže na prijemnik sa ciljem da se ostvari novi faktor snage (poboljšan) od $\cos\varphi' = 0{,}9$ (ind).

6.70. Motor za naizmeničnu struju ukupne snage $P = 2$ KW i faktora snage $\cos\varphi = 0{,}8$ priključen je na napon, predviđen za rad motora, od $U = 500$ V, frekvencije $f = 50$ Hz. Odrediti kapacitivnost kondenzatora koji treba priključiti paralelno motoru tako da ukupan faktor snage sistema bude maksimalan ($\cos\varphi = 1$).

6.71. Odrediti elemente prijemnika koji se sastoji iz paralelne veze otpornika R i reaktanse X, da bi snaga na njemu bila maksimalna. Prijemnik je priključen na generator naizmenične ems $E = 2$ V unutrašnje impedanse $\underline{Z}_g = (10 - j\,20)\ \Omega$. Kolika je maksimalna snaga prijemnika (aktivna) ?

6.72. U otporniku otpornosti $R = 2$ KΩ uspostavljena je prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 5$ mA, učestanosti $f = 400$ Hz i početne faze $\theta = \pi/6$ radijana. Odredi trenutnu snagu koju prima otpornik (analitički izraz) i prikazati je grafički uz odgovarajuće objašnjenje.

6.73. U kalemu induktivnosti $L = 20$ mH, zanematljive termogene otpornosti, uspostavljena je prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 10$ mA, kružne učestanosti $\omega = 10^4\ s^{-1}$ i početne faze $\theta = 60°$.
Odrediti:
a) trenutnu snagu koju prima kalem i predstaviti je grafički uz potreban komentar,
b) energiju magnetnog polja kalema.

6.74. Na pločama kondenzatora kapaciteta $C = 100$ nF priključen je prostoperiodični napon efektivne vrednosti $U = 1{,}2$ V, kružne učestanosti $\omega = 10^5\ s^{-1}$ i početne faze $\theta = \pi/4$ rad.
Odrediti:
a) trenutnu snagu koju prima kondenzator i predstaviti je grafički uz potrebno objašnjenje,
b) energiju kondenzatora (elektrostatičku energiju).

6.75. Idealni kondsenzator vezan je na red sa realnim kalemom bez F_e jezgra, a zatim je ova veza priključena na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 120$ V. Odrediti faktor snage ove redne veze, ako je efektivna vrednost napona na krajevima kalema $U_L = 136$ V, a na kraju kondenzatora $U_C = 50$ V.

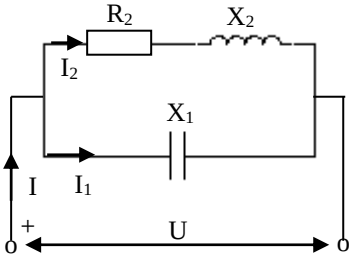
6.76. Dva prijemnika vezana su na red i priključena na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 200$ V. Poznati su: reaktivna snaga celog kola $Q_e = -5$ VAR (kap), reaktivna snaga prvog prijemnika $Q_1 = -2{,}5$ VAR (kap), impedansa drugoga prijemnika $Z_2 = \sqrt{5}$ kΩ i reaktivna provodnost drugog prijemnika $B_2 = 0{,}4$ mS.
Odrediti aktivne i reaktivne otpornosti oba prijemnika.

6.77. Između krajeva redne veze dva prijemnika priključen je prostoperiodični napon. Poznati su: aktivna snaga celog kola $P_e = 5$ W, reaktivna provodnost celog kola $B_e = -1{,}25\cdot10^{-4}$ S, reaktivna snaga drugog prijemnika $Q_2 = -2{,}5$ VAR, reaktivna otpornost drugog prijemnika $X_2 = -2$ kΩ i impedansa prvog prijemnika $Z_1 = 3\sqrt{5}$ kΩ.
Odrediti aktivnu otpornost prvog prijemnika R_1 i aktivnu otpornost drugog prijemnika R_2.

6.78. Dva prijemnika su vezana paralelno i priključena na prostoperiodični napon. Poznati su sledeći podaci: aktivna snaga prvog prijemnika $P_1 = 100$ W, efektivna vrednost struje drugog prijemnika $I_2 = 1$ A, faktor snage drugog prijemnika $\cos\varphi_2 = 0{,}8$, efektivna vrednost struje napojne grane (ukupne) $I = 1{,}5$ A i faktor snage paralelne veze prijemnika $\cos\varphi = 0{,}9$.
Drugi prijemnik, a i paralelna veza oba prijemnika, su pod navedenim okolnostima, pretežno insduktivni.
Odrediti:
a) efektivnu vrednost struje prvog prijemnika,
b) faktor snage prvog prijemnika i
c) efektivnu vrednost priključenog napona.

6.79. Dva prijemnika su vezana paralelno i priključena na strujni generator prostoperiodične struje. Prvi prijemnik je pretežno induktivan, a drugi pretežno kapacitivan. Faktor snage prvog prijemnika je $\cos\varphi = 0{,}8$, a faktor snage drugog prijemnika je $\cos\varphi = 0{,}9$. Efektivna vrednost struje prvog prijemnika je tri puta manja od efektivne vrednosti struje drugog prijemnika.
Koliki je faktor snage celog kola, i kakvog je karaktera kolo ?

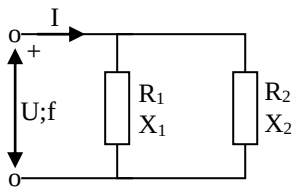
6.80.



Sl.6.80.

Za naizmenično prostoperiodično kolo, prema sl.6.80, poznato je: efektivna vrednost priključenog napona $U = 50$ V i efektivne vrednosti svih struja po granama $I = 1$ A, $I_1 = 1$ A i $I_2 = 1$ A.
Kolika je aktivna i reaktivna snaga celoga kola ?

6.81.

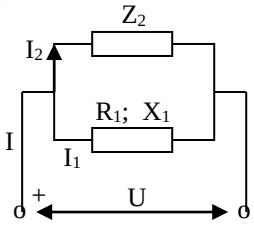


Sl.6.81.

Dva prijemnika su vezana paralelno, prema sl.6.81, i priključena na prostoperiodični napon. Poznati su podaci: aktivna i reaktivna otpornost drugog prijemnika je $R_2 = 300\ \Omega$ i $X_2 = 400\ \Omega$, reaktivna snaga prvog prijemnika $Q_1 = -135$ mVAr, reaktivna snaga kola $Q_e = 225$ mVAr i efektivna vrednost struje napojne grane $I = 15\sqrt{5}$ mA.

Odrediti aktivnu i reaktivnu otpornost prvog prijemnika.

6.82.

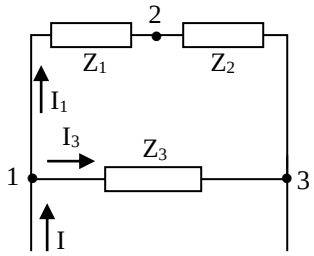


Sl.6.82.

Za kolo prikazano na sl.6.82 poznato je: aktivna i reaktivna otpornost prvog prijemnika $R_1 = 5\ k\Omega$ i $X_1 = 10\ k\Omega$, aktivna i reaktivna snaga celog kola $P = 5{,}6$ W i $Q = -0{,}8$ VAr, a struja I_2 fazno prednjači naponu U za 45°.

Odrediti efektivne vrednosti struja svih grana.

6.83.

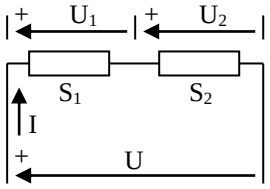


Sl.6.83.

Tri prijemnika vezana su kao na slici 6.83. i uključena u kolo prostoperiodične struje. Poznati su: aktivna i reaktivna otpornost prvog prijemnika $R_1 = 3\ k\Omega$ i $X_1 = 6\ k\Omega$, impedansa drugog prijemnika $Z_2 = 2{,}24\ k\Omega$, impedansa trećeg prijemnika $Z_3 = 8{,}46\ k\Omega$, odnos aktivnih snaga paralalno vezanih grana $\frac{P_{12}}{P_3} = 1{,}5$ a napon $\underline{U}_{12}$ fazno prednjači naponu $\underline{U}_{23}$ za ugao $\theta = 126°40'$.

Odrediti faznu razliku između napona $\underline{U}_{13}$ i struje $\underline{I}$.

6.84.



Sl.6.84.

Dva prijemnika su redno vezana, a zatim uključena u kolo prostoperiodične struje, kao na sl. 6.84. Pri datim okolnostima prividne snage pojedinačnih prijemnika su: $S_1 = 1$ VA i $S_2 = 7$ VA. Napon U_1 fazno prednjači struji za $\pi/4$, a napon U_2 fazno zaostaje za strujom I za $\pi/4$.

Kolika je prividna snaga celog kola ?

6.85. Realni induktivni prijemnik (RL) je priključen na prostoperiodični napon efektivne vrednosti $U = 220$ V frekvencije $f = 50$ Hz. Aktivna snaga prijemnika je $P = 1$ KW uz faktor snage $\cos\varphi_{RL} = 0{,}6$. Paralelno ovom prijemniku se doda jedan kondenzator sa ciljem da se faktor snage kola poveća na $\cos\varphi = 0{,}9$. Odrediti vrednost kapaciteta C (sl.6.40.).

6.86. Realni induktivni prijemnik (RL), induktivnosti $L = 50$ mH i impedanse $Z = 20\ \Omega$ priključen je napojnim vodom na naizmenični napon U. Datom prijemniku paralelno dodati kondenzator kapaciteta C. Pri kojoj će kapacitivnosti kondenzatora struja u napojnom vodu I i priključeni napon U biti u fazi ? Koliki je faktor snage ove paralelne veze ?

6.87. Induktivni kalem induktivnosti $L = 1$ H priključen je na izvor prostoperiodičnog napona efektivne vrednosti $U = 220$ V, učestanosti $f = 50$ Hz. Izračunati maksimalnu energiju koja u jednom trenutku može biti sadržana u magnetnom polju kalema.

6.88. Kondenzator kapaciteta $C = 1\ \mu F$ priključen je na prostoperiodični napon efektivne vrednosti $U = 10$ KV. Izračunati maksimalnu energiju koja se u jednom trenutku može sadržati u kondenzatoru. Kolika je površina ploča navedenog kondenzatora ako je kao dielektrik upotrebljen vazduh ?

6.89. Idealni naponski generator prostoperiodičnog napona $u = U_m \cos \omega t$ priključen je na idealni kalem induktivnosti L. Izračunati aktivnu i reaktivnu snagu generatora i kalema. Objasniti kako se odvija energetski proces između generatora i kalema.

6.90. Kondenzator kapacitivnosti C i otpornik otpornosti R vezani su paralelno na izvor prostoperiodičnog napona ugaone učestanosti ω, pri kojoj je $R\omega C = 1$. Ako je srednja snaga gubitaka u dovodnim provodnicima jednaka P kada je priključen samo otpornik, koliki su ti gubici kada je priključen i kondenzator. Pretpostaviti da se uticaj voda na jačinu struje u oba slučaja može zanemariti.

6.91. Idealni kalem i kondenzator vezani su na red i priključeni na prostoperiodični napon $u = 20 \sin 10^5\ t$ [V] . Ako je napon na kalemu $u_L = 10 \cos (\omega t + \pi/2)$ [V], a maksimalna trenutna energija kondenzatora iznosi $W_{Cm} = 450\ \mu J$, odrediti kolika je induktivnost kalema ?

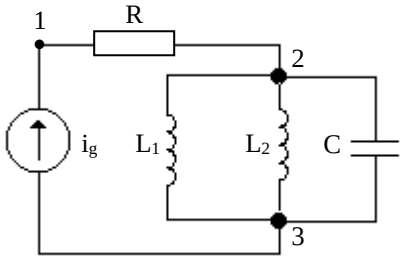
6.92. Redna veza otpornika otpornosti $R = 10\ k\Omega$ i kalema induktivnosti $L = 1$ mH priključena je na idealni naponski generator elektromotorne sile $e = 100 \cos (10^4\ t + \pi/4)$. Kolika je elektromotorna sila u trenutku u kojem je energija kondenzatora maksimalna ?

6.93. Redna veza otpornika otpornosti $R = 1\ k\Omega$ i kondenzatora kapacitivnosti $C = 1$ nF priključena je na idealni naponski generator čija je efektivna vrednost ems $E = 1$ V i kružne učestanosti $\omega = 10^6$ rad/s. Kolika je trenutna vrednost ems kada je jačina struje otpornika jednaka nuli ?

6.94. Otpornik otpornosti $R = 1\ \Omega$, savršeni kalem induktivne otpornosti $X_L = 10\ \Omega$ i savršeni kondenzator kapacitivne otpornosti $X_C = 5\ \Omega$ vezani su na red i priključeni na naponski generator elektromotorne sile efektivne vrednosti $E = 5$ V i unutrašnje kompleksne otpornosti $\underline{Z}_g = (4 - j\ 5)\ \Omega$. Odrediti trenutnu snagu otpornika otpornosti R u trenutku kada je napon kondenzatora maksimalan i kada je on jednak nuli.

6.95. Trenutni napon i trenutna jačina struje prijemnika su: $u = 30 \sin (\omega t + \pi/3)$ V i $i = 6 \cos (\omega t - \pi/3)$ A. Referentni smerovi napona i struje su usaglašeni. Odrediti: a) srednju snagu, b) reaktivnu snagu, c) konduktansu , d) susceptansu prijemnika i e) odrediti karakter prijemnika.

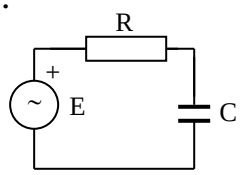
6.96.



Sl.6.96.

U kolu prostoperiodične struje, prema slici 6.96, poznato je:
$\underline{I}_g = (1 - j\ 1)$ A; $\omega = 10^7$ rad/s; $R = 10\ \Omega$; $L_1 = 1\ \mu$H; $L_2 = 2\ \mu$H i $C = 5$ nF.
Izračunati:
a) aktivnu , reaktivnu i prividnu snagu i predstaviti ih kompleksno;
b) trenutnu snagu idealnog strujnog generatora.

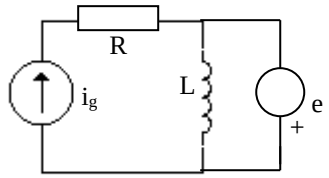
6.97.



Sl.6.97.

U kolu prostoperiodične struje, prikazanom na slici 6.97, poznata je kompleksna prividna snaga idealnog naponskog generatora $\underline{S}_E = (60 - j\ 80)$ VA, kružna učestanost $\omega = 10^4$ rad/s i otpornost otpornika $R = 15\ \Omega$. Izračunati efektivnu vrednost elektromotorne sile generatora i kapacitivnost kondenzatora.

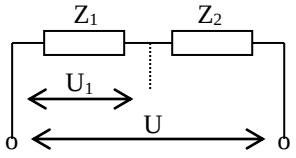
6.98.



Sl.6.98.

U kolu prostoperiodične struje, prema datoj slici 6.98, dato je:
$i_g = 2 \cos \omega t$ A, $e = 4 \sin \omega t$ V, $R = 1\ \Omega$ i $\omega L = 2\ \Omega$.
Izračunati kompleksne prividne snage idealnih generatora.

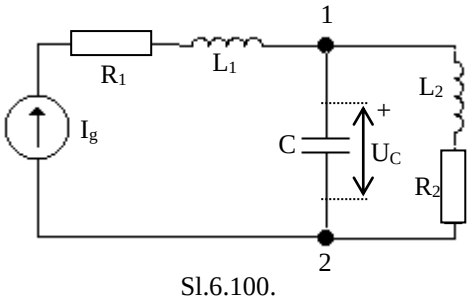
6.99.



Sl.6.99.

Dva prijemnika su vezana na red i priključena na prostoperiodični napon efektivne vrednosti U = 100 V, kao što je prikazano na slici 6.99. Pri tome je aktivna snaga redne veze $P_e = 60$ W, reaktivna snaga prvog prijemnika $Q_1 = -30$ VAR (kap.), faktor snage prvog prijemnika $\cos \varphi_1 = 0{,}8$; efektivna vrednost napona prvog prijemnika $U_1 = 50$ V, a drugi prijemnik je pretežno kapacitivan. Izračunati kompleksne impedanse oba prijemnika.

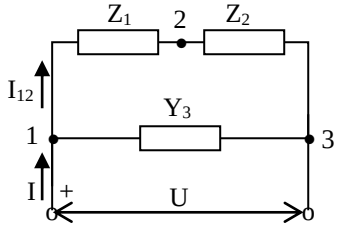
6.100.



Sl.6.100.

U kolu prostoperiodične struje, prikazanom na slici 6.100, poznato je:
$I_g = 3$ A; $f = 50$ Hz; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$;
$L_1 = 50$ mH i $L_2 = 100$ mH.
Izračunati kapacitivnost kondenzatora C tako da napon kondenzatora U_C bude u fazi sa strujom generatora. Kolika je tada kompleksna prividna snaga idealnog strujnog generatora ?

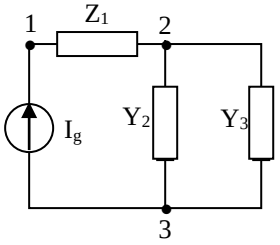
6.101.



Sl.6.101.

U kolu naizmenične struje, prikazanom na sl. 6.101, poznato je :
$\underline{Y}_3 = (20 - j\,50)$ mS; $\underline{Z}_2 = (6 - j\,8)\ \Omega$ i $\underline{U} = (-6 + j\,8)$ V.
Ukupna aktivna snaga prvog i drugog prijemnika je $P_{12} = 4$ W, a efektivna vrednost struje paralelne veze (ukupna struja) iznosi I = 1 A. Struja I_{12} kasni za naponom U. Odrediti kompleksnu impedansu prvog prijemnika.

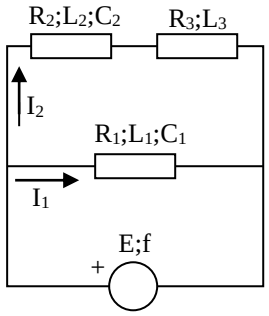
6.102.



Sl.6.102.

Za kolo prostoperiodične struje sa slike 6.102, dati su sledeći podaci:
$\underline{Z}_1 = (25 + j\,45)\ \Omega$; $\underline{U}_{23} = -(11 + j\,7)$ V; $B_3 = \dfrac{1}{85}$ S; $G_2 = 10$ mS;
ukupna reaktivna snaga sva tri prijemnika $Q_e = 3{,}2$ VAR i $I_g = 0{,}2$ A.
Izračunati kompleksni napon $\underline{U}_{13}$ i kompleksnu impedansu drugog prijemnika.

6.103.

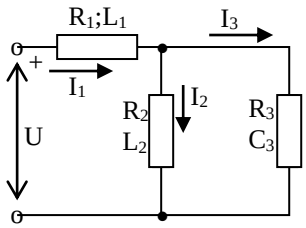


Sl.6.103..

Dva prijemnika poznatih karakteristika $R_1 = 60\ \Omega$; $L_1 = 10$ mH; $C_1 = 5\ \mu$F; $R_2 = 5\ \Omega$; $L_2 = 2$ mH i $C_2 = 2{,}5\ \mu$F i prijemnik otpornosti $R_3 = 15\ \Omega$ i nepoznate induktivnosti L_3 vezani su kao na sl. 6.103. i priključeni na idealni naponski generator prostoperiodične ems, maksimalne vrednosti $E_m = 40$ V, učestanosti **f**. Aktivna snaga drugog prijemnika je $P_2 = 5$ W, reaktivna snaga trećeg prijemnika je $Q_3 = 40$ VAR, a struja I_2 fazno kasni za ems E.Odrediti:

a) Impedansu prvog prijemnika,
b) Aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola,
c) Impedansu kola ako se učestanost smanji dva puta ($f' = f/2$),
d) Priraštaje aktivne i reaktivne snage koje razvija generator kada se učestanost generatora smanji dva puta ($f' = f/2$) .

6.104.



Sl.6.104.

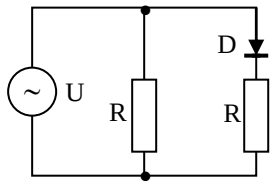
Tri prijemnika su vezana prema datoj slici 6.104. i priključena na prostoperiodični napon. Pod ovim okolnostima kompleksna impedansa prvog prijemnika je $\underline{Z}_1 = (125 + j\ 375)\ \Omega$, odnos kompleksnih struja drugog i trećeg prijemnika je $\underline{I}_2 : \underline{I}_3 = 0{,}6 - j\ 0{,}8$; aktivna i reaktivna snaga drugog prijemnika je $P_2 = 0{,}7$ W i $Q_2 = 0{,}1$ VAR i efektivna vrednost struje prvog prijemnika je $I_1 = 40\sqrt{2}$ mA početne faze $\psi_1 = -45°$. Odrediti:

a) Ukupnu impedansu prijemnika
b) Ukupnu impedansu prijemnika ako se učestanost udvostruči,
c) Kompleksni izraz za jačinu struje prvog prijemnika kada se učestanost napona udvostruči ($f' = f/2$)

6.105. Pretežno induktivan prijemnik, srednjesnage $P = 48\pi$ KW i faktora snage $\cos\varphi = 0{,}6$ priključen je na prostoperiodični napon efektivne vrednosti $U = 1$ KV, učestanosti $f = 50$ Hz. Kolika treba da bude kapacitivnost kondenzatora priključenog paralelno ovom prijemniku da bi se faktor snage popravio na $\cos\varphi' = 0{,}8$? Koliko ima rešenja , koje je od rešenja praktičnije i zašto ?

6.106. Generator ems $e = 20\cos 10^6 t$ [V], unutrašnje impedanse $\underline{Z}_g = (5 - j\ 20)\ [\Omega]$, priključen je na prijemnik. Kolika treba da bude impedansa prijemnika $\underline{Z}_P$ da bi srednja snaga prijemnika bila maksimalna i kolika je ta snaga ?

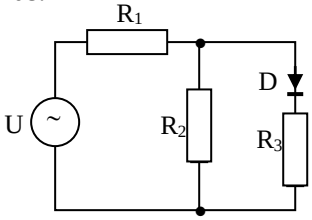
6.107.



Sl.6.107.

U kolu prostoperiodične naizmenične struje, prema slici 6.107, nalaze se dva termogena otpornika, jednakih otpornosti $R = 2$ kΩ i dioda D idealnih karakteristika. Efektivna vrednost napona električnog izvora je $U = 220$ V. Kolika se količina toplote oslobodi u otpornicima za vreme $t = 10$ minuta.

6.108.



Sl.6.108.

Prema slici 6.108, prikazano je kolo prostoperiodične naizmenične struje, u kojem su otpornosti otpornika jednake: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 15\ \Omega$, dok je napon na izvoru $U = 10$ V. Kolika je snaga električne struje u otpornicima otpornosti R_2 i R_3 ?

6.109. Redno LC kolo ima rezonantnu frekvenciju 10 kHz. Ako je C = 250 μF a maksimalna struja u kolu I_m = 5 mA, koliko iznosi ukupna energija ovog kola?

6.110. Dva idealna kalema, istih induktivnosti, vezana su paralelno i priključena na naizmenični napon efektivne vrednosti U a zatim redno i priključena na naizmenični napon efektivne vrednosti U/2. Koliko iznosi odnos reaktivnih snaga paralelne (Q_p) i redne (Q_r) veze ivih kalema ?

6.111. U jednom trenutku u LC kolu tri četvrtine ukupne energije kola nalazi se u magnetnom polju kalema. Ako je u slučaju rezonanse struja kalema I, koliko iznosi struja I_1 u posmatranom trenutku.

7. REZONANTNO I ANTIREZONANTNO KOLO

7.1. REZONANTNO KOLO

Kod redne veze termogenog otpornika otpornosti R, kalema induktivnosti L i kondenzatora kapacitivnosti C, koji su priključeni na naizmenični napon kružne učestanosti ω, može doći do posebnog slučaja kada su reaktivni otpori kalema i kondenzatora izjednačeni ($\omega L = 1/\omega C$). U ovom slučaju ukupna reaktansa kola je jednaka nuli ($X = X_L - X_C = 0$), pa je impedansa kola jednaka termogenom otporu ($Z = R$). Zbog toga u kolu će da teče maksimalna vrednost struje ($I_o = U/Z = U/R$), koja će biti u fazi sa priključenim naponom kola ($\varphi = 0$). Naponi na kalemu i kondenzatoru su međusobno jednaki (jednake reaktanse), pa se uva dva napona zbog suprotnih predznaka međusobno poništavaju, te oni ne utiču na struju u kolu. Za ovakav slučaj kaže se da je nastupila **rezonansa**. Struja pri rezonansi iznosi:

$$\mathbf{I_o = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}}$$

Kako je struja pri rezonansi maksimalna, sledi da i naponi na reaktivnim otporima (kalem i kondenzator) mogu dostići vrlo velike vrednosti (i do nekoliko stotina puta veće vrednosti od priključenog napona), pa se zbog toga ova pojava još naziva i **naponskom rezonansom**. Umesto navedinih naziva još se koristi i naziv **redna rezonansa**, jer se ona javlja kod rednog RLC kola, kao i **fazna rezonansa**.

Dakle, uslov nastanka naponske (fazne) rezonanse je:

$$\boxed{\mathbf{\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}}}$$

Iz navedenog uslova rezonanse slede relacije koje određuju vrednosti kružne frekvencije $\boldsymbol{\omega_o}$ i frekvencije $\mathbf{f_o}$, pri kojima dolazi do rezonanse:

$$\boxed{\mathbf{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}} \qquad \text{i} \qquad \boxed{\mathbf{f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}}$$

Navedene jednačine se nazivaju **Tomsonovim jednačinama (obrascima).**

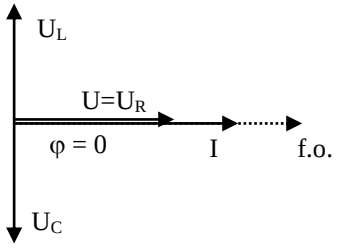
Ovu frekvenciju $\mathbf{f_o}$ nazivamo još i **sopstvenom (prirodnom)** frekvencijom rezonantnog kola**.** Kako napon izvora koji se dovodi na rezonantno kolo ima svoju frekvenciju **f** , tada će ove dve vrekvencije da se izjednače ($\mathbf{f = f_o}$). To znači da je izvor svojom frekvencijom f prinudno doveo do rezonanse, jer je sopstvena frekvencija kola sada jednaka frekvenciji napona na izvoru. Ovakve oscilacije se još nazivaju **prinudne oscilacije.**

Rezonansa igra veoma važnu ulogu u elektrotehnici.

U energetici (kola sa velikim strujama) ona je nepoželjna, jer su njene posledice: pregorevanje otpornika R i kalema L, kao i proboj kondenzatora C. Ove posledice se javljaju zbog povećane struje pri rezonansi, čije povećanje može biti nekoliko stotina puta.

U radiotehnici rezonansa se veštački stvara, čime se mogu izdvojiti razni signali na različitim učestanostima izjednačavajući f i f_o. Samim tim se eliminišu ostali slabiji signali koji se nalaze na drugim frekvencijama Kako su vrednosti struja vrlo male neće doći do navedenih posledica kao u energetici.

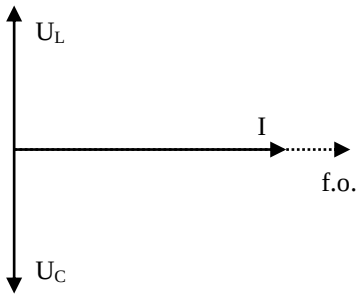
Fazorski dijagram napona i struje u rezonantnom kolu prikazan je na slici 41.



Sl.41.

Pojedinačni naponi na elementima iznose:
$U_R = I_o R$; $U_L = I_o X_L = I_o \omega L$ i $U_C = I_o X_C = I_o/\omega C$.

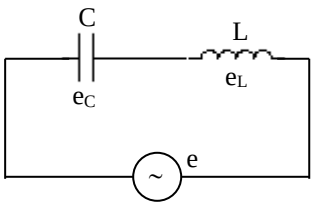
Ako je otpornost R vrlo mala, tada je struja u rezonantnom kolu vrlo velika ($I_o = U/R$), što kao posledicu ima vrlo velike napone na reaktansama (U_L i U_C).



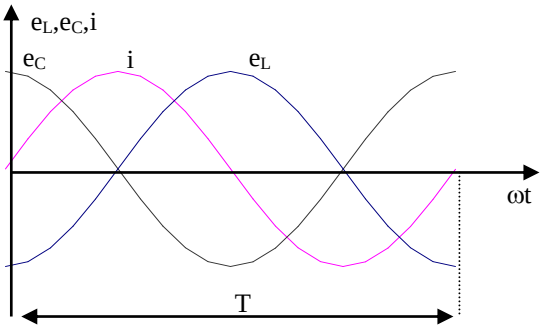
Sl.42.

Kod redne veze savršenog kalema i kondenzatora (R = 0), ako dođe do rezonanse (f = f_o) , u tom slučaju rezonantna struja je beskonačna ($I_o = U/0 = \infty$), što u praksi predstavlja kratku vezu. Fazorski dijagram za ovaj slučaj je dat na slici 42. Naponi U_L i U_C su međusobno jednaki i iznose:
$U_L = U_C = I\cdot\omega L = I/\omega C$. U ovom slučaju struja u kolu osciluje usled napona U_L i U_C, pa je u ovom slučaju ukupni napon izvora nebitan. On je, zbog pojave rezonanse, bez uticaja, odnosno jednak nuli ($U = U_R = IR$), a na struju u kolu će da deluju reaktivni naponi U_L i U_C

Dakle, ako je kod redne veze LC induktivni otpor jednak kapacitivnom ($\omega L = 1/\omega C$), prema slici 43, tada će ukupni otpor biti jednak nuli ,odnosno, struja je maksimalna (kratka veza), i ona iznosi: $I = U_L/X_L = U_C/X_C$.
Fazorski dijagram za ovo kolo je dat na slici 42.
Napon izvora (ems e) je doveo do punjenja kondenzatora, koji se nakon toga naizmenično prazni i puni, posle toga izvor nema nikakvog uticaja, jer je došlo do pojave rezonanse (f = f_o). Zbog toga umesto izvora u daljem objašnjenju možemo uzeti kratku vezu (što to praktično i jeste ako se radi o idealnom naponskom generatoru).
Grafički dijagram struje u rezonantnom (oscilatornom) LC kolu je dat na slici 44.



Sl.43.



Sl.44.

Napunjeni kondenzator ($e_C = E_{Cm}$), koji raspolaže energijom kondenzatora $W_C = U_{Cm}\cdot Q/2 = U_{Cm}^2\cdot C/2$, preuzima ulogu izvora, te se on prazni preko prigušnice L (prva četvrtina periode). Energija kondenzatora se pretvara u magnetnu energiju kalema, koja iznosi $W_L = LIm^2/2$. Kada se kondenzator prazni e_C opada sa maksimalne vrednosti na nulu, dok će struja da raste od nule ka maksimalnoj vrednosti , i imaju isti smer (e_C ima ulogu ems). Istovremeno indukovana ems samoindukcije e_L se suprostavlja pražnjenju kondenzatora (prenosu energije kondenzatora na kalem), pa je ova ems suprotnog smera u odnosu na struju. Kalem je u ovom slučaju potrošač. Kada se sva energija kondenzatora prenese na magnetnu energiju kalema (kondenzator ispražnjen), tada indukovana ems samoindukcije preuzima ulogu izvora, te su e_L i struja i istog smera.Usled toga, u drugoj četvrtini periode indukovana ems samoindukcije e_L raste od nule do maksimalne vrednosti, dok struja opada sa maksimalne vrednosti na nulu. U ovom slučaju kondenzator se puni, tj. e_C raste od nule do maksimalne vrednosti, ali sa suprotnim polovima na pločama (e_C se suprostavlja prolasku struje, jer je kondenzator potrošač. Kada je kondenzator, ponovo, napunjen (magnetna energija preneta na energiju kondenzatora) on ponovo preuzima ulogu izvora, ali sa suprotnim smerom pražnjenja (struja menja svoj smer). Dakle, u trećoj četvrtini periode kondenzator se ponovo prazni i proces pražnjenja je isti kao u prvoj četvrtini, ali suprotnih smerova. Nakon toga, kada se kondenzator isprazni, kalem preuzima ulogu izvora, pa u četvrtoj četvrtini periode e_L i struja i imaju isti smer, gde ems samoindukcije raste ka maksimalnoj vrednosti, dok struja opada ka nuli.

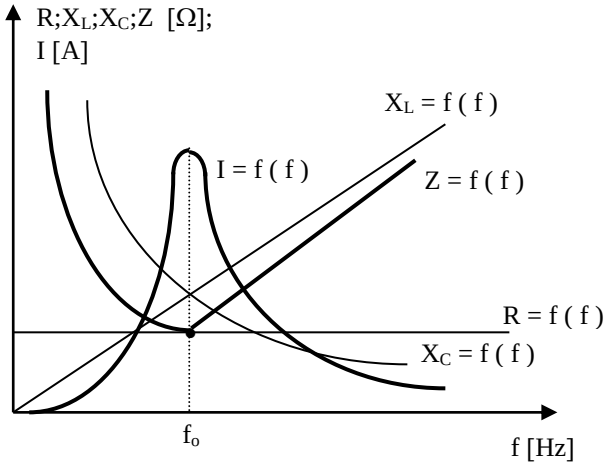
Očito je da će ovaj proces pretvaranja energije kondenzatora u magnetnu energiju kalema, i obrnuto, kod savršenih LC elemenata trajati beskonačno, što je i logično zbog zakona o održanju energije (energija je neuništiva). Ovo pretvaranje energije nastaje u istim vremenskim intervalima, a samim tim i struja će da oscilira pri vlastitoj, tj. rezonantnoj frekvenciji LC kola (f_o). Ovakve oscilacije se nazivaju **slobodne oscilacije** a frekvencija oscilovanja određuje se navedenim Tomsonovim obrascem.

Kod realnih oscilatornih kola (kola koja sadrže i otpornik R) javlja se i toplotna energija (I^2Rt) usled čega energije kalema i kondenzatora se postepeno (prigušeno) pretvore u toplotnu energiju. Zbog toga se ovakve oscilacije nazivaju **prigušene oscilacije**.

Iz svega navedenog se može zaključiti da pri rezonansi izvor daje nepovratno energiju samo termogenim otpornicima, dok kod reaktivnih otpornika nema nikakve razmene energija između izvora i ovih otpornika.

7.1.1. KARAKTERISTIČNE KRIVE KOD REZONANTNOG KOLA

Na slici 45 je dat grafički dijagram koji predstavlja zavisnost R; X_L; X_C; Z i I u odnosu na frekvenciju f.



Sl.45.

Iz karakteristike, prema slici, se vidi da će impedansa kola da se smanjuje od beskonačne vrednosti ka Z_o ($Z_o = R$) sa porastom frekvencije od nule do rezonantne frekvencije f_o. Usled toga struja raste od nule do maksimalne vrednosti I_o (rezonantna struja). Daljim povećanjem frekvencije od f_o do beskonačnosti raste i impedansa od Z_o ka beskonačnoj vrednosti (raste reaktansa ka beskonačnosti). Struja će u ovom slučaju da opada sa I_o ka nuli.

Ako je rezonansa nastupila kod RLC kola, tada će u kolu doći do tzv. prigušenih oscilacija (napon izvora isključen). Ako je napon izvora uključen tada će doći do razmene energije između izvora i otpornika R (dakle toplotne energije). Ovu toplotnu energiju stalno nadoknađuje izvor svojom električnom energijom. Ako se izvor odstrani, zbog kalema (magnetne energije) i kondenzatora (elektrostatičke energije) doći će do uzajamnog pretvaranja energija. Ovo pretvaranje će trajati izvesno vreme u kojem će se obe ove energije da pretvore u toplotnu, nakon čega je u kolu struja pala na nulu (prigušeno oscilovanje).

Ako je oscilovanje energija nastalo kod savršenih LC elemenata (R = 0), tada će oscilacije trajati beskonačno, jer se energija ne gubi (smenjuje se magnetna sa elektrostatičkom). U ovom slučaju kalem i kondenzator naizmenično preuzimaju uloge kako izvora tako i potrošača. Prema Tomsonovom obrascu, do rezonanse dolazi kada je: $\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Ukupna impedansa kola (potrošača) je ustvari jednaka otporu kalema (kada je on potrošač) odnosno otporu kondenzatora (kada je on potrošač), te je:

$$Z_o = \omega_o L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L \Rightarrow \qquad \boxed{Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Ovaj izraz predstavlja impedansu oscilatornog kola, koja se još naziva **karakterističnom impedansom kola**.

7.1.2. FAKTOR DOBROTE REZONANTNOG KOLA I FAKTOR PRIGUŠENJA

Kod rezonantnih kola impedansa kola je vrlo mala. Što je ta impedansa manja, odnosno što je termogeni otpornik kola manji (Z = R) kolo je bolje, a ujedno su reaktivni naponi U_L i U_C veći ($U_L = U_C = I\omega L = I/\omega C$). Obično se kod ovih kola i ne stavlja termogena otpornost, jer se ona nalazi u kalemu i kondenzatoru. Kako se na otporniku R javlja toplota koja u stvari pretstavlja gubitak energije (toplota je nepovratna) logično je da će i ovi gubici biti manji što je otpornost R, samim tim I rezonantno kolo biti bolje.

Faktor dobrote rezonantnog kola, koji se obeležava sa **Q**, predstavlja odnos između jednog od reaktivnih napona (U_L ili U_C) i priključenog napona.

Dakle,

$$\mathbf{Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}}$$

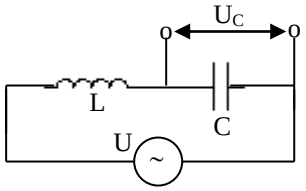
Umesto navedene relacije, iz koje se daje definicija faktora dobrote, on se može odrediti i iz sledećih jednačina:

$$\mathbf{Q = \frac{I\omega_o L}{IR} = \frac{I/\omega_o C}{IR} \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R\omega_o C}}$$

Pošto su gubici kod kondenzatora mnogo manji od gubitaka kod kalema (oko 100 puta) uglavnom se govori o faktoru dobrote kalema umesto celog rezonantnog kola.

Kod običnih rezonantnih kola (obični kalem) faktor dobrote iznosi oko nekoliko desetina ili stotina, dok kod specijalnih kola (specijalno izvedeni kalemi – velika induktivnost) faktor dobrote dostiže vrednost i do nekoliko hiljada. Faktor dobrote nema jedinicu, jer je to realan broj koji govori o odnosu dveju veličina istih jedinica.

Rezonantno kolo, osim ranije spomenutih primena, može se koristiti i kao naponski pojačavač, što je prikazano na slici 46.



Sl.46.

Kako je $Q = U_C/U \Rightarrow U_C = Q \cdot U$, pa je napon na kondenzatoru pojačan za Q puta. Ovo se koristi kod antena. Na antenu se dovede napon U (između antene i mase). U anteni je ugrađen LC element, pa se na kalemu indukuje ems samoindukcije. Zbog rezonanse između kalema i kondenzatora, nevezano na izvor, dolazi do oscilatornog kola, samim tim na kalemu i kondenzatoru nastaje pojačani napon (jači signal) za vrednost faktora dobrote Q. Ovaj pojačani napon se dalje vodi na pojačavač.

Faktor prigušenja d je recipročna vrednost faktoru dobrote, pa je:

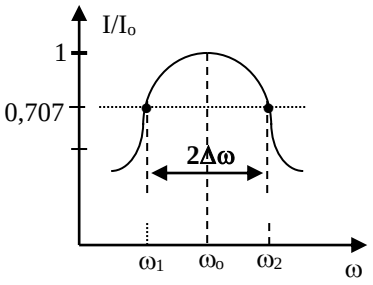
$$\mathbf{d = \frac{1}{Q}}$$

7.1.3. PROPUSNI OPSEG REZONANTNOG KOLA

Propusni opseg rezonantnog kola je ukupni spektar učestanosti oko rezonantne (od ω_1 do ω_2 prema sl.47) pri kojima struja kroz kolo nije manja od $0{,}707 \cdot I_o$ (ili $I_o / \sqrt{2}$), gde je I_o struja kroz kolo pri kojem nastaje rezonansa (najveća vrednost struje). Kako u propusnom opsegu struja može maksimalno da opadne za $\sqrt{2}$ puta, sledi da snaga u propusnom opsegu može da padne maksimalno na polovinu u odnosu na maksimalnu vrednost ($P = I^2R$). Ovaj odnos snaga (1:2) je i uzeta kao parametar prema kojem se odabira propusni opseg.

Prema tome, propusni opseg je jednak:

$$\mathbf{2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$$



Sl.47.

Na slici 47 vidi se da je propusni opseg veći, tj. kriva šira ukoliko je faktor dobrote manji i obrnuto. Ovo govori da između širine propusnog opsega i faktora dobrote rezonantnog kola postoji uska povezanost. Odnos između propusnog opsega i rezonantne frekvencije je obrnuto proporcionalan sa faktorom dobrote, pa je:

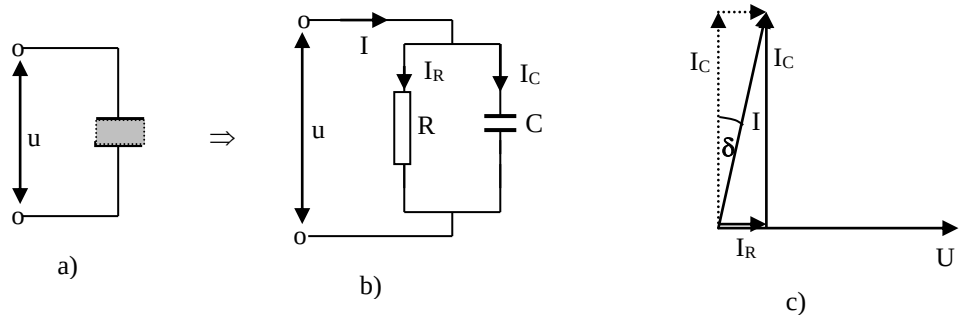
$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{1}{Q}$$

Ukoliko je faktor dobrote kola veći, propusni opseg je manji pa se može reći da je kolo selektivnije, tj. vrši bolje razdvajanje (manji uticaj signala izvan ovog opsega).

7.1.4. TANGENS GUBITAK

Kod visokih frekvencija u dielektrikumu kondenzatora gubici postaju znatno veći, samim tim oni utiču na ekvivalentnu otpornost rezonantnog kola, kao I na faktor dobrote kola. Usled naizmeničnog napona polarizacija dielektrika vrši se zavisno sa frekvencijom naizmeničnog napona, tj. sa naizmeničnom promenom smera. Da bi se obavila polaruzacija dielektrika treba da se utroši određeni iznos energije. Ovaj iznos energije predstavlja gubitak (gubitak energije u dielektrikumu). Sa porastom frekvencije te promene smera polarizacije su brže, pa je gubitak energije veći. Ako je dielektrikum od vakuuma, nema polarizacije (nema materije) te nema ni gubitaka.

U odnosu na priključeni napon, kroz idealni kondenzator (R = 0) protiče struja koja mu prednjači za $\pi/2$. . Kod realnog kondenzatora pored ove struje protiče i struja koja pokriva gubitke u dielektrikumu. Kako su to gubici koji se javljaju u vidu toplote (Džulovi gubici), tada je ova struja gubitaka u fazi sa naponom kondenzatora. Zbog togao se kondenzator može šematski predstaviti kao paralelno vezan idealni kondenzator sa otpornikom velike otpornosti (zbog male struje gubitaka – aktivna komponenta), kao što je prikazano na slici 48 b.



Sl.48. a) kondenzator sa gubicima, b) ekvivalentna šema kondenzatora, c) fazorski dijagram

Što je struja gubitaka manja, kondenzator je bolji, pa se **faktor dobrote kondenzatora** definiše kao odnos između struje gubitaka (I_R), tj. struje otpornika R i struje idealnog kondenzatora (I_C). Odnos I_R/I_C predstavlja, prema fazorskom dijagramu na slici 48 c, tangens ugla za koji struja realnog kondenzatora odstupa od struje idealnog kondenzatora.

Dakle,

$$\mathbf{tg\delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{U}{R}}{\frac{U}{X_C}} = \frac{X_C}{R} \Rightarrow}$$

$$\boxed{\mathbf{tg\delta = \frac{1}{R\omega C}}}$$

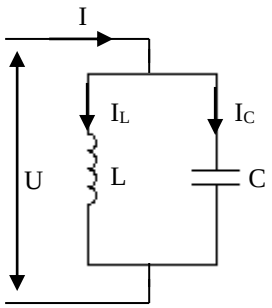
Tansens gubitaka, tg δ je mera za dobrotu dielektrika.

7.2. ANTIREZONANTNO KOLO

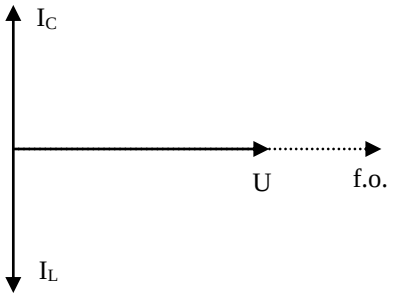
Ako u kolu imamo paralelnu vezu idealnog kalema i idealnog kondenzatora, kao na slici 49, tada će ekvivalentna admitansa kola biti jednaka:

$$\underline{Y} = j\,(B_C - B_L) = 1 / \underline{Z}\,;\ \text{gde je}\ B_L = 1 / X_L = 1 / \omega L,\ \text{odnosno}\ B_C = 1 / X_C = \omega C.$$

U slučaju da su otpornosti, samim tim i provodnosti po granama jednake, sledi da će i struje biti jednake, te nastaje fazorski dijagram koji je predstavljen na slici 50.



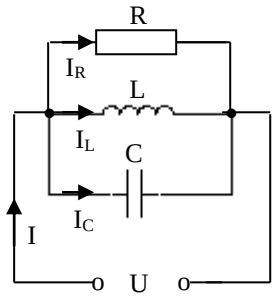
Sl.49.



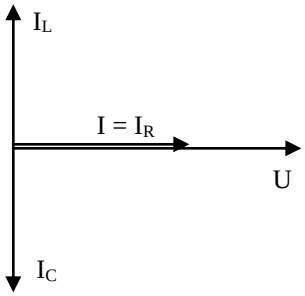
Sl.50.

Uz pretpostavku da je $\omega L = 1 / \omega C$ ($B_L = B_C \Rightarrow I_L = I_C$) ekvivalentna provodnost celog kola je jednaka nuli, odnosno impedansa kola je beskonačna. Usled toga ukupna struja u kolu je jednaka nuli. Kako je ova pojava sasvim suprotna od rezonanse (kada je struja bila najveća) ona se i naziva **antirezonansa**. Umesto antirezonanse koristi se i termin **zaptivno kolo,** jer kroz ovo kolo ne protiče struja (ukupna struja). Kako su prisutne struje I_L i I_C sledi da će unutar sistema LC teći struja koja je rezultat smenjivanja energija kalema i kondenzatora. To znači da će u ovom delu kola doći do oscilovanja energija (struje). Ovo se odnosi samo na idealni slučaj, kod kojeg nema gubitka energije (toplotne energije), već se magnetna energija kalema i energija kondenzatora međusobno pretvaraju jedna u drugu (kao i kod rezonantnih kola), što nije slučaj kod realnih kola.

Pretpostavimo da pored idealnog kondenzatora i kalema imamo i otpornik R u paralelnoj vezi, kao na sl.51. Ako je $B_L = B_C \Rightarrow \underline{Y} = G = 1/R \Rightarrow \underline{Z} = R \Rightarrow I = I_R = U \cdot G = U / R$.
Fazorski dijagram za kolo prema slici 51 je dat na slici 52.



Sl.51.



Sl.52.

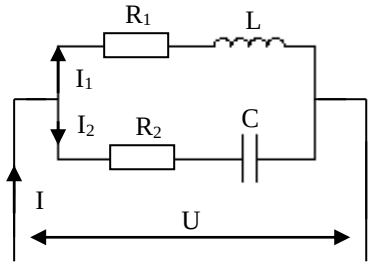
Vidimo da je kod paralelne veze idealnih RLC elemenata ukupna struja jednaka struji I_R, koja je u fazi sa naponom. Ovo se događa kada je ispunjen isti uslov kao i kod redne (naponske)rezonanse, tj. kada je:

$$\mathbf{B_L = B_C}\ \text{ odnosno }\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\omega L}} = \mathbf{\omega C}\,,$$

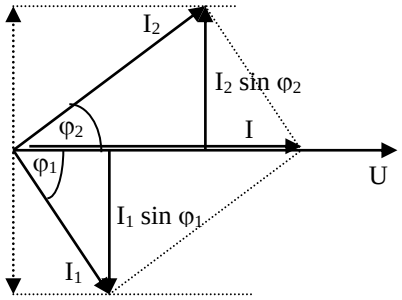
te se zbog toga za ovaj slučaj kaže da je došlo do **strujne (paralelne) rezonanse (tj. antirezonanse)**.

Dakle, strujna rezonansa je isto što i antirezonansa, jer je u pitanju različit naziv za istu pojavu. Osnovno je, za razliku od naponske rezonanse (koja se često zove samo rezonansom) što će kod antirezonanse struja u kolu biti najmanja (povećava se impedansa).

REALNO ANTIREZONANTNO KOLO



Sl.53.



Sl.54.

Za realno antirezonansno kolo prema slici 53 odgovara fazorski dijagram na slici 54. Kako je kod antirezonanse , kod realnog kola, struja u fazi sa naponom (vidi dijagram 52) sledi da će se to dogoditi u onom slučaju kada se reaktivne komponente struja izjednače. U tom slučaju ostaju samo aktivne komponente koje su u fazi sa naponom. To se može jednostavno dokazati kompleksnim predstavljanjem struje, gde je:

$\underline{I}_1 = I_1\cos\varphi_1 - j\, I_1 \sin\varphi_1$, odnosno $\underline{I}_2 = I_2 \cos\varphi_2 + j\, I_2 \sin\varphi_2$.

Kako je $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2 + j\,(I_2 \sin\varphi_2 - I_1 \sin\varphi_1)$.

Ako je $I_1 \sin\varphi_1 = I_2 \sin\varphi_2$, otpada imaginarni deo ukupne struje, te ostaje samo realni deo koji je ujedno u fazi sa naponom, što znači došlo je do strujne rezonanse (antirezonanse).

Uslov antirezonanse kod realnog kola, prema slici 53 je:

$$I_1 \sin\varphi_1 = I_2 \sin\varphi_2 \;\Rightarrow\; \frac{U}{Z_1}\cdot\frac{\omega L}{Z_1} = \frac{U}{Z_2}\cdot\frac{\frac{1}{\omega C}}{Z_2} \;\Rightarrow\; \frac{\omega L}{Z_1^{\,2}} = \frac{1}{\omega C Z_2^{\,2}}$$

Rešenjem ove jednačine, dobije se kružna učestanost pri kojoj nastaje antirezonansa, koja je jednaka:

$$\boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{R_1^{\,2} - \frac{L}{C}}{R_2^{\,2} - \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{R_1^{\,2} - Z_o^{\,2}}{R_2^{\,2} - Z_o^{\,2}}}}\,,$$

gde je $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$ karakteristična impedansa kod idealnog oscilatornog kola.

Jednačinu za kružnu frekvenciju pri kojoj dolazi do antirezonanse možemo izvesti preko admitanse. To se izvodi tako što se imaginarni deo admitanse (jB) izjednači sa nulom, jer su samo u tome slučaju napon i struja u fazi, tj. došlo je do antirezonanse.

Pojedinačne admitanse po granama za sliku 53 su:

$$\underline{Y}_1 = G_1 - jB_L = \frac{R_1}{Z_1^{\,2}} - j\frac{\omega L}{Z_1^{\,2}} \quad \text{i} \quad \underline{Y}_2 = G_2 + jB_C = \frac{R_2}{Z_2^{\,2}} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{Z_2^{\,2}}$$

Ukupna admitansa kola iznosi:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{R_1}{Z_1^{\,2}} + \frac{R_2}{Z_2^{\,2}} + j\left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{Z_2^{\,2}} - \frac{\omega L}{Z_1^{\,2}}\right)$$

Antirezonansa nastaje kada je $\varphi = 0$ a to će nastati kada je susceptansa jednaka nuli, tj. kada je:

$$\frac{1}{\omega C Z_2^{\,2}} = \frac{\omega L}{Z_1^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{R_1^{\,2} - L/C}{R_2^{\,2} - L/C}}$$

Pojavom antirezonanse struja iz izvora je minimalna i u fazi je sa naponom izvora (impedansa je vrlo velika).

Iz izraza za kružnu frekvenciju pri kojoj nastaje antirezonansa mogu se javiti sledeća rešenja:

1. Ako je $R_1 = R_2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$, tj. strujna rezonansa nastaje pri istoj frekvenciji kao i naponska.;

2. $R_1 = R_2 = 0$, isti je slučaj kao i pod 1 s tom razlikom da je struja izvora jednaka nuli.

3. $\sqrt{\frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C}} > 0$ (realan)

a) $R_1^2 > L/C$ i $R_2^2 > L/C$; b) $R_1^2 < L/C$ i $R_2^2 < L/C$ ..... u ovim slučajevima dolazi do antirezonanse.

4. $\sqrt{\frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C}} < 0$ (imaginarno rešenje)

a) $R_1^2 > L/C$ i $R_2^2 < L/C$; b) $R_1^2 < L/C$ i $R_2^2 > L/C$ .... nema rešenja za ω_o a samim tim ni antirezonanse.

5. $R_1 = R_2 = \sqrt{L/C}$. U ovom slučaju antirezonansa ne zavisi od frekvencije pa se ona javlja kod svih frekvencija tj. nepredviđeno. U LC elementima oscilira struja, dok je struja izvora jednaka nuli.

U praksi je vrlo često termogeni otpor kalema (R_1) mnogo veći od termogenog otpora kondenzatora (R_2), pa se u tom slučaju otpornik R_2 može zanemariti. U tom slučaju sledi ($R_1 = R$):

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{R}{Z_1^2} - j\frac{\omega L}{Z_1^2} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{Z_2^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

Uslov antirezonanse je kada je imaginarni deo jednak nuli, te je:

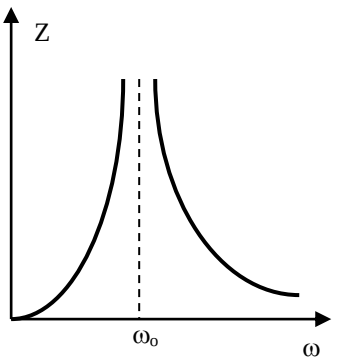
$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow \frac{L}{C} = R^2 + \omega^2 L^2$$

Dakle, kada dođe do antirezonanse admitansa ima samo realni deo (konduktansu), pa sledi:

$$\underline{Y}_o = Y_o = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{\frac{L}{C}} = \frac{RC}{L} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Z_o = \frac{1}{Y_o} = \frac{L}{RC}}$$

Ukupna struja kola (antirezonantna struja) iznosi:

$$\boxed{\boldsymbol{I_o = U \cdot Y_o = \frac{U}{Z_o}}}$$



Sl.55.

Iz izraza za impedansu ($Z_o = L/RC$) se vidi da će impedansa biti veća što je otpornost R manja. Ako je $R = 0$ impedansa postaje beskonačna, samim tim i antirezonantna struja je jednaka nuli. To znači da u ovom slučaju LC kolo ne propušta ukupnu struju kola. Ova pojava je iskorišćena kod električnih filtera, kao i u prijemnoj tehnici, gde je pri antirezonantnoj frekvenciji impedansa maksimalna (kod savršenih elemenata beskonačna), a samim tim struja vrlo mala (kod savršenih elemenata jednaka nuli). Na ovaj način se kroz kolo propušta struja samo određene frekvencije. Na slici 55 je dat grafički dijagram na kojem se vidi zavisnost impedanse kružne frekvencije.

ZADACI:

7.1.1. Redno RLC kolo priključeno je na napon U = 100 V učestanosti f = 50 Hz. Ako su poznati parametri kola R = 4 Ω i L = 0,5 H, a kapacitet kondenzatora C se može menjati. Odrediti:

a) kapacitet kondenzatora u slučaju kada dođe do rezonanse (redna rezonansa) i
b) napon na kalemu i kondenzatoru pri uslovu pod tačkom a).

7.1.2. U rednom kolu su na izvor efektivnog napona U = 100 V vezani savršeni kalem induktivnosti L = 5 mH, termogeni otpornik otpornosti R = 10 Ω i dva kondenzatora. Kapacitet jednog od kondenzatora je C_1 = 100 μF. Odrediti kapacitet drugog kondenzatora ako je u kolu struja dostigla svoju maksimalnu vrednost pri frekvenciji od f_o = 300 Hz. Kolika je efektivna vrednost te struje?

7.1.3. Redno RLC kolo priključeno je na napon efektivne vrednosti U = 200 V. Na frekvenciji f_o = 50 Hz javlja se rezonansa i u tom slučaju efektivna vrednost struje u kolu iznosi I_o = 0,314 A, a efektivna vrednost napona na krajevima kondenzatora U_{Co} = 300 V. Odrediti vrednosti parametara RL i C.

7.1.4. Kalem induktivnosti L i termogene otpornosti R_L= 50 Ω vezan je redno sa kondenzatorom kapaciteta C. Pri merenju impedanse ove veze utvrđeno je da je ona najmanja na frekvenciji f_o = 1 kHz. Naći induktivnost kalema i kapacitet kondenzatora ako je pri frekvenciji f = 4 kHz impedansa kola bila jednaka Z = 130Ω.

7.1.5. U kolu naizmenične satruje frekvencije f = 100 Hz redno su vezani termogeni otpornik R = 10 Ω, savršeni kalem induktivnosti L = 0,5 H i kondenzator čija se kapacitivnost može menjati promenom rastojanja između ploča kondenzatora. Ako je rastojanje među pločama 1 mm, kapacitet kondenzatora iznosi C = 20 μF. Za koliko treba promeniti rastojanje među pločama da bi struja u kolu bila maksimalna ? Koliki je odnos između tih struja (pre i posle promene rastojanja) ?

7.1.6. U rednom LC kolu (R_L = 0) induktivnost je L = 10 mH, a kapacitivnost C = 1 μF. Kolika će biti impedansa kola pri frekvenciji naizmenične struje koja je dva puta veća od frekvencije pri kojoj bi došlo do rezonanse?

7.1.7. Na rednu vezu RLC priključen je napon u = 2 sin ωt [V]. Odrediti trenutnu vrednost napona na kondenzatoru pri rezonantnoj frekvencijia, koja iznosi f_o = 100 kHz, ako je termogeni otpornik R = 3 Ω, a induktivnost savršenog kalema L = 1 mH.

7.1.8. U kolu su redno vezani kalem termogene otpornosti R_L = 20 Ω i induktivnosti L = $169 \cdot 10^{-3}$ H i kondenzator kapaciteta C = 0,15 μF.

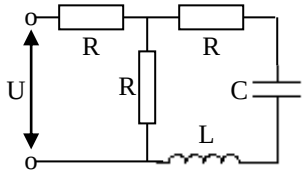
a) Na kojoj frekvenciji će doći do rezonanse?
b) Koliki sme pri rezonansi da bude napon izvora ako kondenzator može da izdrži maksimalni napon od U_c = 2000 V?
c) Kolika je jačina struje koja protiče kroz kolo pri naponu izvora izračunat pod b) i rezonantnoj frekvenciji?
d) Koliki je napon na krajevima kalema pri rezonansi (kalem sadrži i termogenu otpornost R_L)?

7.1.9. Redno RLC kolo sa podacima R = 10 Ω, L = 20 mH i C = 507,2 μF spoeno je na napon U = 220 V. Pri kojoj frekvenciji će doći do rezonanse? Kolika je struja, a koliki naponi na kalemu i kondenzatoru pri rezonantnoj frekvenciji ?

7.1.10. Odrediti najveću struju u rednom RLC kolu ako je U = 10 V, R = 20 Ω, L = 300 mH, i C = 100 μF. Pri kojoj učestanosti se to javlja ?

7.1.11. Kod redne veze RLC odrediti R, L i I tako da napon na kalemu pri rezonantnoj frekvenciji bude dva puta veći od priključenog napona.
Brojni podaci: C = 20 μF; U = 200 V i f_o = 50 Hz.

7.1.12.



Sl.7.1.12.

Za kolo na slici 7.1.12. odrediti L i C i napon na kondenzatoru ako je u kolu došlo do rezonanse.
Brojni podaci: R = 20 Ω; X_L = 1 Ω; ω = 100 rad/s i U = 300 V.

7.1.13. U kolu redne veze RLC došlo je do rezonanse. Odrediti vrednost otpora R ako je L = 10 mH, C = 20 μF, U = 200 V i U_L = 5 000 V.

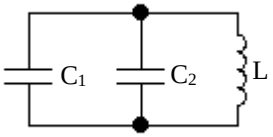
7.1.14. Za rednu vezu RLC odrediti kapacitet kondenzatora C tako da u kolu nastane rezonansa. Kolika će biti u tom slučaju struja u kolu ?
Brojni podaci: U = 200 V; L = 400 mH; R = 20 Ω i X_L = 40 Ω.

7.1.15. Za rednu RLC vezu naći odnos struje pri rezonantnoj frekvenciji i frekvenciji koja je četiri puta veća od rezonantne, ako je R = 10 Ω, L = 10 mH i C = 100 μF.

7.1.16. Koliki je odnos frekvencija pri rezonansi i frekvencije kada je struja $\sqrt{5}$ puta manja od rezonantne struje ako je R = 10 Ω, L = 2 mH i C = 20 μF.

7.1.17. Odrediti učestalost sopstvenih oscilacija i karakterističnu impedansu oscilatornog kola čiji su parametri: C = 5 μF i L = 5 mH.

7.1.18.



Sl.7.1.18.

Odrediti periodu i učestalost slobodnih oscilacija oscilatornog kola prikazanog na slici 7.1.18, ako su poznati parametri:
C_1 = 50 pF; C_2 = 10 pF i L = 10 mH.

7.1.19. Rezonantna učestalost rednog oscilatornog kola je f_o = 1 000 kHz, a faktor dobrote kola Q = 16. Odrediti vrednosti elemenata ovog oscilatornog kola ako je vrednost karakteristične impedanse Z_o = 3 kΩ.

7.1.20. Oscilatorno kolo je sastavljeno od kalema induktivnosti L = 0,2 H , kondenzatora C = 5 μF i otpora otpornosti R = 10 Ω. Odrediti učestalost pri kojoj dolazi do rezonanse i faktor dobrote oscilatornog kola.

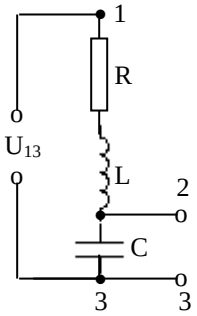
7.1.21. Izračunati kapacitet kondenzatora oscilatornog kola ako kalem tog oscilatornog kola ima induktivnost L = 100 mH, a granične učestalosti propusnog opsega su:
donja f_1 = 1 000 kHz a gornja f_2 = 2 000 kHz.

7.1.22. Oscilatorno kolo kojeg čine kalem induktivnosti L = 100 mH i kondenzator kapaciteta C = 50 pF ima širina propusnog opsega $2\Delta\omega$ = 115 kHz. Kolike je rezonantna i granična učestalost ovog oscilatornog kola ?

7.1.23. Parametri jednog oscilatornog kola su: C = 300 pF, L = 300 μH i R = 10 Ω. Kolika je širina propusnog opsega ovog oscilatornog kola ?

7.1.24. Odrediti vrednost termogenog otpornika R i induktivnost L u rednoj vezi RLC u kojoj je vrednost kapaciteta C = 20 μF, ako je pri rezonantnoj frekvenciji f_o = 50 Hz napon na reaktivnom otporniku dva puta veći od ukupnog napona.

7.1.25.



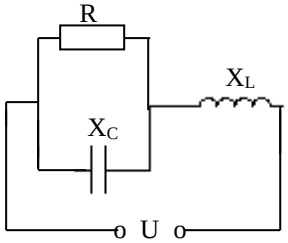
Sl.7.1.25.

Data je redna veza RLC, prema slici 7.1.25, koja se koristi kao delitelj napona. Dato je $R = 1\ \Omega$, $L = 2$ mH i $C = 1$ nF. Odrediti područje frekvencije za koje je pad napona na priključnicama 2–3 U_{23} manji od napona U_{13} . Treba odrediti da li su frekvencije više ili niže od rezonantne frekvencije f_o i kolika je f_o ?

7.1.26. U nekom rednom spoju RLC, čija je učestanost $f_o = 1$ MHz, pad napona na otporu $R = 0{,}1\ \Omega$ U_R odnosi se prema padovima napona U_L i U_C na induktivitetu odnosno kapacitetu u slučaju rezonanse kao 1:100 (faktor dobrote Q = 100). Koliki su L i C toga kola ?

7.1.27. Koliki sme biti termogeni otpornik rezonantnog kola da bi faktor dobrote kola bio Q = 100 ako je $L = 10\ \mu$H i $C = 160$ pF ? Kolika je frekvencija rezonanse f_o i koliki je napon U na stezaljkama toga kola ako kod rezonanse kolom teče struja $I_o = 1$ mA?

7.1.28.

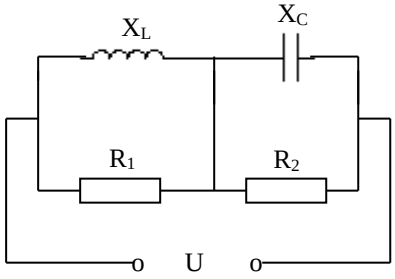


Sl.7.1.28.

U kolu prema slici 7.1.28. treba odrediti koliki mora da bude induktivni otpor X_L da bi kolo bilo u rezonansi ($\varphi = 0$).

Brojni podaci: $R = 200\ \Omega$ i $X_C = 400\ \Omega$.

7.1.29.



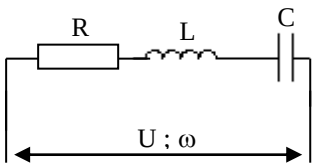
Sl.7.1.29.

Dato je kolo prema slici 7.1.29.
Poznato je: $L = 1$ mH, $R_1 = 500\ \Omega$ i $C = 2$ nF.
Odrediti otpornost R_2 ako je u kolu nastala rezonansa pri kružnoj učestanosti $\omega_o = 10^6$ rad/s.
Koliki je rezonantni otpor kola Z_o ?

7.1.30. Dato je idealno rezonantno kolo koje sadrži kalem induktivnosti $L = 0{,}1$ H i kondenzator kapacitivnosti $C = 0{,}4\ \mu$F.

a) Za koliko će se promeniti rezonantna učestanost ako se kondenzatoru paralelno priključi termogeni otpornik otpornosti $R = 1\ k\Omega$?
b) Za koje vrednosti otpornosti priključenog termogenog otpornika kolo ne može da se dovede u rezonansu ?

7.1.31.



Sl.7.1.31.

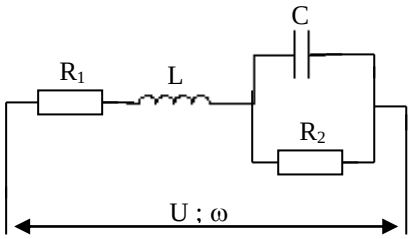
Generator prostoperiodičnog napona efektivne vrednosti U i kružne učestanosti ω koja može da se menja, čini redno RLC kolo, kao na slici 7.1.31. Odrediti:

a) izraz za kružnu učestanost pri kojoj dolazi do rezonanse i
b) izraz za energiju magnetnog polja kalema i energiju električnog polja kondenzatora pri rezonansi i grafički ih predstaviti u funkciji vremena.

7.1.32. Oscilatorno RLC kolo, kao na slici 7.1.31 (predhodni zadatak), ima sledeće podatke: L = 0,2 mH, C = 300 pF i propusni opseg $2\Delta f_o$ = 14 kHz. Odrediti:

a) faktor dobrote kola,
b) mimimalnu impedansu kola,
c) impedansu kola na učestanosti koja je za 30 kHz veća od rezonantne učestanosti,
d) koliko je puta rezonantna struja veća od struje na učestanosti koja je za 30 kHz veća od rezonantne učestanosti ?

7.1.33.



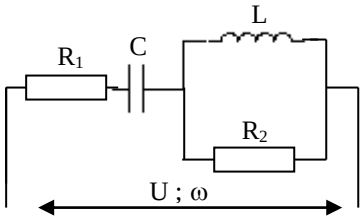
Sl.7.1.33.

U kolu prema slici 7.1.33. odrediti izraze za:

a) kružnu učestanost pri rezonansi kola i
b) struju u kalemu pri rezonantnoj učestanosti ω_o

Brojni podaci: R_1 = 100 Ω; R_2 = 200 Ω; L = 2 mH, C = 10 μF; U = 100 V.

7.1.34.



Sl.7.1.34.

Za kolo prema slici 7.1.34. odrediti:

a) Rezonantnu kružnu učestanost,
b) struju kondenzatora pri rezonansi.

Brojni podaci:
R_1 = 5 Ω; R_2 = 6 Ω; L = 300 μH; C = 250 μF i U = 50 V.

7.1.35. Redno RLC kolo je priključeno na napon U = 1 V. Ako je pri rezonansi (fazna rezonansa) napon na kondenzatoru U_C = 50 V, odrediti:

a) faktor dobrote kalema Q i struju kola I_o ako je karakteristična impedansa LC ćelije Z_C = 2,5 kΩ,
b) promenu faznog pomaka između napona napajanja i struje Δφ, ako je pri istoj frekvenciji napona izvora kapacitet kondenzatora povećan za 60%.

7.1.36. Redno RLC kolo priključeno je na naizmenični napon efektivne vrednosti U, promenljive učestanosti. Kada se učestanost izvora podesi na frekvenciju f_1 ili f_2 efektivna vrednost struje u kolu iznosi I′, a kada se podesi na rezonantnu učestanost, efektivna vrednost struje je I.

Odrediti vrednosti paramatara kola (R, L i C).

Brojni podaci: U = 200 V; f_1 = 50 Hz; f_2 = 100 Hz; I′ = 4 A; i I = 5 A.

7.1.37. Otpornik otpornosti R, kondenzator kapacitivnosti C i kalem nepoznate induktivnosti L vezani su redno i priključeni na naizmenični napon $u = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 90°)$ [V]. Odrediti:

a) nepoznatu induktivnost kalema L pri kojoj će efektivna vrednost struje u kolu biti maksimalna,
b) učestanost pri kojoj će efektivna vrednost struje u kolu opasti za 50% u odnosu na maksimalnu vrednost i
c) izraze za trenutne vrednosti struja u kolu za oba slučaja.

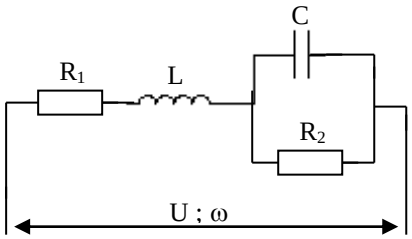
Brojni podaci: R = 10 Ω; C = 5 μF; ω = 10 000 rad/s.

7.1.38. Kalem otpornosti R_L i induktivnosti L i kondenzator kapaciteta C vezani su na red i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti U. Kada u kolu nastupi rezonansa, napon na krajevima kondenzatora ima efektivnu vrednost U_C.

Kolika je, u tom slučaju,efektivna vrednost napona na krajevima realnog kalema?

Brojni podaci: U = 40 V; U_C = 150 V.

7.1.39.



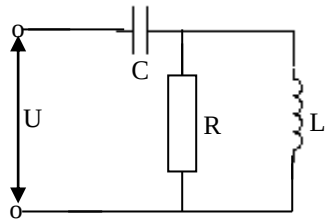
Sl.7.1.39.

U kolu prema slici 7.1.39. odrediti izraze za:

a) kružnu učestanost pri rezonansi kola i
b) struju otpornika R_1 pri rezonantnoj učestanosti ω_o

Brojni podaci: R_1 = 5 Ω; R_2 = 6 Ω; L = 0,3 mH, C = 250 μF; U = 50 V.

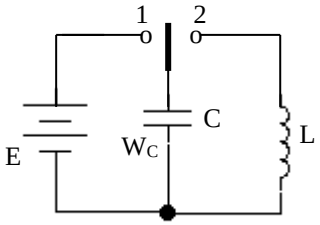
7.1.40.



Sl.7.1.40.

Ako je R = 10 Ω, L = 10 mH i ω = 1000 rad/s, prema slici 7.1.40, koliko iznosi kapacitet kondenzatora C da bi kolo bilo u rezonansi ?

7.1.41.



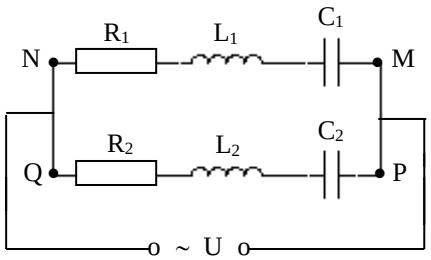
Sl.7.1.41.

Na predhodno napunjeni kondenzator (prekidač u položaju 1), prema slici 7.1.41, veže se kalem (prekidač prebaci u položej 2). Kroz LC kolo će da teče naizmenična struja, koja će da osciluje oko sopstvene kružne učestanosti. I = f (ω_o). Izvesti izraz za ovu kružnu učestanost (Tomsonov obrazac).

7.2.1. Radi ostvarenja antirezonanse (strujne rezonanse) treba kalemu čiji je termogeni otpor jednak R_L = 1 500 Ω a induktivnost L = 0,85 H paralelno priključiti kondenzator. Odrediti kapacitet toga kondenzatora ako je napon izvora na koji je ovo kolo priključeno 500 Hz.

7.2.2. Za paralelno oscilatorno kolo treba odrediti sve struje, otpornost kola pri antirezonansi ako je kolo priključeno na generator napona U.
Brojni podaci: U = 110 V; C = 400 pF; L = 400 mH i R_L = 10 Ω (otpor kalema).

7.2.3.

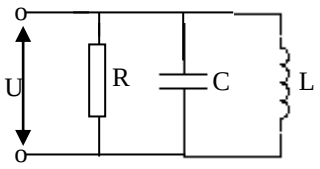


Sl.7.2.3.

Za dato kolo na slici 7.2.3. izračunati vrednosti elemenata L_1, C_1, L_2 kao i ukupnu induktivnost L i kapacitivnost C prikazanog oscilatornog kola.

Brojni podaci:
antirezonantna frekvencija kola f_o = 1 200 kHz;
rezonantna frekvencija grane MN f_{1o} = 1 750 kHz;
rezonantna frekvencija grane PQ f_{2o} = 650 kHz i
C = 220 pF.

7.2.4.



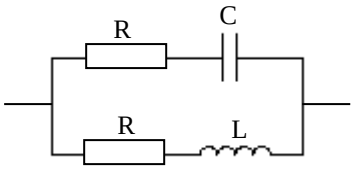
Sl.7.2.4.

Termogeni otpornik otpornosti **R** ,savršeni kalem induktivnosti **L** i kondenzator kapacitivnosti **C** vezani su paralelno i priključeni na napon izvora **U** frekvencije **f,** prema slici 7.2.4.. Odrediti:

a) kompleksnu admitansu kola,
b) rezonantnu frekvenciju kola,
c) izraz za određivanje ukupne jačine struje **I** za dato kolo,
d) izraz za jačinu struje kola ako dođe do antirezonanse.Kolika će biti ta struja (veća, manja ..) u odnosu na struju pod tačkom c?

7.2.5. U kolu kao u predhodnom zadatku efektivna vrednost napona na izvoru je U = 10 V. Odrediti efektivne vrednosti jačina struja I_R, I_L i kapacitet kondenzatora ako je efektivna vrednost ukupne struje I = 10 A. Otpornik ima otpornost R = 10 Ω, idealni kalem ima induktivnost L = 50 mH. Frekvencija izvora je f = 50 Hz.

7.2.6.

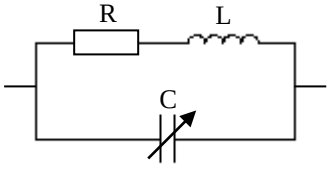


Sl.7.2.6.

Dokazati da je impedansa kola prikazanog na slici 7.2.6. nezavisna od frekvencije ako je $\mathbf{R^2 = \frac{L}{C}}$.

Kolika je vrednost impedanse kola ako su elementi kola jednaki: L = 20 mH i C = 100 μF.

7.2.7.

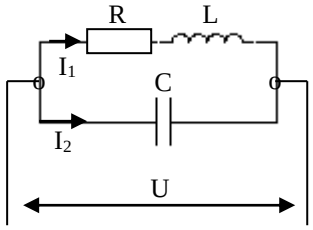


Sl.7.2.7..

Antirezonantno kolo, prema slici 7.2.7., sastoji se od kalema induktivnosti L = 200 μH i omske otpornosti R = 20 Ω i kondenzatora promenljive kapacitivnosti vezanog paralelno sa kalemom. Odrediti kapacitivnost kondenzatora ako je frekvencija napona na izvoru pri kojem je došlo do antirezonanse jednaka f_o = 1 000 kHz.

7.2.8. Na napon U = 10 V priključena je paralelna kombinacija termogenog otpornika R = 100 Ω, induktivnost L = 20 mH i kapacitivnost C = 20 nF. Treba odrediti ukupnu struju kola I_o u slučaju antirezonanse, frekvenciju f_o pri kojoj se javlja struja I_o i struje po granama I_R, I_L i I_C.

7.2.9.



Sl.7.2.9.

Kolika je otpornost paralelnog oscilatornog kola prema slici 7.2.9, ako je L = 10 μF, C = 250 pF i R = 2 Ω

7.2.10. Koliki je pad napona U_o , prema slici 7.2.9. (predhodni zadatak), na paralelnom antirezonantnom kolu u kojem je L = 100 μH, C = 500 pF i R = 1 Ω, ako kolo uzima iz mreže struju I_o = 0,2 mA ?

7.2.11. Kolo prema slici 7.2.9. (zadatak 7.2.9.) priključeno je na izvor prostoperiodičnog napona. Parametri kola su: R = 200 Ω, L = 250 μH i C = 1 nF. Odrediti:

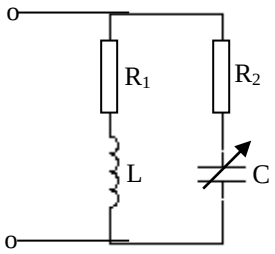
a) frekvenciju pri kojoj u kolu dolazi do strujne rezonanse (antirezonanse) f_o i admitansu kola u tom slučaju,
b) Za koju frekvenciju impedansa kola ima kapacitivni karakter ($X_C > X_L$)?
c) Za koju frekvenciju impedansa kola ima induktivni karakter?

7.2.12. Otpornik R = 100 kΩ induktivnost L =100 μH i kapacitivnost C = 200 pF vezani su paralelno. Odrediti:

a) kompleksnu admitansu kola pri kružnoj učestanosti $\omega = 1{,}5\cdot 10^6$ rad/s
b) rezonantnu frekvenciju kola,
c) faktor dobrote Q.

7.2.13. Paralelna veza otpornika otpornosti R = 10 Ω, kalema induktivnosti L = 100 μH i kondenzatora kapacitivnosti C = 100 μF priključena je na izvor napona $\underline{U} = 10\cdot e^{j0}$ [V] , promenljive frekvencije. Odrediti struje pojedinačnih grana kao i ukupnu struju za: a) $\omega = 0{,}8\omega_o$; b) $\omega = \omega_o$; c) $\omega = 1{,}25\omega_o$.

7.2.14.

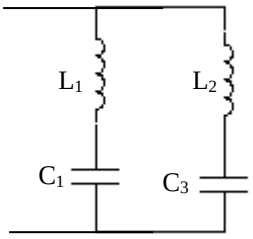


Sl.7.2.14.

Za kolo prema slici 7.2.14. poznati su parametri kola:
R_1 = 8 Ω , L = 1,2 mH i R_2 = 8,34 Ω.
Kondenzator je promenljivog kapaciteta.
Kolika će biti kapacitivnost kondenzatora da bi kolo bilo u strujnoj rezonansi (antirezonansi) ako je kružna frekvencija kolo ω_o = 5 000 rad/s?

7.2.15. Ako u predhodnom zadatku, slika 7.2.14, umesto promenljivog kapaciteta imamo promenljivu induktivnost, odrediti pri kojoj će induktivnosti doći do strujne rezonanse (antirezonanse).
Brojni podaci: R_1 = 2 Ω; R_2 = 5 Ω; C = 20 μF i ω_o = 5 000 rad/s.

7.2.16.



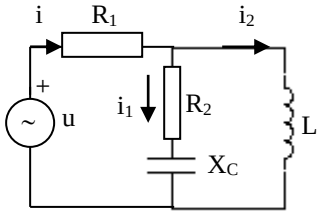
Sl.7.2.16.

Za kolo prikazano na slici 7.2.16. izračunati:

a) rezonantnu kružnu frekvenciju i
b) antirezonantnu kružnu frekvemciju.

Brojni podaci: L_1 = 1 H; L_2 = 2 H; C_1 = 1 μF i C_2 = 2 μF .

7.2.17.



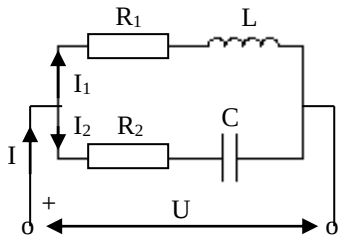
Sl.7.2.17.

U kolu prema slici 7.2.17. poznato je:
$u = 24\sqrt{2}\sin(2\,000\,t - 45°)$ V, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$ i $X_C = 2\ \Omega$.
Ako je kolo u antirezonansi (strujnoj rezonansi) odrediti induktivnost kalema L, sve struje u kolu u analitičkom izrazu (i, i_1 i i_2) i aktivnu snagu kola P.

7.2.18. Kalem otpornosti R i induktivnosti L i kondenzator nepoznatog kapaciteta C, vezani su paralelno i priključeni na naizmenični napon učestanosti f. Odrediti kapacitet C tako da ukupna struja kola bude u fazi sa priključenim naponom.
Brojni podaci: $R = 5\ \Omega$; $L = 100$ mH; $f = 50$ Hz.

7.2.19. Kalem otpornosti R_L i induktivnosti L i kondenzator kapacitivnosti C vezani su paralelno i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti U, početne faze ψ i promenljive učestanosti f. Odrediti:
a) učestanost f pri kojoj su napon U i ukupna struja I kola u fazi,
b) kompleksne izraze za struje po granama, kao i ukupnu struju kola.
c) Nacrtati fazorski dijagram struja u kolu.
Brojni podaci: $L = 1$ H; $C = 250$ nF; $R_L = 400\ \Omega$; $U = 100$ V; $\psi = 0$.

7.2.20.

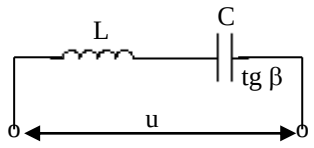


Sl.7.2.20.

Dva otpornika R_1 i R_2, kalem induktivnosti L i kondenzator kapaciteta C, vezani su prema slici 7.2.20. i priključeni na napon efektivne vrednosti U, promenljive učestanosti f. Odrediti:
a) učestanost pri kojoj nastupa antirezonansa,
b) kompleksne izraze za struje u kolu,
c) fazorski dijagram struja.

Brojni podaci: $R_1 = 200\ \Omega$; $R_2 = 300\ \Omega$; $L = 20$ mH; $C = 2\ \mu$F; $U = 100$ V.

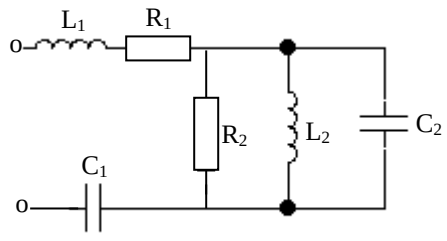
7.2.21.



Sl.7.2.21.

Redna veza kalema induktivnosti $L = 100$ mH i kondenzatora kapacitivnosti $C = 10\ \mu$F priključena je na naizmenični napon $u = 200\cos 10^3 t$ [V], prema slici 7.2.21.
Dielektrik kondenzatora je loš, tako da mu je $\operatorname{tg}\beta = 0{,}5$.
Odrediti sve napone, struje i snage na svim elementima kola i nacrtati potpuni fazorski dijagram napona i struja.

7.2.22.

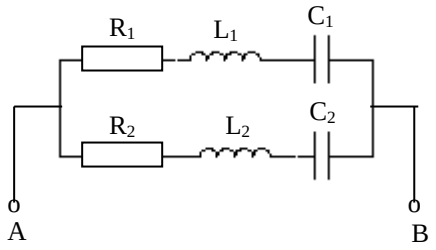


Sl.7.2.22.

Kolo, prikazano na slici 7.2.22, priključeno je na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 150$ V.
Odrediti:
a) sve struje i padove napona u kolu,
b) faktor dobrote kola (faktor Q),
c) Nacrtati potpuni fazorski dijagram napona i struja.

Brojni podaci:
$R_1 = X_{L1} = X_{C1} = 50\ \Omega$; $R_2 = X_{L2} = X_{C2} = 100\ \Omega$.

7.2.23.



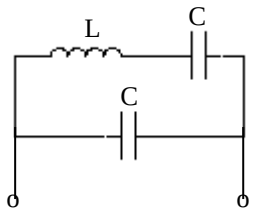
Sl.7.2.23.

Izračunati rezonantne i antirezonantne učestanosti za kolo prema slici 7.2.23.

Brojni podaci:

$R_1 = R_2 = 2{,}5\ \Omega$; $L_1 = 20$ mH; $L_2 = 30$ mH; $C_1 = 200$ pF; $C_2 = 300$ pF

7.2.24.

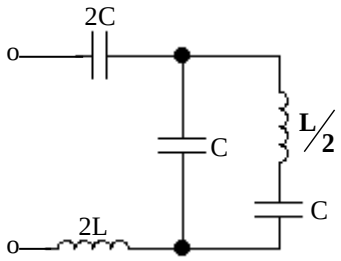


Sl.7.2.24.

Na kojim je kružnim učestanostima, prema slici 7.2.24:

a) impedansa jednaka nuli,
b) admitansa jednaka nuli ?

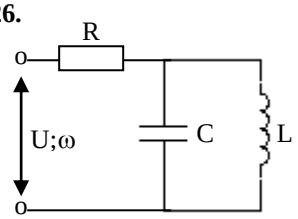
7.2.25.



Sl.7.2.25.

Odrediti sve kružne učestanosti pri kojima je ulazna (ukupna) admitansa kola prema slici 7.2.25 jednaka nuli.

7.2.26.

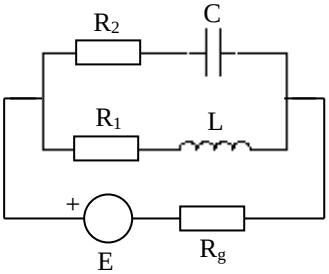


Sl.7.2.26.

Za kolo prikazano na slici 7.2.26. odrediti:

a) kružnu učestanost pri kojoj dolazi do antirezonanse
b) efektivne vrednosti struja po granama pri antirezonansi.

7.2.27.



Sl.7.2.27.

U kolu prikazanom na slici 7.2.27, poznato je:

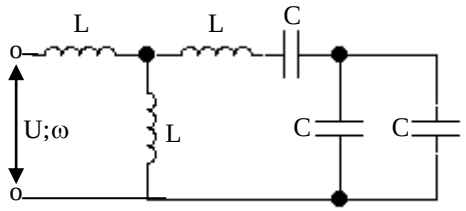
$E = 100$ V; $R_g = 50\ \Omega$; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 1\ \Omega$; i $L = 3\ \mu$H.

Učestanost pri kojoj nastupa antirezonansa u kolu je $f_o = 500$ kHz.

Odrediti:

a) nepoznatu kapacitivnost kondenzatora C,
b) aktivnu snagu koju generator daje kolu pri frekvenciji na kojoj je došlo do antirezonanse u kolu.

7.2.28.

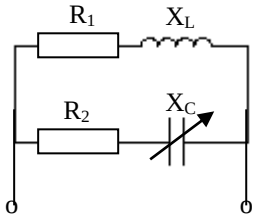


Sl.7.2.28.

U kolu prikazanom na slici 7.2.28. učestanost prostoperiodičnog napona se može menjati.
Odrediti:

a) Kružnu učestanost pri kojoj u kolu nastaje rezonansa (naponska rezonansa)
b) Kružnu učestanost pri kojoj u kolu nastaje antirezonansa (strujna rezonansa).

7.2.29.

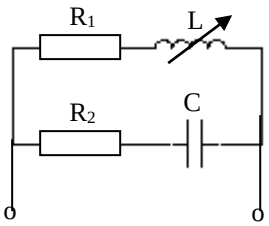


Sl.7.2.29.

Odrediti kapacitet kondenzatora C pod uslovom da se kolo prikazano na slici 7.2.29. nalazi u antirezonansi pri kružnoj učestanosti ω.

Brojni podaci:
$R_1 = 8\ \Omega$; $X_L = 6\ \Omega$; R_2 0 8,34 Ω; $\omega = 5\ 000$ rad/s.

7.2.30.

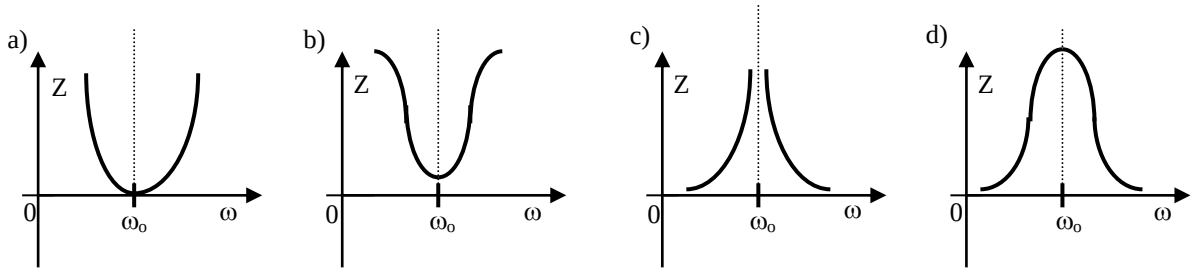


Sl.7.2.30.

Za kolo prikazano na slici 7.2.30, odrediti pri kojoj će induktivnosti L doći do antirezonanse (strujne rezonanse), ako je kružna frekvencija jednaka ω.

Brojni podaci:
$R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $X_C = 10\ \Omega$; $\omega = 5\ 000$ rad/s.

7.2.31. Koja kriva, prikazana na slici 7.2.31, predstavlja zavisnost impedanse paralelnog oscilatornog kola u funkciji kružne učestanosti ($Z = f(\omega)$), ako je aktivna otpornost jednaka nuli ($R = 0$). Tačan odgovor zaokružiti i prokomentarisati.



8. INDUKTIVNO SPREGNUTA KOLA

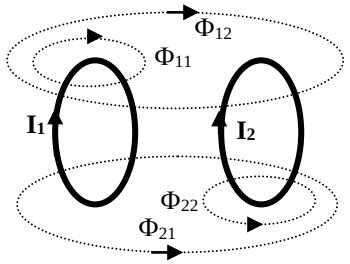
Dva kalema, u neposrednoj blizini, pored vlastite induktivnosti raspolažu i sa međusobnom induktivnošću. Kako je ova međusobna sprega ostvarena magnetnim poljem (međusobnom induktivnošću), za ovakvo kolo kažemo da je **induktivno spregnuto kolo**. To znači da je usled ove međusobne induktivnosti u svakom od ovih kalemova došlo do određene promene energije (povećava se ili se smanjuje).

8.1. KOEFICIJENT INDUKTIVNOSTI I MEĐUSOBNE INDUKTIVNOSTI

Induktivnost kalema je definisana količnikom sopstvenog fluksa i struje koji ga stvara.

Dale, $\mathbf{L = \frac{\Phi}{I}}$, odnosno $\mathbf{L = \frac{d\phi}{di}}$

Iz navedenih izraza fluks u kalemu je jednak: $\mathbf{\Phi = LI}$ (konstantan) ili $\mathbf{d\phi = Ldi}$ (promenljivi fluks).



Sl.56.

Ukupni fluksevi, kao što se vidi na sl.56, jednak je:

za prvu konturu : $\mathbf{\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{21} I_2}$,

a za drugu: $\mathbf{\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{12} I_1}$,

gde je:

- L_1I_1... fluks kojeg stvara prva kontura svojom strujom I_1,
- L_2I_2... fluks kojeg stvara druga kontura svojom strujom I_2,
- $L_{12}I_1$... deo fluksa prve konture koji prolazi kroz drugu konturu, a stvara ga struja prve konture,
- $L_{21}I_2$... deo fluksa druge konture koji prolazi kroz prvu konturu, a stvara ga struja druge konture.

Uzajamne induktivnosti, koja se još nazivaju i **koeficijentom uzajamne induktivnosti,** su međusobno jednake, pa sledi:

$$L_{12} = L_{21} = L_m = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \quad \text{odnosno} \quad L_{12} = L_{21} = L_m = \frac{d\phi_{12}}{di_1} = \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad \text{(dinamička induktivnost)}.$$

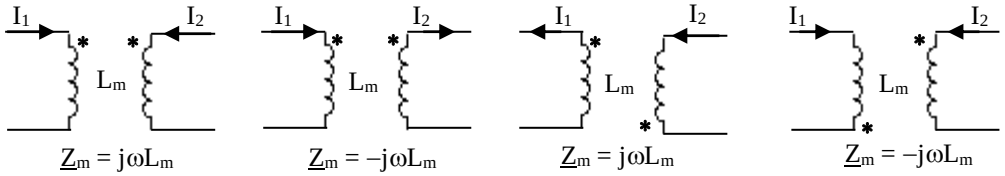
Uzajamna induktivnost $\mathbf{L_m}$ zavisi od pojedinačnih induktivnosti $\mathbf{L_1}$ i $\mathbf{L_2}$ i od koeficijenta sprege **k** (položaja kontura). Ona iznosi:

$$\mathbf{L_m = k\sqrt{L_1 L_2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}}}$$

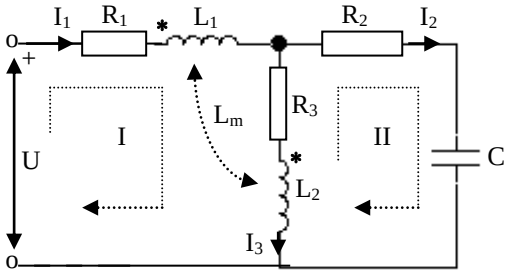
8.2. ANALIZA INDUKTIVNO SPREGNUTIH KOLA

Kod induktivno spregnutih kola (kalemova), zbog međusobne induktivnosti između kalemova ekvivalentna induktivnost svakog od tih kalemova se menja (povećava ili smanjuje). To znači da se usled toga menja i induktivni otpor tih kalemova. Induktivnost će se povećati ako se fluksevi kalemova podržavaju (istog smera), a smanjuje ako se fluksevi suprostavljaju (fluksevi suprotnih smerova).

Da bi se znalo da li se fluksevi sabiraju ili oduzimaju pored svakog kalema zvezdicom je obeležen smer fluksa. Pored smera fluksa bitan je i smer struje. Ako obe struje napajanja (I_1 i I_2) istovremene ulaze ili izlaze u priključke kalemova označene zvezdicom, fluksevi se sabiraju (sl 57.a i c), pa je međusobna induktivnost pozitivna ($\underline{Z}_m = j\omega L_m$). Ako samo jedna struja ulazi u obeleženi priključak kalema (druga u neobeleženi kraj kalema) fluksevi se oduzimaju, međusobna induktivnost negativnaje, pa je $\underline{Z}_m = -j\omega L_m$ (sl.57 b i d).
Ovi smerovi struja i flukseva, prikazani na sl. 57,omogućuje nam određivanje ekvivalentne induktivnosti kola.



Sl.57.



Sl.58.

Ako su, prema slici 58, poznati svi navedeni parametri kao i ukupni napon U, struje po granama određujemo iz sistema jednačina, čiji broj odgovara broju struja (nepoznatih). Jednačine postavljamo na osnovu Kirhofovih pravila, vodeći računa da se one moraju pisati u kompleksnom broju.

Reaktivni otpori kalemova i kondenzatora iznose:
$X_{L1} = \omega L_1$; $X_{L2} = \omega L_2$; $X_C = 1/\omega C$ i $X_m = \omega L_m$.

Na osnovu zvezdica vidimo da su fluksevi istog smera (potpomažu se) pa će ekvivalentna induktivnost po kalemovima da se poveća, a samim tim povećava se i ekvivalentni induktivni otpor po kalemovima.

Primenjujući Kirhofova pravila, za kolo prema sl. 215, slede jednačine, čiji broj odgovara broju grana (struja):

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ …….. (1)

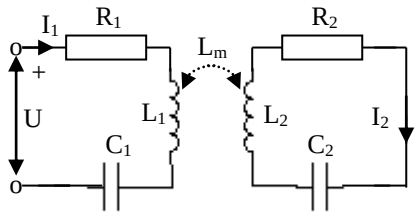
$\underline{U} - R_1 \underline{I}_1 - jX_{L1} \underline{I}_1 - jX_m \underline{I}_3 - R_3 \underline{I}_3 - jX_{L2} \underline{I}_3 - jX_m \underline{I}_1 = 0$ …. (2) … prva kontura

$- R_2 \underline{I}_2 - (- jX_C) \underline{I}_2 + jX_{L2} \underline{I}_3 + jX_m \underline{I}_1 + R_3 \underline{I}_3 = 0$ ……. (3) … druga kontura.

Rešenjem ovih jednačina dobiju se rešenja nepoznatih struja I_1, I_2 i I_3.
Na isti način se rešavaju i ostala kola, kao i složena kola, pri čemu se mogu primeniti razne metode (konturne struje, metoda Tevenena …).

Ako napon $\underline{U}$ podelimo sa strujom $\underline{I}_1$ (ukupna struja) dobije se ekvivalentna impedansa kola, koja iznosi:
$\underline{\mathbf{Z}}_\mathbf{e} = \dfrac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{1}} = \mathbf{R}_\mathbf{e} + \mathbf{jX}_\mathbf{e}$. Iz ekvivalentne impedanse izračuna se i ekvivalentna induktivnost kola $\mathbf{L_e}$ ($X_e = \omega L_e$).

Induktivno spregnuto kolo sa jednim izvorom (bez galvnaske veze)



Sl.59.

Za kolo prema slici 59, sledi sistem jednačina, koristeći drugo Kirhofovo pravilo:

$\underline{U} - \underline{I}_1 R_1 - \underline{I}_1 jX_{L1} + \underline{I}_2 jX_m + \underline{I}_2 jX_C = 0$ i

$0 + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 jX_{L2} - \underline{I}_1 jX_m - \underline{I}_1 jX_C = 0.$

Navedene jednačine se mogu predstaviti i u sledećem obliku:

$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m \Rightarrow \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + jX_L - jX_C) - \underline{I}_2 jX_m.$

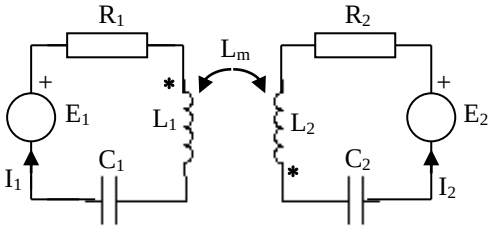
$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \Rightarrow 0 = \underline{I}_2 \cdot (R_2 - jX_C) - \underline{I}_1 jX_m;$

gde je $\underline{Z}_m = -jX_m = - j\omega L_m$.

Kako je struja I_2 nastala usled indukcije (između kalemova postoji samo magnetna veza – nema galvanske veze), ova struja, po Lencovom pravilu, će svojim fluksom da se suprostavi fluksu prvog kalema. Dakle, fluksevi se međusobno oduzimaju, što znači da je rezultantni fluks umanjen, a samim tim je manja i ekvivalentna induktivnost.

U kompleksnom obliku, za navedeno kolo, induktivni otpor usled uzajamne induktivnosti (X_m) se ponaša suprotno u odnosu na induktivni otpor usled samoindukcije (X_L).

Induktivno spregnuta kola sa dva (i više) izvora



Sl.60.

Prema slici 60, koristeći drugo Kirhofovo pravilo, slede dve jednačine sa dve nepoznate (nepoznate I_1 i I_2). Kako se fluksevi kalemova međusobno jedan drugom suprostavljaju, sledi da će induktivni otpor po kalemovima da se smanji.Na osnovu navedenog nastaju jednačine:

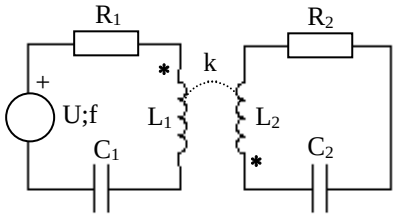
$\underline{E}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m \Rightarrow \underline{E}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + jX_{L1} - jX_{C2}) - \underline{I}_2 jX_m$

$\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \Rightarrow \underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot (R_2 + jX_{L2} - jX_{C2}) - \underline{I}_1 jX_m$

gde je $\underline{Z}_m = - jX_m = - j\omega L_m$

ZADACI:

8.1.

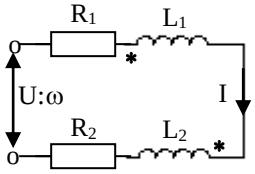


Sl.8.1.

Na slici 8.1, prikazana su dva induktivno spregnuta kola prostoperiodične naizmenične struje.

a) Napisati kompleksne jednačine po Kirhofovim pravilima za data spregnuta kola.
b) Odrediti kompleksne izraze za struje spregnutih kola.
c) Odrediti izraz za kompleksnu ulaznu impedansu spregnutih kola (sa primarne strane).

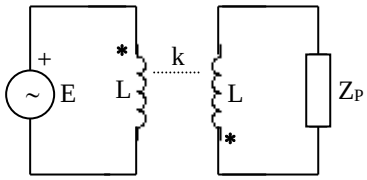
8.2.



Sl.8.2.

Izračunati ulaznu (ekvivalentnu) impedansu kola prema slici 8.2, ako su poznati sledeći podaci:
$\underline{U} = U = 10$ V; $\omega = 2\,000$ rad/s; $R_1 = 15\ \Omega$; $R_2 = 25\ \Omega$; $L_1 = 5$ mH; $L_2 = 7$ mH i $k = 0{,}676$.

8.3.

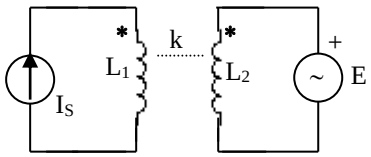


Sl.8.3.

Izračunati aktivnu snagu prijemnika u induktivno spregnutom kolu prostoperiodične struje, prikazanom na slici 8.3.

Brojni podaci:
$E = 10$ V; $\omega L = 1\ \Omega$; $k = 1$; i $\underline{Z}_P = (1 - j1)\ \Omega$.

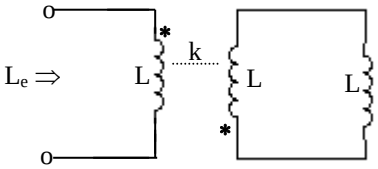
8.4.



Sl.8.4.

U induktivno spregnutom kolu prostoperiodične naizmenične struje prikazanom na slici 8.4. poznato je:
$\underline{I}_S = 0{,}2$ A; $\omega L_1 = 20\ \Omega$; $\omega L_2 = 50\ \Omega$ i $\underline{E} = j10$ V.
Izračunati efektivnu vrednost napona idealnog strujnog generatora.

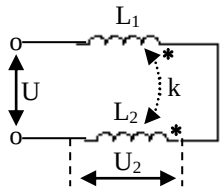
8.5.



Sl.8.5.

Izračunati ekvivalentnu induktivnost induktivno spregnutog kola, prikazanog na slici 8.5, ako je $L = 1$ mH i $k = 1$.

8.6.

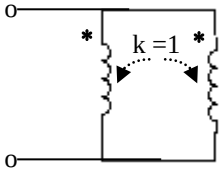


Sl.8.6.

Efektivna vrednost napona na koji je priključena redna veza induktivno spregnutih kalemova, na slici 8.6, je U = 10 V, a kružna učestanost $\omega = 10^4$ rad/s. Pri ovoj učestanosti reaktanse kalemopva iznose $X_{L1} = 100\ \Omega$ i $X_{L2} = 64\ \Omega$. Koeficijent sprege je k = 1.

Kolika je efektivna vrednost napona na drugom kalemu U_2 ?

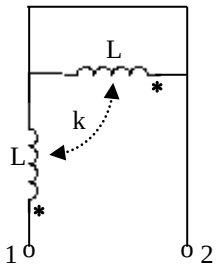
8.7.



Sl.8.7.

Izračunati ekvivalentnu induktivnost paralelne veze dva induktivno spregnuta kalema prikazana na slici 8.7.

8.8.

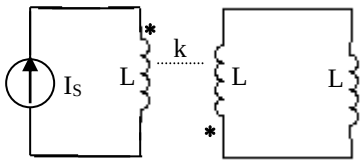


Sl.8.8.

Odrediti ekvivalentnu induktivnost između tačaka 1 i 2 za induktivno spregnuto kolo (mrežu) prikazano na sl. 8.8.

Brojni podaci: L = 4 mH; k = 0,5.

8.9.

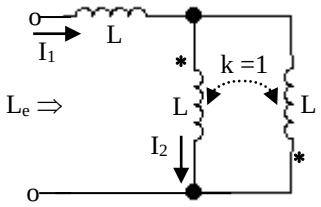


Sl.8.9.

Za induktivno spregnuto kolo prema slici 8.9. izračunati prividnu snagu koju daje strujni generator.

Brojni podaci: $I_S = 0{,}2$ A; $\omega L = 20\ \Omega$ i k = 1.

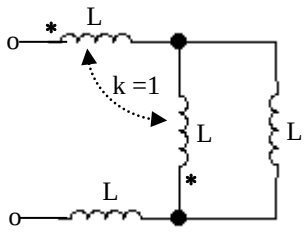
8.10.



Sl.8.10.

Izračunati ekvivalentnu induktivnost mreže kalemova prema slici 8.10.

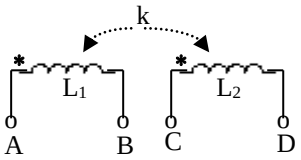
8.11.



Sl.8.11.

Izračunati ekvivalentnu induktivnost mreže kalemova prema slici 8.11.

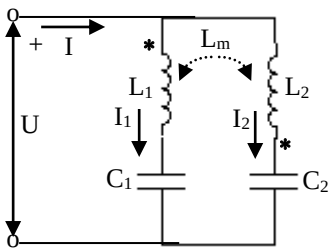
8.12.



Sl.8.12.

Dva kalema induktivnosti $L_1 = 4$ mH i $L_2 = 1$ mH i koeficijenta sprege $k = 1$, prikazana na slici 8.12, treba vezati na red tako da ekvivalentna induktivnost bude
a) maksimalna, i b) minimalna.
Nacrtati te dve veze i izračunati kolika je ekvivalentna induktivnost u oba slučaja.

8.13.

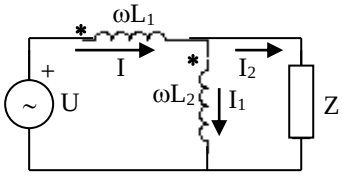


Sl.8.13.

Odrediti ulaznu impedansu za induktivno spregnuto kolo prostoperiodične struje prikazanog na slici 8.13.

Brojni podaci:
$\omega L_1 = \omega L_2 = 5\ \Omega$; $1/\omega C_1 = 10\ \Omega$; $1/\omega C_2 = 3\ \Omega$ i $k = 0{,}2$.

8.14.

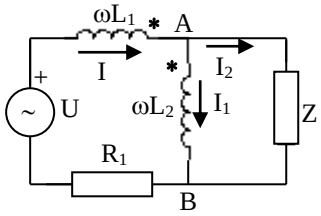


Sl.8.14.

U kolu prema slici 8.14. treba odrediti struje I, I_1 i I_2, kao i pad napona U_Z na impedansi Z:

Brojni podaci:
$\omega L_1 = 3\ \Omega$; $\omega L_2 = 9\ \Omega$; $\omega L_m = 1\ \Omega$; $\underline{Z} = j16\ \Omega$ i $\underline{U} = 100$ V.

8.15.

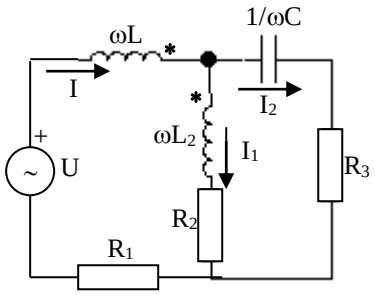


Sl.8.15.

U kolu prema slici 8.15. odrediti struje I, I_1 i I_2, kao i pad napona U_Z na impedansi Z.

Brojni podaci:
$\underline{U} = 700$ V; $\underline{Z} = (40 - j85)\ \Omega$; $\omega L_1 = 15\ \Omega$; $\omega L_2 = 45\Omega$;
$\omega L_m = 5\ \Omega$ i $R_1 = 50\Omega$.

8.16.

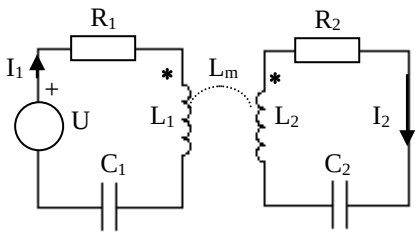


Sl.8.16.

U kolu prema slici 8.16. odrediti struje I, I_1 i I_2.

Brojni podaci:
$\underline{U}$ = 204 V; R_1 = 2 Ω; R_2 = 2 Ω; R_3 = 31,5 Ω; ωL_1 = 8 Ω; ωL_2 = 16 Ω; ωL_m = 4 Ω i $1/\omega C$ = 34,5 Ω.

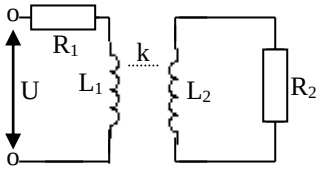
8.17.



Sl.8.17.

Na slici 8.17. su data dva induktivno spregnuta kola. Poznati su sledeći parametri:
X_{L1} = 13,5 Ω; X_{L2} = 15 Ω; $X_m = \omega L_m$ = 5 Ω; R_1 = 8,5 Ω; R_2 = 5 Ω; X_{C2} = 10 Ω i kompleksna prividna snaga generatora $\underline{S}$ = 2 200 VA.
Odrediti:
a) reaktansu X_{C2}
b) komlesni napon izvora $\underline{U}$.

8.18.

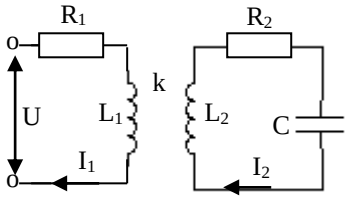


Sl.8.18.

Za spregnuto kolo prikazano na slici 8.18. odrediti struje i ulaznu impedansu i nacrtati kompletan fazorski dijagram struja i napona.

Brojni podaci:
$R_1 = R_2$ = 1 Ω; $X_{L1} = X_{L2}$ = 2 Ω; k = 0,5 i $\underline{U}$ = 10 V.

8.19.

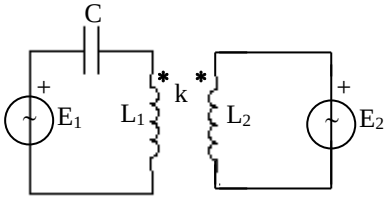


Sl.8.19.

Kroz drugi kalem spregnutog kola, prikazanog na slici 8.19, protiče kompleksna struja efektivne vrednosti $\underline{I_2}$ = 2 A. Odrediti struju $\underline{I_1}$ koja protiče kroz prvi kalem, ukupni napon $\underline{U}$ na koji je kolo priključeno i nacrtati kompletan fazorski dijagram napona i struja.

Brojni podaci:
$\omega L_1 = \omega L_2$ = 5 Ω; R_1 = 2 Ω; R_2 = 3 Ω; $1/\omega C$ = 2 Ω i k = 0,6.

8.20.

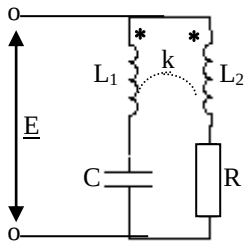


Sl.8.20.

Dva kola, sa generatorima elektromotornih sila E_1 i E_2 su induktivno spregnuta, kao na slici 8.20. Ako je koeficijent sprege k = 0,5 , odrediti:
a) aktivnu i reaktivnu snagu oba generatora,
b) Nacrtati potpuni fazorski dijagram napona i struja.

Brojni podaci:
$\underline{E_1} = 10e^{j\pi}$ V; $\underline{E_2} = 10e^{j\pi/2}$ V; $X_{L1} = X_{L2}$ = 2 Ω; X_C = 3 Ω.

8.21.

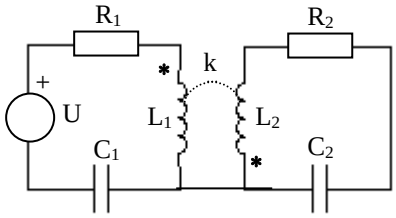


Sl.8.21.

Za induktivno spregnuto, kolo prikazano na slici 8.21, odrediti sve struje u kolu.

Brojni podaci:
$X_{L1} = X_{L2} = 2\ \Omega$; $X_{C1} = 2\ \Omega$; $R = 1\ \Omega$; $k = 0{,}5$; $\underline{E} = 10$ V.

8.22.

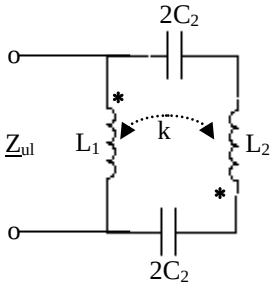


Sl.8.22.

Na slici 8.22. prikazana su dva induktivno spregnuta kola prostoperiodične naizmenične struje. Odrediti:
a) ulaznu impedansu kola,
b) kompleksnu snagu kola.

Brojni podaci:
$R_1 = 6\ \Omega$; $X_{L1} = 10\ \Omega$, $X_{C1} = 20\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$;
$X_{L2} = 15\ \Omega$; $X_{C2} = 20\ \Omega$; $k = 0{,}3$; $\underline{U} = 100$ V.

8.23.

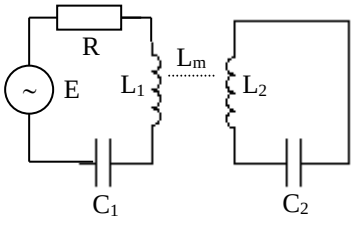


Sl.8.23.

Za dato kolo (dvopol), prikazano na slici 8.23, odrediti vrednost kapacitivne reaktanse X_{C2} tako da ulazna impedansa bude jednaka $\underline{Z}_{ul} = -j\,7\ [\Omega]$.

Brojni podaci:
$\omega L_1 = \omega L_2 = 5\ \Omega$; $k = 0{,}2$

8.24.

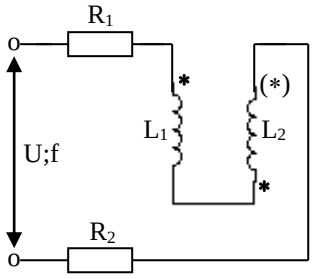


Sl.8.24.

Za dato kolo, na slici 8.24, odrediti pri kojem će koeficijentu međusobne induktivnosti struja generatora biti jednaka nuli, ako je struja drugog kola (sekundarnog) jednaka $\underline{I}_2 = j2$ A.

Brojni podaci:
$\omega L_1 = \omega L_2 = 2\ \Omega$; $1/\omega C_1 = 1/\omega C_2 = 1\ \Omega$; $R = 1\ \Omega$; $\underline{E} = 1$ V.

8.25.



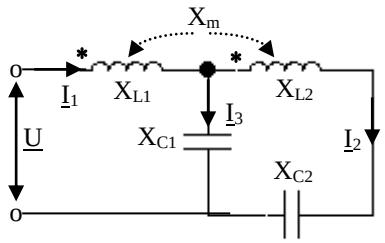
Sl.8.25.

Induktivno spregnuto kolo prema slici 8.25. priključeno je na napon efektivne vrednosti $U = 100$ V, učestanosti $f = 50$ Hz. Kada su kalemovi povezani u istom smeru (fluksevi se sabiraju) izmerena je struja efektivne vrednosti $I_1 = 2$ A, pri čemu je aktivna snaga kola jednaka $P_1 = 100$ W. Kada se jedan kalem (drugi) kontra spoji merena struja je jednaka $I_2 = 2{,}5$ A.

Odrediti R_2, L_2, L_m (M) i k.

Brojni podaci: $R_1 = 10\ \Omega$; $L_1 = 50$ mH.

8.26.

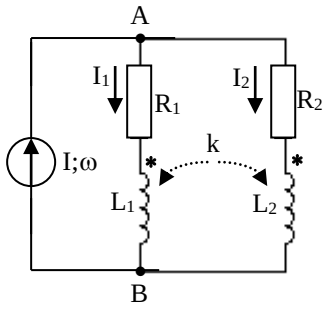


Sl.8.26.

U induktivno spregnutom kolu, prema slici 8.26, odrediti reaktansu X_{C2}.

Brojni podaci:
$\underline{U} = j10$ V; $\underline{I}_2 = 4$ A; $X_m = 1\ \Omega$; $X_{L1} = X_{L2} = 2\ \Omega$; $X_{C1} = 1\ \Omega$.

8.27.

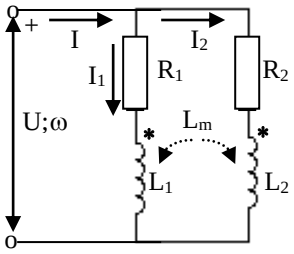


Sl.8.27.

Za induktivno spregnuta dva kola, prikazana na sl.8.27, odrediti:

a) kompleksne struje paralelno vezanih grana,
b) kompleksni napon na krajevima strujnog generatora i
c) kompleksnu ulaznu impedansu kola.

8.28.

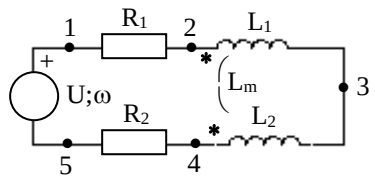


Sl.8.28.

U kolu prostoperiodične struje prikazanom na sl.8.28 poznato je: $U = 13$ V; $R_1 = 20\ \Omega$; $\omega L_1 = 40\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $\omega L_2 = 60\ \Omega$ i $\omega L_m = 40\ \Omega$.

a) Odrediti kompleksne izraze za struje svih grana kola i
b) Nacrtati fazorski dijagram napona i struja datog kola.

8.29.

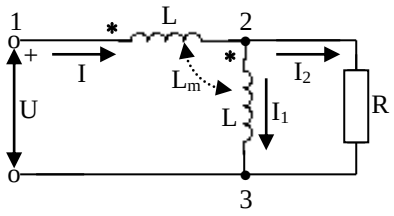


Sl.8.29.

Za kolo prikazano na slici 8.29. odrediti:
a) kompleksni izraz za struju u kolu,
b) kompleksne izraze za napone na krajevima svih elemenata u kolu i
c) nacrtati fazorski dijagram napona.

Brojni podaci: $U = 16$ V; $\omega = 10^4$ rad/s; $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 30\ \Omega$; $L_1 = 4$ mH; $L_2 = 6$ mH i $L_m = 3$ mH.

8.30.

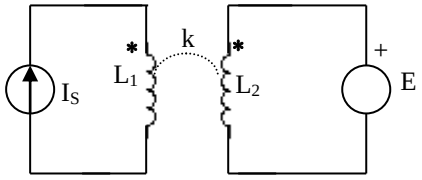


Sl.8.30.

Za kolo prostoperiodične struje prema slici 8.30. odrediti:
a) kompleksne struje,
b) kompleksne napone na svim elementima kola i
c) nacrtati fazorski dijagra napona i struja.

Brojni podaci: $\underline{U} = 24$ V; $X_L = 40\ \Omega$; $R = 10\ \Omega$; $k = 0{,}5$.

8.31.

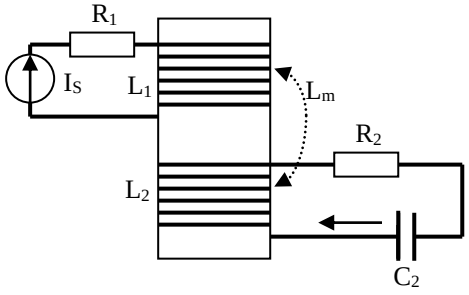


Sl.8.31.

Za kolo prostoperiodične struje, prikazano na slici 8.31, odrediti:
a) efektivnu vrednost struje naponskog generatora i
b) efektivnu vrednost napona na krajevima strujnog generatora.

Brojni podaci:
$\underline{E} = j\,5$ V; $\underline{I}_g = 0{,}2$ A; $X_{L1} = 20\ \Omega$; $X_{L2} = 50\ \Omega$; $X_m = 10\ \Omega$.

8.32.

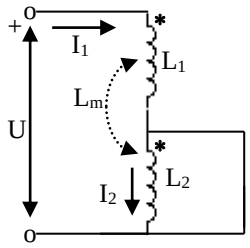


Sl.8.32.

Za induktivno spregnuto kolo, prikazano na slici 8.32. poznato je: $i_S = \sqrt{2}\sin 10^3\, t$ [A]; $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $X_{L1} = X_{L2} = 10\ \Omega$; $X_{C2} = 10\ \Omega$ i $k = 0{,}6$.

Odrediti:
a) međusobnu induktivnost ovih kola u oba slučaja i
b) napon strujnog generatora $\underline{U}_S$ i prividnu snagu koju daje strujni generator $\underline{S}$

8.33.

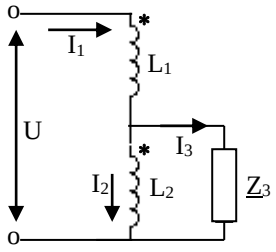


Sl.8.33.

Dva induktivno spregnuta kalema induktivnosti $\mathbf{L_1}$ i $\mathbf{L_2}$ vezana su na red, kao na slici 8.33 . Koeficijent sprege je **k.** Kalem induktivnosti L_2 je kratko spojen. Naći ekvivalentnu induktivnost kola (ulazna induktivnost).

Brojni podaci: $L_1 = 500$ mH; $k = 0{,}5$.

8.34.

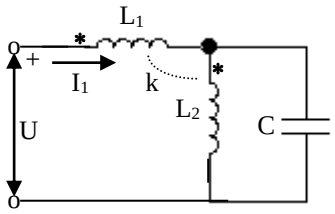


Sl.8.34.

Za kolo prikazano na slici 8.34. odrediti ulaznu impedansu induktivno spregnutog kola

Brojni podaci:
$\omega L_1 = \omega L_2 = 2\ \Omega$; $\omega L_m = 1\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = -j3\ \Omega$.

8.35.

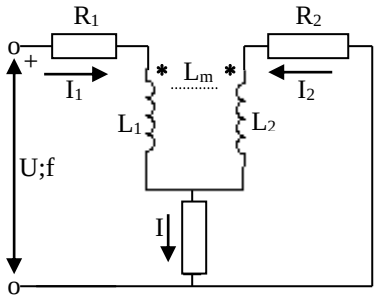


Sl. 8.35.

Na slici 8.35. prikazano je prostoperiodično kolo naizmenične struje.
Kolika je kompleksna ulazna impedansa kola?

Brojni podaci:
$L_1 = 9$ mH; $L_2 = 4$ mH; $k = 4$; $C = 5\ \mu$F; $\omega = 10^4$ rad/s.

8.36.

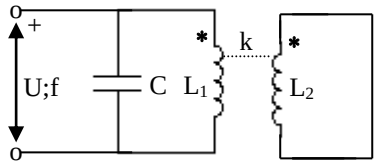


Sl. 8.36.

Za kolo prostoperiodične struje, prikazanog na slici 8.36, odrediti kompleksnu impedansu $\underline{Z}$ tako da struja otpornika R_2 bude jednaka nuli.

Brojni podaci:
$L_1 = 9$ mH; $L_2 = 4$ mH; $k = 0{,}5$; $\omega = 10^3$ rad/s

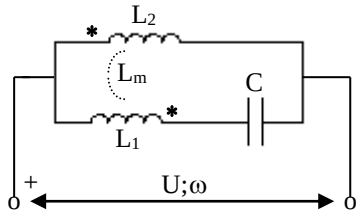
8.37.



Sl. 8.37.

Odrediti izraz za kompleksnu admitansu kola prostoperiodične struje prikazanog na slici 8.37.
Kolika je kružna učestanost antirezonanse u ovom slučaju?

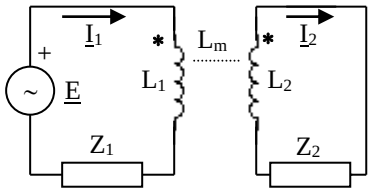
8.38.



Sl. 8.38.

Odrediti izraz za kružnu učestanost, za kolo prikazano na sl. 8.38, pri kojoj će doći do pojave antirezonanse (strujne rezonanse).

8.39.



Sl. 8.39.

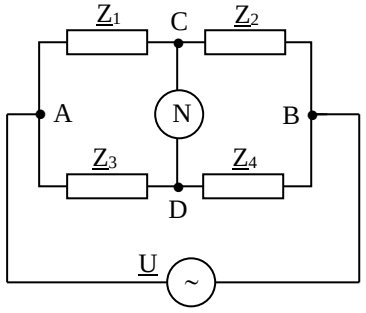
Izračunati jačinu struje u obe konture induktivno spregnutih kola prema slici 8.39.

Brojni podaci:
$\underline{E}$ = 1 V; $\underline{Z}_1$ = (10 – j5) Ω; L_1 = 2 mH; L_2 = 5 mH; $\underline{Z}_2$ = (5 + j5) Ω; f = 1 kHz; L_m = 3 mH, (L_m se najčešće obeležava sa M).

9. MOSTOVI ZA NAIZMENIČNU STRUJU

Mostovi za naizmeničnu struju su analogni mostovima za jednosmernu struju. Razlika je u tome što je otpornost kod jednosmernih mostova zamenjena impedansom kod naizmeničnih mostova .

Most za naizmeničnu struju, kao i za jednosmernu, se sastoji od četiri grane i dve dijagonale. U granama mosta se vezane impedanse, u jednoj dijagonali mosta je priključen izvor, dok je u drugoj dijagonali indikator nule (naizmenični galvanometar). Električna šema naizmeničnog mosta je prikazana na slici 61.



Sl.61.

Primena metode mostova je vrlo velika u mernoj tehnici, a naročito kod najpreciznijih merenja. To su tzv. nulte metode, čiji se princip rada svodi na ravnotežu mosta (u jednoj dijagonali struja je jednaka nuli). To će se dogoditi kada su tačke C i D, prema slici 257, na istom potencijalu, Uslov ravnoteže mosto je, po analogiji na jednosmerni most, kada je:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}.$$

Ako pretpostavimo da impedanse sadrže aktivnu i reaktivnu otpornost, tada je njihov kompleksni izraz jednak:
$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$; $\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3$ i $\underline{Z}_4 = R_4 + jX_4$.

$(R_1 + jX_1)\cdot(R_4 + jX_4) = (R_2 + jX_2)\cdot(R_3 + jX_3) \Rightarrow$
$R_1R_4 + jR_1X_4 + jR_4X_1 - X_1X_4 = R_2R_3 + jR_2X_3 + jR_3X_2 - X_2X_3 \Rightarrow$

Izjednačavanjem realnih, kao i imaginarnih delova kompleksne jednačine, nastaju sledeće dve jednačine, koje ujedno i preddsravljaju uslov ravnoteže mosta:

$R_1R_4 - X_1X_4 = R_2R_3 - X_2X_3$ …… (1)
$R_1X_4 + R_4X_1 = R_2X_3 + R_3X_2$ …… (2)

Kako obe jednačine moraju biti zadovoljene, da bi most bio u ravnoteži, tada se dovođenje mosta u ravnoteži izvodi sa dva promenljiva otpora (najčešće je jedan aktivan a drugi reaktivan). Jedan otpornik sređuje jednu jednačinu a drugi drugu. Promene moraju biti postepene i naizmenične sve dok indikator nule ne pokaže nulu.

Ovi mostovi se koriste za merenje induktivnosti, kapacitivnostii frekvencije (svih parametara koji se nalaze u impedansi), i to kod onih merenja gde se traži veća preciznost. Termogena otpornost se može izmeriti mostom za jednosmernu struju, koji je znatno jednostavniji za dovođenje mosta u ravnotežu, pa se on kod naizmeničnog mosta tretira kao usputna pojava (uz navedene parametre može se izmeriti i termogena otpornost).

Za različita meranja različite su i varijante mosta koji imaju i različite nazive. Najpoznatiji mostovi za naizmeničnu struju su: Maksvelov i Maksvel – Vinov (za induktivnost), Vinov i Šeringov (za kapacitet) , rezonantni i Vin – Robinsonov most (za frekvenciju), itd.

Pri rešavanju zadataka kod mostova treba imati u vidu to da su moguće samo dve varijante:

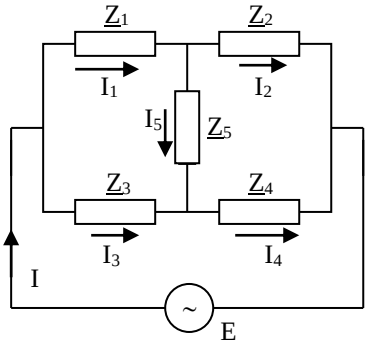
1) most nije u ravnoteži i
2) most je u ravnoteži.

Kod prve varijante ako indikator nule ima neku otpornost (ili je umesto njega peta impedansa) tada su impedanse vezane u trougao, odnosno zvezdu, pa se rešenje zadatka traži metodom transformacije, ili pak pomoću složenih kola (metoda Tevenena). Ova varijanta zbog kompleksnog računa je dosta složena.

Druga varijanta je znatno jednostavnija. U ovom slučaju (most u ravnoteži) tačke C i D su na istom potencijalu (sl. 61), pa se indikator nule, kao i svaka impedansa koja se nađe umesto njega može izbaciti iz kola. Na isti način umesto indikatora nule može se uzeti i kratka veza. Na ovaj način lako se rešava ukupna impedansa kola, samim tim i struja u kolu. Pri ovom proračunu koristiti se i jednačina koja je ujedno i uslov ravnoteže mosta.

ZADACI:

9.1.



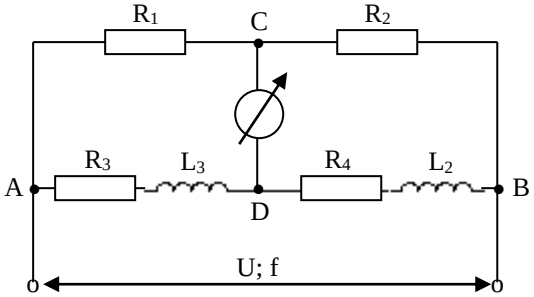
Sl.9.1.

Naizmenični Vitstonov most, prema slici 9.1, je uravnotežen. Odrediti:

a) nepoznata impedansa $\underline{Z}_1$
b) sve struje u mostu.

Brojni podaci:
$\underline{Z}_2 = 5\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = 2\ \Omega$ i $\underline{Z}_4 = -j40\ \Omega$; $\underline{Z}_5 = j10\ \Omega$; $\underline{E} = 100$ V.

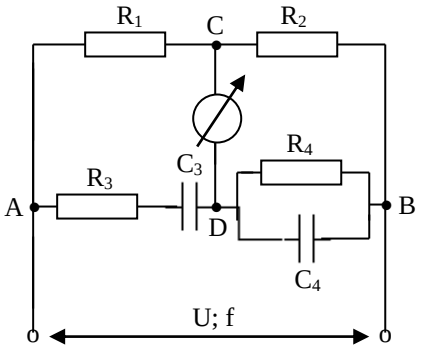
9.2.



Sl.9.2.

Za naizmenični most prikazan na slici 9.2. uspostavljena je ravnoteža mosta sa sledećim vrednostima elemenata: $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $L_3 = 0{,}2$ H; $\underline{U} = 100$ V i $f = 50$ Hz.
Odrediti:
a) vrednosti elemenata R_4 i L_4 i
b) ukupnu struju kola.

9.3.



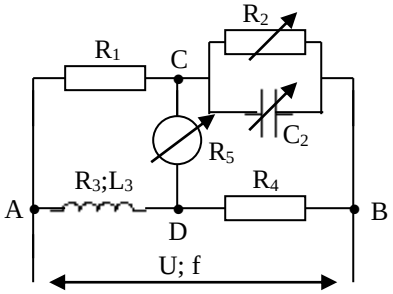
Sl.9.3.

Za naizmenični most (Vin Robinsonov most), prikazan na slici 9.3, uspostavljena je ravnoteža mosta. Odrediti:

a) učestanost izvora,
b) struje treće i četvrte grane i
c) snagu na otporniku R_3.

Brojni podaci:
$R_1 = 160\ \Omega$; $R_2 = R_3 = R_4 = 80\ \Omega$; $C_3 = C_4 = 4\ \mu$F; $U = 240$ V.

9.4.



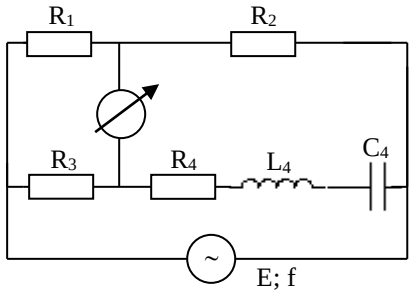
Sl.9.4.

Za naizmenični most, prema slici 9.4, uspostavlja se ravnoteža mosta promenom otpornika R_2 i kondenzatora kapaciteta C_2. Ako je most u ravnoteži pri $R_2 = 100\ \Omega$ i $C = 1\ \mu$F, odrediti:

a) induktivnost L_3 i otpornost realnog kalema R_3,
b) struja u instrumentu (indikatoru nule) ako nakon ravnoteže mosta zamenimo treću i četvrtu granu mosta.

Brojni podaci: $R_1 = 10\ \Omega$; $R_4 = R_5 = 20\ \Omega$; $\underline{U} = 220$ V; $f = 50$ Hz.

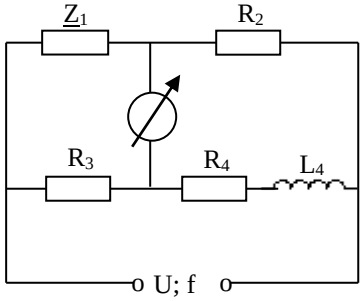
9.5.



Sl.9.5.

Za most, prema slici 9.5, uspostavljena je ravnoteža pri sledećim vrednostima elemenata:
$R_1 = 300\ \Omega$; $R_2 = 150\ \Omega$; $R_3 = 10\ \Omega$; $C = 400$ pF; $L = 25$ mH.
Kolika je nepoznata otpornost R_4 i frekvenciju izvora f ?

9.6.

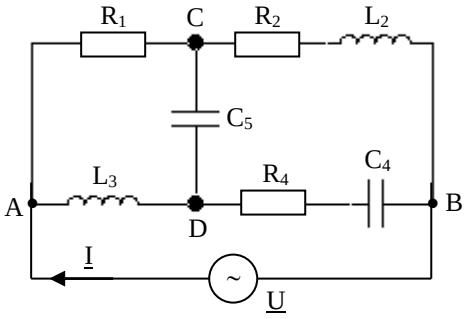


Sl.9.6.

Za uravnoteženi most, prema slici 9.6, odrediti parametre impedanse $\underline{Z}_1$.
Ako je napon izvora $\underline{U} = 100$ V, odrediti ukupnu struju.

Brojni podaci:
$R_2 = 6\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 2\ \Omega$; $L_4 = 10$ mH;
$\underline{U} = 100$ V; f = 50 Hz.

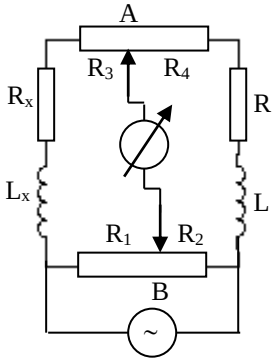
9.7.



Sl.9.7.

Za dati most, prema sl. 9.7, odrediti ukupnu struju $\underline{I}$.
Zadatak rešiti metodom transformacije.
Brojni podaci:
$R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 2{,}2\ \Omega$; $\omega L_2 = 6\ \Omega$; $\omega L_3 = 3\ \Omega$;
$R_4 = 6\ \Omega$; $1/\omega C_4 = 6\ \Omega$; $1/\omega C_5 = 3\ \Omega$; $\underline{U} = 53{,}64$ V.

9.8.

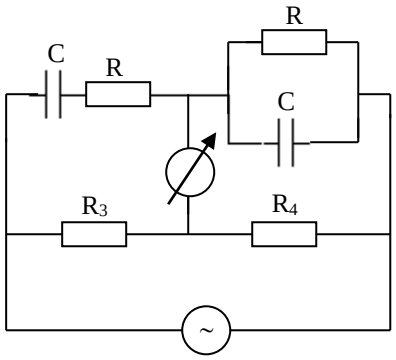


Sl.9.8.

Vitstonov most za naizmeničnu struju, prema slici 9.8, dovesti u ravnotežu (podešavanjem dvaju klizača. Zašto?).
Odrediti vrednosti elemenata: R_1, R_2, R_3 i R_4, kada je uspostavljena ravnoteža mosta..

Brojni podaci:
$\omega L_x = 30\ \Omega$; $R_x = 10\ \Omega$; $\omega L = 20\ \Omega$; $R = 10\ \Omega$;
$R_3 + R_4 = 30\ \Omega$; $R_1 + R_2 = 100\ \Omega$.

9.9.

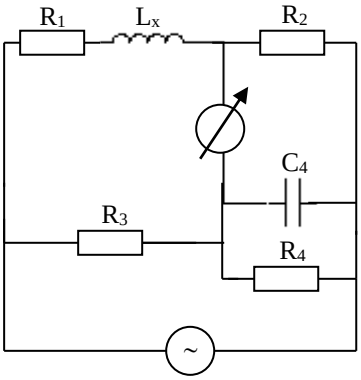


Sl.9.9.

Odrediti pri kojoj će kružnoj učestanosti ω naizmenični most (Vin Robinsonov), prema slici 9.9, biti u ravnoteži.

Brojni podaci:
$R = 10\ k\Omega$; $C = 100\ nF$; $R_3 = 500\ \Omega$; $R_4 = 250\ \Omega$.

9.10.

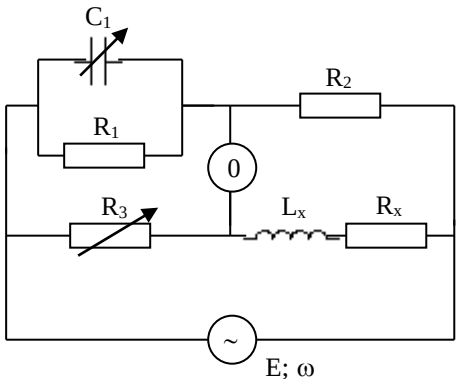


Sl.9.10.

Odrediti nepoznatu induktivnost L_x, ako je naizmenični most (Maksvel Vinov), prema slici 9.10, uravnotežen.

Brojni podaci:
$R_1 = 500\ \Omega$; $R_2 = 400\ \Omega$; $R_3 = 5\ 000\ \Omega$; $R_4 = 4\ 000\ \Omega$; $C = 10\ nF$.

9.11.



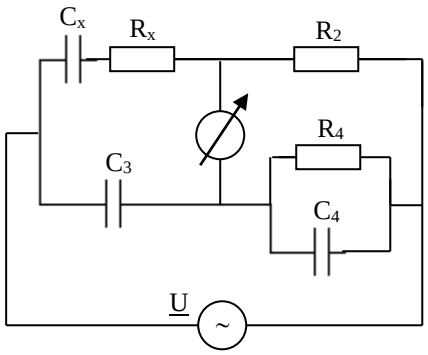
Sl.9.11.

Odrediti izraze po kojima se računa nepoznata induktivnost L_x i otpornost R_x, za naizmenični most prema slici 9.11.

9.12. Odrediti izraze za nepoznatu induktivnost L_x i otpornost R_x , za predhodni zadatak (sl.9.11) uz pretpostavku da su R_1 i C_1 umesto paralelne veze, redno vezani.

9.13. Za naizmenični most prema slici 9.10, (zadatak 9.10.) odrediti izraze po kojima se određuje induktivnost L i otpornost R_1 realnog kalema. Objasniti kako se postiže ravnoteža mosta? Koji od poznatih elemenata traba da je promenljiv i koliko ih je da bi se most najlakše doveo u ravnotežu ?

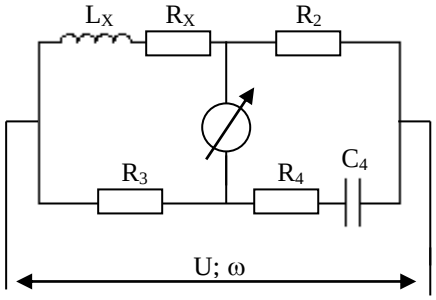
9.14.



Sl.9.14.

Naizmenični most (Šeringov), prema slici 9.14, koristi se za merenje kapacitivnosti C_x i redne otpornosti R_x. Izvesti izraze po kojima se određuje tražena kapacitivnost i otpornost ako se pretpostavi da su preostali podaci sa slike poznati. Koja od dva elemenata u mostu treba da budu promenljiva (najbolja varijanat) ? Da li nepoznata kapacitivnost C_x zavisi od učestanosti ?

9.15.



Sl.9.15.

Za naizmenični Vitstonov most, koji se koristi za merenje induktivnosti (Hejov most), prema slici 9.15, iz uslova za ravnotežu mosta izvesti izraze za nepoznatu induktivnost L_X i otpornost R_X. Svi preostali parametri prikazani na slici se smatraju poznatim.

10. SLOŽENA ELEKTRIČNA KOLA

10.1. DEFINICIJA ELEKTRIČNIH KOLA

Kola jednosmerne i kola naizmenične struje se razlikuju samo po vrsti otpora i izvoru napajanja, te je definicija električnih kola ista za naizmeničnu i za jednosmernu struju. U koloma naizmenične struje kao ekvivalentna otpornost koristi se impedansa Z, dok je u kolima jednosmerne struje prisutan samo otpornik R (koji odgovara aktivnom otporu u kolu naizmenične struje). Zbog toga će sledeće definicije da se odnose na naizmenična kola, što će biti naglašeno sa impedansom, kao i na jednosmerna kola , što će biti naglašeno otpornikom navedenim u zagradi.

Prosta kola su ona kola koja sadrže impedanse (otpornike) u rednoj i paralelnoj vezi, priključene na izvor napajanja (ako je više izvora oni su u rednoj vezi).
Ovakva kola se rešavaju Omovim zakonom, gde se umesto navedenih impedansi (otpornika) traži ekvivalentna impedansa (otpornost).

Složena kola su ona kola koja u paralelnim granama pored impedanse (otpornika) sadrže i izvor napajanja. Ako je složeno kolo vrlo veliko (veliki broj kontura), vizuelno izgleda na mrežu (veliki broj malih polja), pa se zbog toga za ova kolo često koristi termin **električna mreža.** Ako mreža sadrži zamo impedanse (otpornike) naziva se **pasivnom električnom mrežom**, a ako sadrži i generatore (naponske ili strujne) naziva se **aktivnom električnom mrežom**.

Čvor je mesto u kolu gde se spajaju tri ili više grana (provodnika).

Grana je elemenat ili redna veza elemenata spojena između dva čvora.

Kontura je bilo koji zatvoreni put od elemenata (otpori, izvori) i provodnika u električnom kolu. Složeno kolo može da sadrži vrlo veliki broj zatvorenih kontura. Kontura može da sadrži **nezavisnu** i **zajedničku granu. Nezavisna grana** je ona grana koja pripada samo jednoj konturu, a **zavisna grana** (**zajednička**) je ona grana koja pripada većem broju kontura (dve ili više).

Graf je električna šema kola u kojoj su izostavljeni elementi kola. Graf sadrži linije i čvorove pomoću kojih se predstavlja geometrijska struktura električne šeme. Umesto impedansi (otpornika) i izvora u šemi su ucrtane linije, na osnovu kojih se uprošćeno vide sve konture. Na osnovu grafa mogu se piostaviti sve jednačine, po svim metodama, a samim tim i jednostavnije doći do rešenja zadatka.

10.2. METODE ZA REŠAVANJE SLOŽENIH KOLA

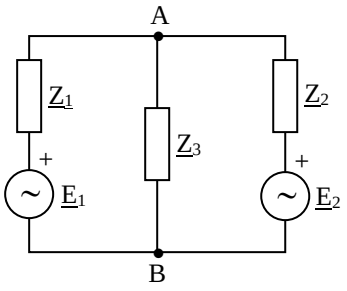
Za rešavanje složenih naizmeničnih kola (mreža) koriste se sledeće metode:
10.2.1. Metoda Kirhofovih pravila;
10.2.2. Metoda konturnih struja;
10.2.3. Metoda zajedničkog napona;
10.2.4. Metoda superpozicije;
10.2.5. Metoda Tevenena (ekvivalentni naponski generator);
10.2.6. Metoda Nortona (ekvivalentni strujni generator).

Sve metode za rešavanje mreža (složenih kola) jednosmerne struje opisane u Osnovama elektrotehnike I mogu se u istom obliku primeniti i pri rešavanju mreža naizmenične struje. Jedina je razlika što se sve veličine u naizmeničnim mrežama moraju izraziti u kompleksnom računu, ili pak vektorski. Kako je kompleksni račun u sistemu više jednačina vrlo složen, kod naizmeničnih složenih kola je vrlo bitno da se odabere prava metoda (najjednostavnija), kako bi i lakše rešili zadatak. To znači da je u kolima naizmenične struje, za razliku od jednosmerne, presudni cilj da je broj sistema jednačina što manji. Zbog navedenih razloga kod naizmeničnih mreža najčešće se koriste sledeće metode: Metoda konturnih struja, metoda Tevenena, metoda zajedničkog napona. Koja će se metoda primeniti zavisi od više faktora (broj kontura, broj traženih nepoznatih veličina, poznavanje date metode, itd.).

Sva upustva za metode rešavanja složenih kola se nalaze u prvoj zbirci (ZBIRKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE I).

ZADACI :

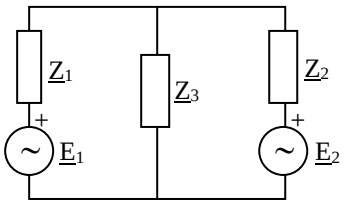
10.1.1.



Sl.10.1.1.

Koristeći metodu Kirhofovih pravila odrediti struje po granama, prema slici 10.1.1; ako je dato:
$\underline{E}_1 = 100$ V; $\underline{E}_2 = j100$ V; $\underline{Z}_1 = -j2\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = j5\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = 5\ \Omega$.

10.1.2.

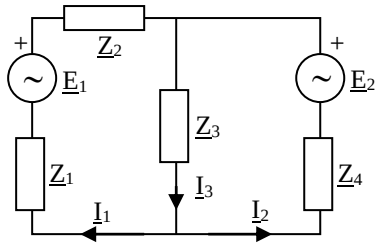


Sl.10.1.2.

Za kolo prema slici 10.1.2. odrediti sve struje u granama.
Zadatak rešiti metodom Kirhofovih pravila.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 100$ V; $\underline{E}_2 = -j50$ V; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (1 + j4)\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = -j3\ \Omega$.

10.1.3.

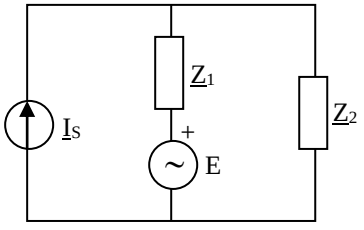


Sl.10.1.3..

Metodom Kirhofovih pravila odrediti struje po granama, za prostoperiodično složeno kolo prema slici 10.1.3.

Brojni podaci:
$\underline{Z}_1 = (2 + j2)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = -j2\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (4 + j3)\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = -j3\ \Omega$;
$e_1 = 14{,}1 \sin(\omega t - \pi/4)$ V; $E_1 = E_2$ i e_2 prednjači e_1 za $\pi/2$.

10.1.4.

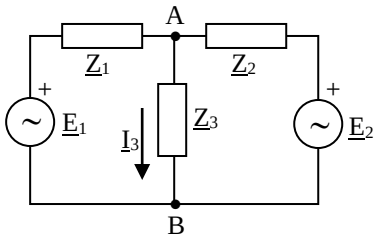


Sl.10.1.4.

Za prostoperiodično složeno kolo, prema slici 10.1.4; odrediti:
a) sve struje po granama,
b) aktivnu snagu strujnog i naponskog generatora.

Brojni podaci:
$\underline{I}_S = (0{,}7 + j1{,}4)$ A; $\underline{E} = (15 + j5)$ V; $\underline{Z}_1 = (10 - j30)\ \Omega$ i $\underline{Z}_2 = (30 + j20)\ \Omega$.

10.1.5.

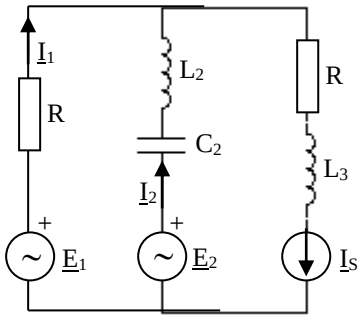


Sl.10.1.5.

U kolu prikazanom na slici 10.1.5, odrediti:
a) efektivnu vrednost struje $\underline{I}_3$ u prijemniku impedanse $\underline{Z}_3$ i
b) faznu razliku između ems $\underline{E}_2$ i struje $\underline{I}_3$.

Brojni podaci:
$\underline{Z}_1 = (30 + j30)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = 50\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (20 + j100)\ \Omega$;
$\underline{E}_1 = (100 - j100)$ V; $\underline{E}_2 = (100 + j100)$ V;

10.1.6.



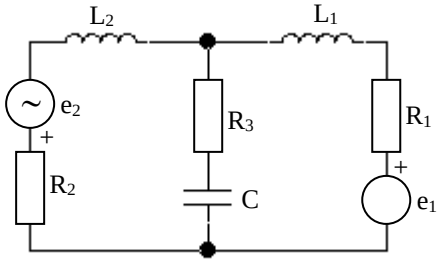
Sl.10.1.6.

Za kolo prikazano na sl. 10.1.6 odrediti kompleksne jačine struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$, kao i kompleksne snage svih impedansi i svih generatora.

Brojni podaci:
$R = 10\ \Omega$; $L_2 = L_3 = 31{,}83$ mH; $C_2 = 159{,}16\ \mu$F; $f = 50$ Hz;
$\underline{E}_1 = 10$ V; $\underline{E}_2 = (20 - j10)$ V; $\underline{I}_S = (0{,}6 - j0{,}2)$ A.

Zadatak rešiti metodom Kirhofovih pravila.
Proveriti da li je zadovoljena teorema o održavanju kompleksne snage u kolu.

10.1.7.

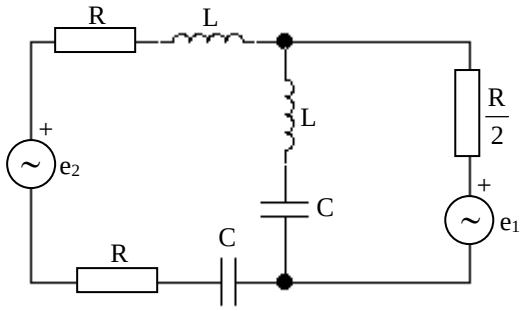


Sl.10.1.7.

U kolu prema sl. 10.1.7, primenom Kirhofovih pravila, odrediti kompleksne struje u svim granama i proveriti zakon (teoremu) o održanju kompleksne snage u kolu.

Brojni podaci:
$e_1 = 10\sqrt{2}\ \sin (\omega t - \pi/4)$ [V]; $e_2 = 50\sqrt{2}\ \sin \omega t$ [V];
$L_1 = 200$ mH; $L_2 = 300$ mH; $R_1 = 8\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$;
$R_3 = 50\ \Omega$; $C = 100\ \mu$F i $\omega = 314$ rad/s.

10.1.8.

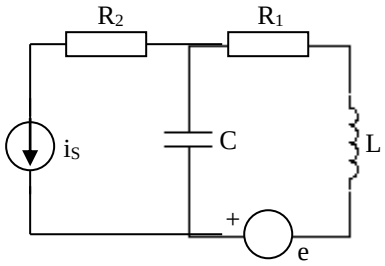


Sl.10.1.8.

U kolu prema slici 10.1.8, koristeći metodu Kirhofovih pravila, odrediti izraze za trenutne vrednosti struja u svim granama,

Brojni podaci:
$R = 40\ \Omega$; $L = 160$ mH; $C = 100$ pF i
$e_1 = 10\sqrt{2}\ \sin 500\ t$ [V]; $e_2 = 20\sqrt{2}\ \cos 500\ t$ [V].

10.1.9.

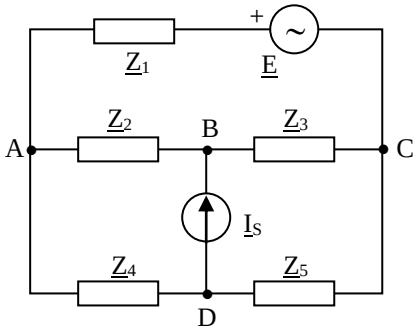


Sl.10.1.9.

U kolu na slici 10.1.9. odrediti kompleksne vrednosti za : elektromotornu silu naponskog generatora $\underline{E}$, svih struja ($\underline{I}_S$, $\underline{I}_L$ i $\underline{I}_C$) i svih snaga u kolu (S_E; S_{Is}, P_{R1}, P_{R2}, Q_L i Q_C), koristeći metodu Kirhofovih pravila.

Brojni podaci:
$R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 80\ \Omega$; $L = 95{,}54$ mH; $C = 31{,}847\ \mu$H;
$e = 220\sqrt{2}\sin 314\,t$ [V] i $i_S = 2\sqrt{2}\sin(314\,t - \pi/2)$ [A].

10.1.10.

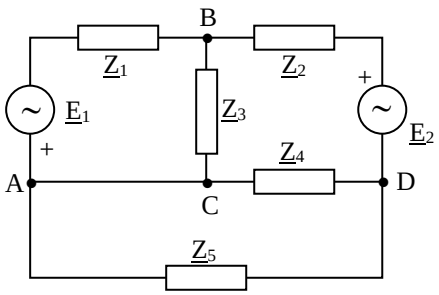


Sl.10.1.10.

U složenom kolu prostoperiodične struje, prikazanom na slici 10.1.10. odrediti:
a) kompleksne izraze za sve struje u kolu;
b) kompleksni izraz za napon na krajevima strujnog generatora.

Brojni podaci:
$\underline{E} = (13 + j9)$ V; $\underline{I}_S = j0{,}5$ A; $\underline{Z}_1 = (100 + j100)\ \Omega$;
$\underline{Z}_2 = (70 + j10)\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (30 - j10)\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = -j20\ \Omega$;
$\underline{Z}_5 = 40\ \Omega$.

10.1.11.

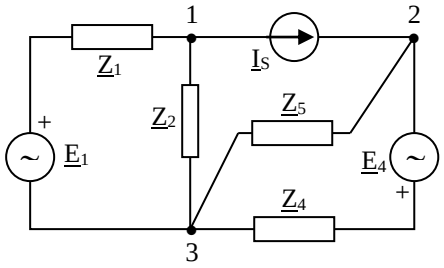


Sl.10.1.11.

Za kolo prikazano na slici 10.1.11, odrediti:
a) kompleksne izraze za struje u svim granama i
b) kompleksne izraze za napone $\underline{U}_{BC}$ i $\underline{U}_{CD}$.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (20 + j20)$ V; $\underline{E}_2 = (10 + j10)$ V;
$\underline{Z}_1 = (1 - j3)\ k\Omega$; $\underline{Z}_2 = (1 + j2)\ k\Omega$; $\underline{Z}_3 = (4 - j2)\ k\Omega$;
$\underline{Z}_4 = (5 + j5)\ k\Omega$; i $\underline{Z}_5 = (15 + j5)\ k\Omega$.

10.1.12.

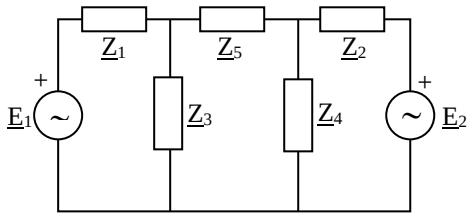


Sl.10.1.12.

Za složeno kolo prostoperiodične naiymenične struje, prema slici 10.1.12, odrediti kompleksne izraze za struje u svim granama:

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = j2$ V; $\underline{E}_4 = j1$ V; $\underline{I}_S = (0{,}1 + j0{,}1)$ A; $\underline{Z}_1 = j5\ \Omega$;
$\underline{Z}_2 = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = (4 - j7)\ \Omega$; $\underline{Z}_5 = (3 + j4)\ \Omega$.

10.1.13.

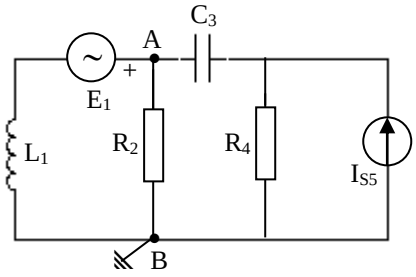


Sl.10.1.13.

Za prostoperiodično kolo, prema sl. 10.1.13, odrediti sve struje u granama.

Brojni podaci:
$E_1 = 50$ V; $E_2 = j50$ V; $Z_1 = 5\ \Omega$; $Z_2 = 2\ \Omega$; $Z_3 = j2\ \Omega$; $Z_4 = -j2\ \Omega$; $Z_5 = 4\ \Omega$.
Zadatak rešiti metodom Kirhofovih pravila.

10.1.14.

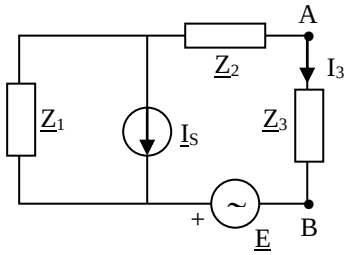


Sl.10.1.14.

U mreži (složenom kolu), prikazanom na sl. 10.1.14. izračunati jačinu struja u svim granama koristeći metodu Kirhofovih pravila.

Brojni podaci:
$L_1 = 0{,}1$ H; $R_2 = 30\ \Omega$; $C_3 = 100\ \mu$F; $R_4 = 10\ \Omega$; $f = 50$ Hz; $\underline{E}_1 = 50\, e^{j\,0^\circ}$ V; $\underline{I}_{S5} = (\,0{,}2 - j0{,}1\,)$ A.

10.1..15.

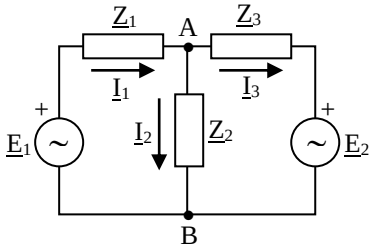


Sl.10.1.15.

Metodom Kirhofovih pravila odrediti struju I_3 u grani između tačaka A i B, prema slici 10.1.15.

Brojni podaci:
$\underline{I}_S = j0{,}1$ A; $\underline{E} = 10$ V; $\underline{Z}_1 = j63\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = -j32\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = 30\ \Omega$.

10.1.16.

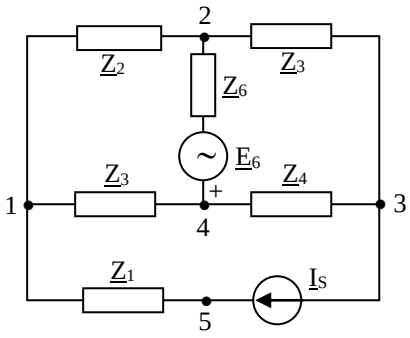


Sl.10.1.16.

Za složeno prostoperiodično kolo, prema slici 10.1.16 , odrediti elektromotornu silu $\underline{E}_2$.
Zadatak rešiti metodom Kirhofovih pravila.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 5$ V; $\underline{I}_2 = 2$ A; $\underline{Z}_1 = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = (\,2 + j2\,)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (\,3 + j6\,)\ \Omega$.

10.1.17.

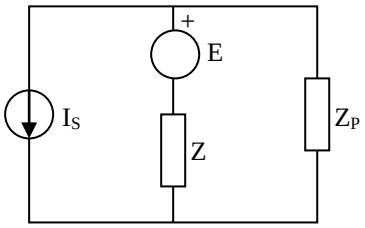


Sl.10.1.17.

Za složeno kolo, prema slici 10.1.17, odrediti:
a) kompleksne izraze struja za sve grane;
b) kompleksne prividne snage koje daju generatori.

Brojni podaci:
$\underline{E}_6 = j20$ V; $\underline{I}_S = (250 + j100)$ mA; $\underline{Z}_1 = (200 + j150)\ \Omega$;
$\underline{Z}_2 = (25 + j100)\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = -j150\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = 100\ \Omega$;
$\underline{Z}_5 = -j50\ \Omega$ i $\underline{Z}_6 = j50\ \Omega$.

10.1.18.



Sl.10.1.18.

Za prostoperiodično kolo, prikazano na slici 10.1.18, metodom Kirhofovih pravila,odrediti aktivnu i reaktivnu snagu prijemnika.

Brojni podaci:
$\underline{I}_S = (0{,}9 - j1{,}8)$ A; $\underline{E} = (14 - j2)$ V; $\underline{Z} = (10 + j20)\ \Omega$;
$\underline{Z}_P = (90 - j20)\ \Omega$.

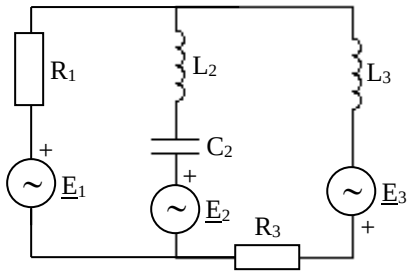
10.2.1. Rešiti zadatak 10.1.1 metodom konturnih struja.

10.2.2 Rešiti zadatak 10.1.2 metodom konturnih struja.

10.2.3 Rešiti zadatak 10.1.3. metodom konturnih struja.

10.2.4. Zadatak 10.1.13 rešiti metodom konturnih struja.

10.2.5.



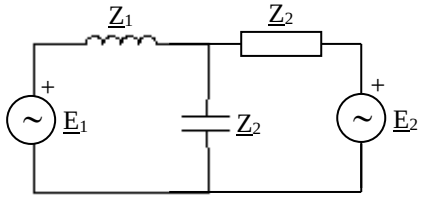
Sl.10.2.5.

Za kolo prema slici 10.2.5. odrediti:
a) sve struje u granama:
b) snage generatora ems E_3 i prijemnika otpornosti R_1,

Brojni podaci:
$R_1 = R_3 = 10\ \Omega$; $L_2 = L_3 = 32$ mH; $C_2 = 160\ \mu$F; f = 50 Hz;
$\underline{E}_1 = 10$ V; $\underline{E}_2 = (20 - j10)$ V; $\underline{E}_3 = -10$ V.

Zadatak rešiti metodom konturnih struja.

10.2.6.

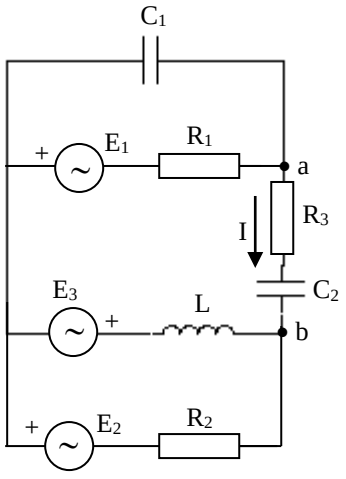


Sl.10.2.6.

Za kolo, prikazano na slici 10.2.6, odrediti:
a) struju koja protiče kroz impedansu Z_3
b) aktivnu snagu u kolu.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 10 \cdot e^{j\,\pi/2}$ V; $\underline{E}_2 = 10$ V; $\underline{Z}_1 = j5\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = 5\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = -j2\ \Omega$.

10.2.7.

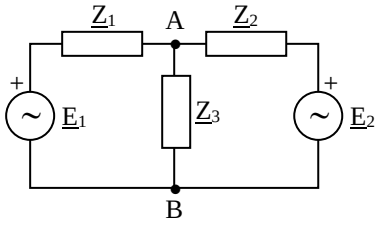


Sl.10.2.7.

Za kolo prema slici 10.2.7. odrediti kompleksnu struju $\underline{I}$ u grani ab (R_3C_2) primenom metode konturnih struja.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (10 + j10)$ V; $\underline{E}_2 = 5$ V; $\underline{E}_3 = -j10$ V;
$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$; $X_{C1} = 10\ \Omega$;
$X_{C2} = 4\ \Omega$; $X_L = 5\ \Omega$.

10.2.8.

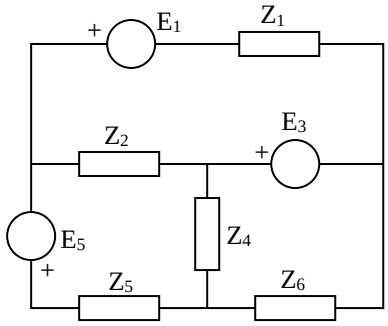


Sl.10.2.8.

U kolu prema slici 10.2.8. primenom metode konturne struje odrediti kompleksne vrednosti svih struja u granama.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (10 - j10)$ V; $\underline{E}_2 = j50$ V; $\underline{Z}_1 = (200 - j400)\ \Omega$;
$\underline{Z}_2 = (200 + j600)\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = j400\ \Omega$.

10.2.9.

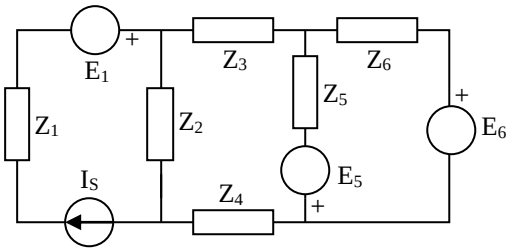


Sl.10.2.9.

Izračunati kompleksne izraze svih struha u granama za složeno prostoperiodično kolo prikazano na slici 10.2.9.
Zadatak rešiti metodom konturnih struja.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (-20 + j20)$ V; $\underline{E}_3 = 80$ V; $\underline{E}_5 = j40$ V;
$\underline{Z}_1 = (400 - j200)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = j200\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = -j100\ \Omega$;
$\underline{Z}_5 = (300 - j100)\Omega$; $\underline{Z}_6 = (100 + j100)\ \Omega$.

10.2.10.



Sl.10.2.10.

Za kolo prostoperiodične struje, prema slici 10.2.10, metodom konturnih struja odrediti kompleksnu prividnu snagu koju razvije strujni generator.

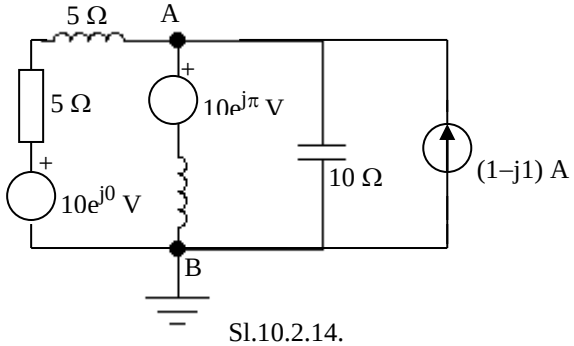
Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (50 - j50)$ V; $\underline{E}_5 = 100$ V; $\underline{E}_6 = j200$ V;
$\underline{I}_S = (160 - j480)$ mA; $\underline{Z}_1 = (50 - j50)\Omega$;
$\underline{Z}_2 = j100\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (150 - j200)\ \Omega$;
$\underline{Z}_4 = (150 - j100)\ \Omega$; $\underline{Z}_5 = j50\ \Omega$; $\underline{Z}_6 = 100\Omega$.

10.2.11. Rešiti zadatak 10.1.17. metodom konturnih struja

10.2.12. Zadatak 10.1.7. rešiti metodom konturnih struja.

10.2.13. Zadatak 10.1.14. rešiti metodom konturnih struja.

10.2.14.



Sl.10.2.14.

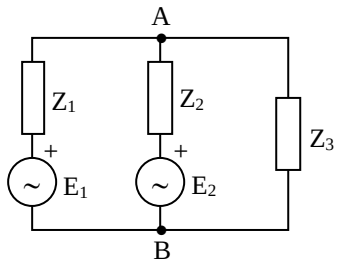
Izračunati kompleksne vrednosti struja u svim granama složenog kola prema sl.10.2.14 i napisati izraze za trenutne vrednosti tih struja. Ugaona učestanost je 314 rad/s.

Zadatak rešiti metodom konturnih struja.

10.3.1. Zadatak 10.2.6. rešiti metodom zajedničkog napona (metoda čvorova).

10.3.2. Rešiti zadatak 10.2.8. metodom zajedničkog napona (metoda čvorova).

10.3.3.



Sl.10.3.3.

U kolu, prema slici 10.3.3, metodom čvorova (zajedničkog napona) odrediti pad napona U_3 na impedansi Z_3.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 25$ V; $\underline{E}_2 = 15$ V;
$\underline{Z}_1 = 5\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = -\,j5\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (\,3 - j1\,)\ \Omega$.

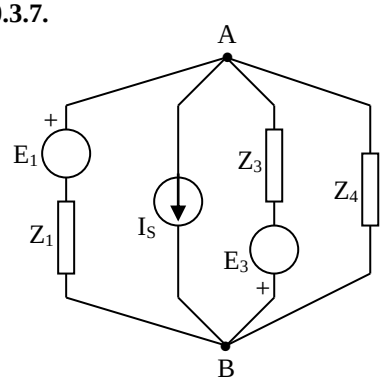
10.3.4. Ako su brojni podaci za predhodni zadatak (slika 10.3.3.): $\underline{E}_1 = 20$ V; $\underline{E}_2 = j5$ V; $\underline{Z}_1 = 6\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = -\,j4\ \Omega$; i $\underline{Z}_3 = j8\ \Omega$, metodom zajedničkog napona, odrediti:

a) kompleksni izraz za struju $\underline{I}_2$
b) kompleksni izraz za napon $\underline{U}_3$ koji deluje na impedansi Z_3 i faznu razliku između ovog napona i ems $\underline{E}_2$.

10.3.5. Zadatak 10.1.6. rešiti metodom zajedničkog napona.

10.3.6. Zadatak 10.1.7. rešiti metodom zajedničkog napona.

10.3.7.

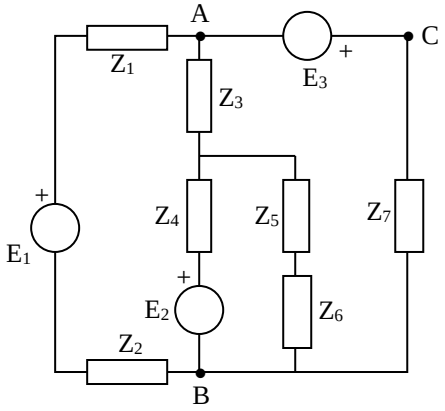


Sl.10.3.7.

Primenom metode zajedničkog napona između čvorova A i B (metoda čvorova) odrediti kompleksne struje svih grana u složenom kolu prikazanom prema slici 10.3.7.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = j12$ V; $\underline{E}_3 = -j34$ V; $\underline{I}_S = (\,40 + j120\,)$ mA;
$\underline{Z}_1 = (\,200 + j200\,)\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = 100\ \Omega$ i $\underline{Z}_4 = (\,30 - j40\,)\ \Omega$.

10.3.8.

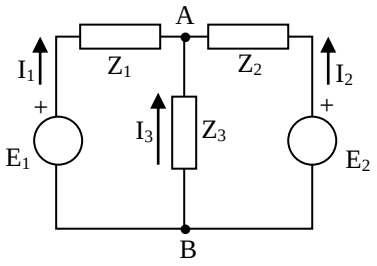


Sl.10.3.8.

Za kolo prikazano na slici 10.3.8. odrediti $\underline{U}_{CB}$ između tačaka C i B, koristeći metodu zajedničkog napona.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 20$ V; $\underline{E}_2 = (\,6 + j0{,}2\,)$ V; $\underline{E}_3 = (\,2 + j2\,)$ V;
$\underline{Z}_1 = (\,12 + j2\,)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = (\,8 + j10\,)\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = (\,10 - j12\,)\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = (\,6 + j6\,)\ \Omega$;
$\underline{Z}_5 = -\,j30\ \Omega$; $\underline{Z}_6 = j30\ \Omega$; $\underline{Z}_7 = 12\ \Omega$.

10.3.9.

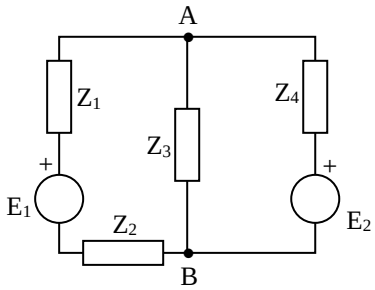


Sl.10.3.9.

Odrediti sve struje u složenom kolu prikazanom na slici 10.3.9, primenjujući metodu zajedničkog napona.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 100$ V; $\underline{E}_2 = -$ j50 V; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (1 + j4)$ Ω;
$\underline{Z}_3 = -$ j3 Ω.

10.3.10.



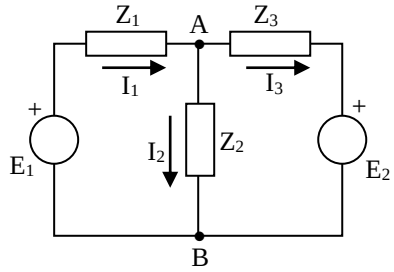
Sl.10.3.10.

Metodom zajedničkog napona odrediti struje u svim granama složenog prostoperiodičnog kola prikazanog na slici 10.3.10.

Brojni podaci:
$e_1 = 14{,}1 \sin (\omega t - \pi/4)$ V; $e_2 = 14{,}1 \sin (\omega t + \pi/4)$ V;
$\underline{Z}_1 = (2 + j2)$ Ω; $\underline{Z}_2 = -$ j2 Ω; $\underline{Z}_3 = (4 + j3)$ Ω;
$\underline{Z}_4 = -$ j3 Ω.

10.3.11. Zadatak 10.1.8. rešiti metodom zajedničkog napona (metodom čvorova).

10.3.12.



Sl.10.3.12.

Za složeno prostoperiodično kolo, prikazano na slici 10.3.12, poznato je:
$\underline{E}_1 = 5$ V; $\underline{I}_2 = 2$ A; $\underline{Z}_1 = 10$ Ω; $\underline{Z}_2 = (2 + j2)$ Ω;
$\underline{Z}_3 = (3 + j6)$ Ω.
Odrediti elektromotorn silu E_2.
Zadatak rešiti koristeći metodu zajedničkog napona.

10.3.13. Zadatak 10.1.14. rešiti metodom zajedničkog napona.

10.3.14. Zadatak 10.2.14. rešiti metodom zajedničkog napona.

10.3.15. Zadatak 10.1.18. rešiti metodom zajedničkog napona.

10.4.1. Zadatak 10.1.13 rešiti metodom superpozicije.

10.4.2. Zadatak 10.2.6. rešiti metodom superpozicije.

10.4.3. Metodom superpozicije rešiti zadatak 10.2.8.

10.4.4. Metodom superpozicije rešiti zadatak 10.3.3.

10.4.5. Metodom superpozicije rešiti zadatak 10.3.9.

10.4.6. Rešiti zadatak 10.3.10 metodom superpozicije.

10.4.7. Rešiti zadatak 10.2.9. metodom superpozicije.

10.4.8. Rešiti zadatak 10.2.5. metodom superpozicije.

10.4.9. Zadatak 10.1.11. rešiti metodom superpozicije.

10.4.10. Zadatak 10.1.8. rešiti metodom superpozicije.

10.5.1. Odrediti struju I_5 koja protiče kroz impedansu Z_5 u zadatku 10.1.13. metodom Tevenena.

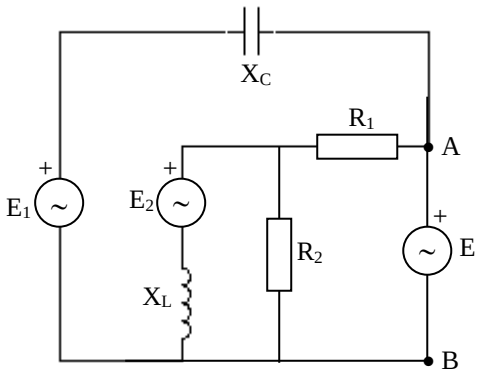
10.5.2. Zadatak 10.2.7. rešiti koristeći metodu Tevenena.

10.5.3. Izračunati kompleksnu prividnu snagu koju razvije naponski generator u zadatku 10.1.17 koristeći metodu Tevenena.

10.5.4. Zadatak 10.3.4 rešiti Tevenenovom metodom.

10.5.5. Zadatak 10.3.8. rešiti Tevenenovom metodom

10.5.6.

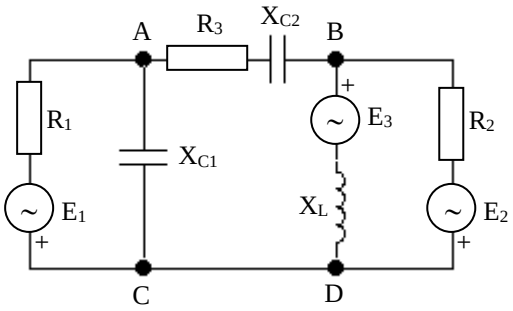


Sl.10.5.6.

Za složeno prostoperiodično kolo, prikazano na slici 10.5.6, odrediti prividnu snagu na generatoru ems E.
Zadatak rešiti koristeći metodu Tevenena.

Brojni podaci:
$X_L = X_C = 1\ \Omega$; $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$;
$\underline{E}_1 = (2 + j2)$ V; $\underline{E}_2 = (1 + j2)$ V; $\underline{E} = j2$ V.

10.5.7.

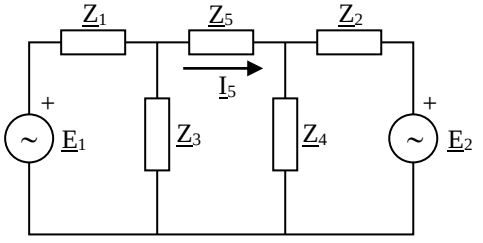


Sl.10.5.7.

Za složeno prostoperiodično kolo, prikazano na slici 10.5.7, odrediti struju koja protiče kroz savršeni kalem otpornosti X_L.
Zadatak rešiti metodom Tevenena.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (10 + j10)$ V; $\underline{E}_2 = 5$ V; $\underline{E}_3 = -j10$ V;
$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$; $X_{C1} = 10\ \Omega$;
$X_{C2} = 4\ \Omega$; $X_L = 5\ \Omega$.

10.5.8.

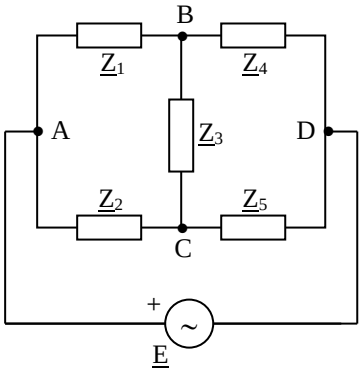


Sl.10.5.8.

Za složeno prostoperiodično kolo, prema slici 10.5.8, odrediti struju I_3 koristeći metodu Tevenena.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 50$ V; $\underline{E}_2 = j50$ V; $\underline{Z}_1 = 5\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = 2\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = j2\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = -j2\ \Omega$ i $\underline{Z}_5 = 4\ \Omega$.

10.5.9.

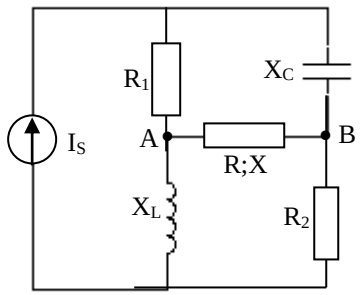


Sl.10.5.9.

Za kolo (most), prema slici 10.5.9, odrediti struju $\underline{I}_3$ koja protiče kroz impedansu $\underline{Z}_3$.
Zadatak rešiti koristeći metodu Tevenena.

Brojni podaci:
$\underline{E} = 20$ V; $\underline{Z}_1 = 50\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = 21\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (30 + j40)\ \Omega$;
$\underline{Z}_4 = (30 + j60)\ \Omega$; $\underline{Z}_5 = (12 + j24)\ \Omega$.

10.5.10.

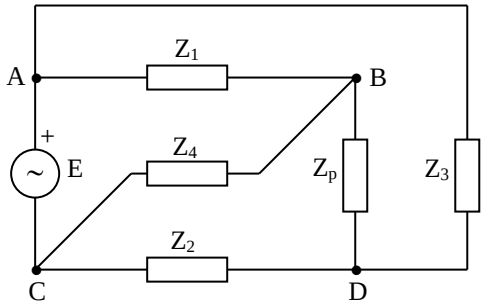


Sl.10.5.10.

Za kolo prostoperiodične struje, prema slici 10.5.10, poznato je: $\underline{I}_S = j100$ mA; $R_1 = 50\ \Omega$; $R_2 = 150\ \Omega$; $X_L = 250\ \Omega$; $X_C = 50\ \Omega$; $R = 25\ \Omega$ i $X = 50\ \Omega$.

Koristeći metodu Tevenena odrediti struju koja prolazi kroz impedansu čiji su parametari R i X (grana vezana između čvorova A i B).

10.5.11.

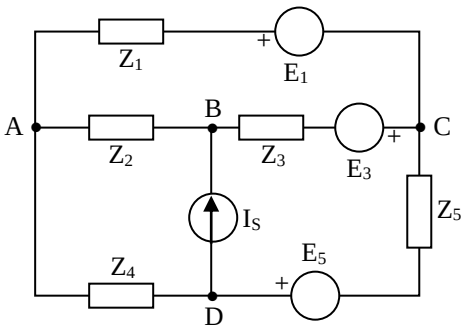


Sl.10.5.11.

Primenom Tevenenove teoreme odrediti struju prijemnika impedanse Z_p u prostoperiodičnom kolu prikazanom na slici 10.5.11.

Brojni podaci:
$\underline{E} = (30 - j10)$ V; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 1\,000\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = j500\ \Omega$ i $\underline{Z}_p = (100 - j300)\ \Omega$.

10.5.12.

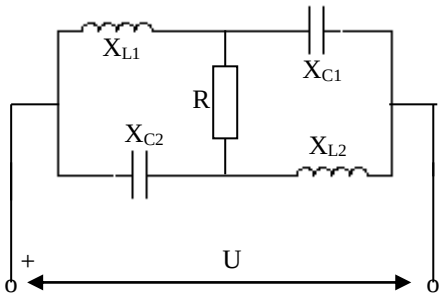


Sl.10.5.12.

U složenom kolu prostoperiodične struje, prikazanom na slici 10.5.12, odrediti kompleksnu prividnu snagu strujnog generatora.
Zadatak rešiti koristeći Tevenenovu teoremu.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (10 + j20)$ V; $\underline{E}_3 = (3 - j11)$ V;
$\underline{E}_5 = (-3 + j11)$ V; $\underline{I}_S = j0{,}5$ A;
$\underline{Z}_1 = (100 + j100)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = (70 + j10)\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = (30 - j10)\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = -j20\ \Omega$ i $\underline{Z}_5 = 40\ \Omega$.

10.5.13.

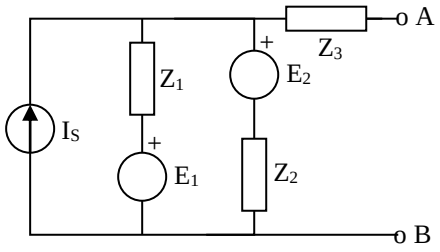


Sl.10.5.13.

Za kolo prostoperiodične struje (most), prikazano na slici 10.5.13, primenom Tevenenove teoreme odrediti struju u grani sa otpornikom R.

Brojni podaci:
$\underline{U}$ = 100 V; X_{L1} = 60 Ω; X_{C1} = 40 Ω;
X_{C2} = 50 Ω; X_{L2} = 50 Ω i R = 100 Ω.

10.5.14.

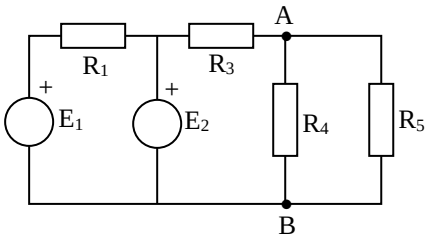


Sl.10.5.14.

Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora, u odnosu na tačke A i B, za složeno prostoperiodično kolo, prema slici 10.5.14.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1$ = 10 V; $\underline{E}_2$ = 15 V; $\underline{Z}_1$ = 5 Ω; $\underline{Z}_2$ = 4 Ω;
$\underline{Z}_3$ = 1 Ω; $\underline{I}_S$ = 0,5 A.

10.5.15.

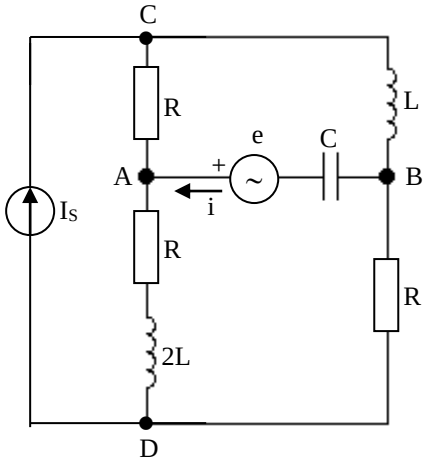


Sl.10.5.15.

Za kolo na slici 10.5.15, Tevenenovom teoremom, odrediti vrednosti otpornika R_4 i R_5 tako da ukupna snaga koja se razvija na njima bude maksimalna. Poznato je da je snaga koja se razvija na otporniku R_4 četiri puta veća od snage koja se razvija na otporniku R_5

Brojni podaci:
$\underline{E}_1$ = 12 V; $\underline{E}_2$ = 4 V; R_1 = 160 Ω; R_3 = 320 Ω.

10.5.16.

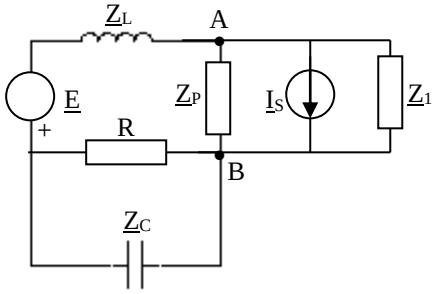


Sl.10.5.16.

U kolu, prema slici 10.5.16, koristeći Tevenenovu teoremu, odrediti kompleksnu snagu naponskog generatora, amplitudu (maksimalnu vrednost) ems E_m, kao i amplitudu struje I_m koja prolazi tom granom.

Brojni podaci:
$i_S = 60 \sin(10^4 t + \pi/4)$ [mA]; $e = E_m \sin(10^4 t + \pi/2)$ [V];
$i = I_m \sin 10^4 t$ [mA]; R = 200 [Ω]; L = 40 [mH];
C = 3/8 [μF].

10.5.17.

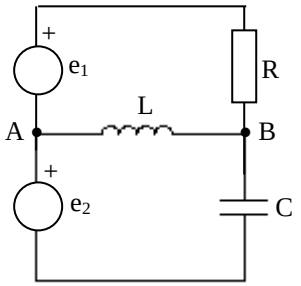


Sl.10.5.17.

Koristeći Tevenenovu teoremu odrediti vrednost impedanse Z_P, prema slici 10.5.17, tako da aktivna snaga na njoj bude maksimalna. Za takav slučaj, odrediti kompleksnu aktivnu i reaktivnu snagu na impedansi Z_P.

Brojni podaci:
$\underline{E} = (10 - j10)$ V; $\underline{I}_S = (1 + j1$ A; $\underline{Z}_1 = (5 + j5) \Omega$;
$\underline{Z}_L = j5\ \Omega$; $R = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_C = -j20\ \Omega$

10.5.18.

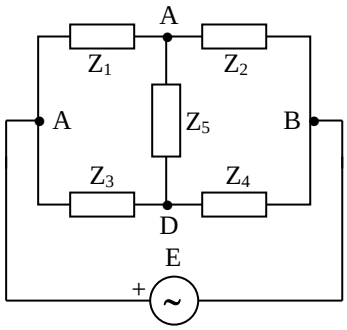


Sl.10.5.18.

Za kola, predstavljeno na slici 10.5.18, primenom Tevenenove teoreme odrediti kompleksnu struju kroz kalem L.

Brojni podaci:
$e_1 = 10 \sin \omega t$ [V]; $e_2 = 10 \cos \omega t$ [V]; $R = 2\ \Omega$;
$X_L = 1\ \Omega$; $X_C = 2\ \Omega$.

10.5.19.

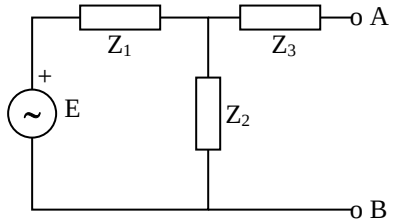


Sl.10.5.19.

Koristeći Tevenenovu teoremu odrediti struju $\underline{I}_5$ u dijagonali neuravnoteženog Vitstonovog mosta, prema slici 10.5.19.

Brojni podaci:
$\underline{E} = 10$ V; $\underline{Z}_1 = (15 + j20) \Omega$; $\underline{Z}_2 = j25\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = -j10\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = 40\ \Omega$; $\underline{Z}_5 = (100 - j\ 100) \Omega$.

10.5.20.



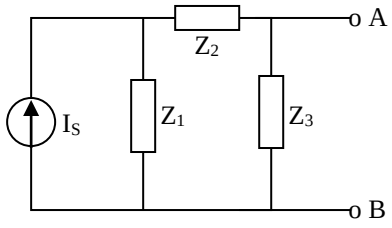
Sl.10.5.20.

U kolu prikazanom na slici 10.5.20, koristeći Tevenenovu teoremu, odrediti:

a) Ekvivalentni Tevenenov generator u odnosu na tačke A i B
b) Kompleksni izraz za impedansu prijemnika Z_p, koji se veže između tačaka A i B, tako da aktivna snaga kola bude maksimalna, kao i iznos te snage P .

Brojni podaci:
$\underline{E} = 20$ V; $\underline{Z}_1 = (2 + j4) \Omega$; $\underline{Z}_2 = (3 - j4) \Omega$;
$\underline{Z}_3 = (2 + j10) \Omega$.

10.5.21.



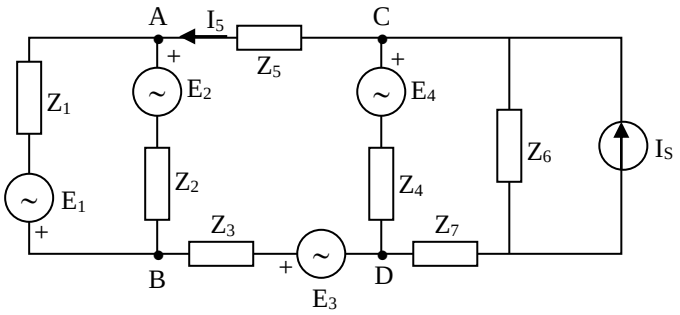
Sl.10.5.21.

U kolu, prikazanom na slici 10.5.21, odrediti ekvivalentni naponski (Tevenenov) generator u odnosu na tačke A i B.

Brojni podaci:
$\underline{I}_S = (4{,}3 + j2{,}5)$ A; $\underline{Z}_1 = (5 + j5)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (5 + j5)\ \Omega$.

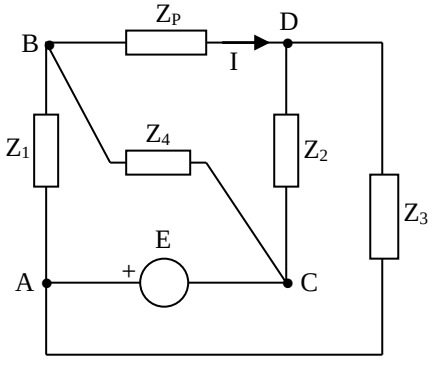
10.5.22. Primenom Tevenenove teoreme odrediti nepoznatu impedansu $\underline{Z}_5$, za kolo prikazano na slici 10.5.22; ako se zna da je kompleksni izraz za struju $\underline{I}_5 = (50 + j50)$ mA.

Brojni podaci:
$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = (5 + j5)\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = (0{,}4 + j2)\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = 2\ \Omega$; $\underline{Z}_6 = 3\ \Omega$; $\underline{Z}_7 = 5\ \Omega$; $\underline{E}_1 = 5$ V; $\underline{E}_2 = (2 + j2)$ V; $\underline{E}_3 = 0{,}4$ V; $\underline{E}_4 = (-1{,}5 - j0{,}5)$ V; $\underline{I}_S = (2 + j2)$ A.



Sl.10.5.22.

10.5.23.



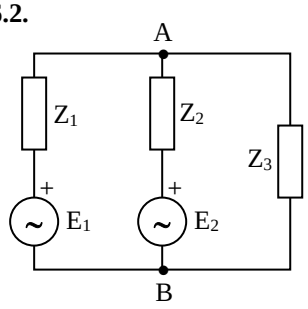
Sl.10.5.23.

Primenom Tevenenove teoreme odrediti struju I, za prostoperiodično složeno kolo prikazano na slici 10.5.23.

Brojni podaci:
$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = j5\ \Omega$; $\underline{E} = (30 - j10)$ V.

10.6.1. Odrediti parametre Nortonovog (strujnog) generatora za zadatak 10.5.14. u odnosu na tačke A i B.

10.6.2.



Sl.10.6.2

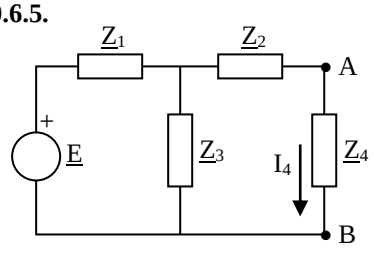
Za složeno kolo, prema slici 10.6.2, odrediti struju I_3 koja protiče kroz impedansu Z_3.
Zadatak rešiti Nortonovom teoremom.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = 25$ V; $\underline{E}_2 = 15$ V; $\underline{Z}_1 = 5\ \Omega$; $Z_2 = -j5\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = (3 - j1)\ \Omega$

10.6.3. Kolika treba da bude impedansa Z_3 u predhodnom zadatku (zad. 10.6.2.) da bi na njoj aktivna snaga bila maksimalna. Koliko će u tom slučaju iznositi aktivna snaga P_3 ?

10.6.4. Odrediti ekvivalentni strujni (Nortonov) generator u odnosu na tačke A i B za zadatak 10.5.21.

10.6.5.

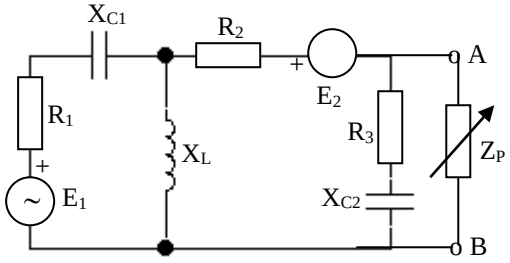


Sl.10.6.5.

Koristeći Nortonovu teoremu, u kolu prema sl. 10.6.5, odrediti napon između tačaka A i B, $\underline{U}_{AB}$ i jačinu struje $\underline{I}_4$.

Brojni podaci:
$\underline{E} = 100$ V; $\underline{Z}_1 = (20 - j100)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = (30 + j2)\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = 200\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = (10 + j10)\ \Omega$.

10.6.6.



Sl.10.6.6.

Koju vrednost impedanse ima prijemnik Z_P, koji je priključen na tačke A i B, prema sl.10.6.6.
Kolika je aktivna snaga na prijemniku ?
Zadatak rešiti metodom Nortona.

Brojni podaci:
$\underline{E}_1 = (100 - j150)$ V; $\underline{E}_2 = (50 + j100)$ V;
$R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 20\ \Omega$; $X_{C1} = X_{C2} = 10\ \Omega$;
$X_L = 10\ \Omega$.

10.6.7. Rešiti zadatak 10.5.6 Nortonovom teoremom.

10.6.8. Rešiti zadatak 10.5.9, Nortonovom teoremom.

10.6.9. Zadatak 10.5.10. rešiti metodom nortona.

10.6.10. Zadatak 10.5.13. rešiti Nortonovom teoremom.

10.6.11. Zadatak 10.5.15. rešiti ortonovom teoremom.

10.6.12. Nortonovom teoremom rešiti zadatak 10.5.18.

10.6.13. Nortonovom teoremom rešiti zadatak 10.5.19.

11. TRANSFORMATORI

11.1. ZADATAK I PODELA TRANSFORMATORA

Transformatori pretvaraju (transformišu) naizmenične veličine (smanjuju ili povećavaju) sa jedne vrednosti na drugu.

Transformatori se dele na više vrsta. Tako nastaje podela na: energetske transformatore, autotransformatore, merne transformatore, specijalni transformatori (transformatori za zavarivanje, ispitni transformatori, itd.).

Prema prenosnom sistemu transformatori se dele na: jednofazne i trofazne, a prema vrsti hlađenja na: vazdušne i uljne.

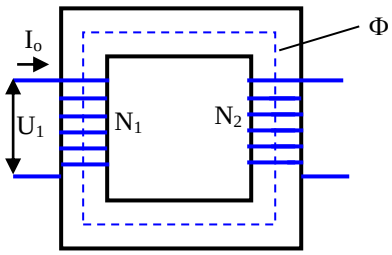
Osnovni delovi svih transformatora su: namotaj (bakarna žica) i jezgro (gvožđe).

Namotaj transformatora se sastoji iz dva (ponekad i tri) električno odvojena kalema. Jedan namotaj (kalem) čini primar transformatora, a drugi sekundar. Primaru se dovodi energija, dok se sa sekundara odvodi energija.

Princip rada transformatora se zasniva na zakonu međusobne induktivnosti. Može se reći da su transformatori poseban slučaj induktivno spregnutih kola sa maksimalnim koeficijentom sprege (transformatori sa gvozdenim jezgriom).

Na osnovu transformatora električna energija se može preneti na vrlo velike udaljenosti. To se postiže tako što se energija prenosi pri vrlo velikim naponima, tj. malim strujama, pa su Džulovi gubici na prenosnim provodnicima veoma mali (I^2R). Korišćenje električne energije se obavlja pri niskim naponima (110 – 500 V) , bezbednim i za aparate, kao i za živa bića. To znači da su za prenos električne energije potrebna bar dva transformatora, i to: prvi koji će povećati napon (smanjiti struju) i drugi koji će smanjiti napon na željenu vrednost (napon na koji se priključuju potrošači).

11.2. IDEALNI TRANSFORMATOR



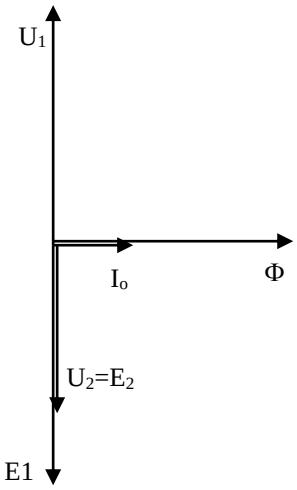
Sl.62.

Idealni transformator, sl.62, ima zanemarljive termogene otpornosti (nema toplotnoh gubitaka) u oba kalema, kao i zanemarljive magnetne gubitke (nema magnetnog rasipanja).

Priključenjem primara transformatora na naizmenični napon U_1, dok je sekundar otvoren, kroz primarni namotaj N_1 protiče naizmenična struja I_o (efektivna vrednost) koja će stvoriti promenljivi magnetni fluks Φ. Ovaj fluks Φ prolaze kroz gvozdenu jezgru, tj. kroz oba namotaja, i pri tome u njima indukuje ems, i to: u primaru ems samoindukcije E_1 i u sekundaru ems uzajamne indukcije E_2.

Kako se transformator sastoji od zatvorenog feromagnetnog (gvozdenog) jezgra rasipni fluks se može zanemariti. Zbog velike magnetne permeabilnosti gvožđa i maksimalne induktivne povezanosti, oba kalema poseduju značajnu induktivnost ($L = N^2\Lambda = N^2\mu S/l$). Pošto transformatori rade sa promenljivim magnetnim fluksom, da bi se smanjili gubici usled vrtložnih struja, gvozdeno jezgro se gradi od tankih limova međusobno izolovanih (kod niskih učestanosti) ili od gvozdenog praha (kod visokih učestanosti). Za smanjenje gubitaka usled histerezisa, za jezgro se uzima materijal sa što užom histereznom petljom (transformatorski lim). Na ovaj način su sprečena magnetna rasipanja, a istovremeno su izbegnuta značajnija zagrevanja. Kod idealnih transformatora ovih rasipanja nema, što je u praksi nemoguće ostvariti.

Imajući u vidu da je induktivnost primarnog i sekundarnog namotaja vrlo velika, a struja I_o vrlo mala pri otvorenom sekundarnom namotaju zanemarljivi su svi gore navedeni gubici. Na taj način se može konstatovati da se ovi namotaji transformatora ponašaju kao savršena induktivna opterećenja. To znači da će struja I_o kasniti u odnosu na svoj napon U_1 za $\pi/2$. Pod dejstvom ove struje, koja se još naziva i strujom magnećenja, javlja se magnetni fluks Φ, koji je u fazi sa njom. Usled ovog promenljivog fluksa ϕ nastaju indukovane ems E_1 i E_2 koje kasne za svojim fluksom za $\pi/2$. Prema drugom Kirhofovom zakonu ($u_1 + e_1 = 0$), indukovana ems E_1 održava ravnotežu dovodnom naponu U_1 ($E_1 = -U_1$), te su E_1 i U_1 u opoziciji, što je prikazano na slici 63. Indikovana ems sekundara E_2 u stvari predstavlja napon U_2, jer pri otvorenom sekundaru nema pada napona na njemu, pa je: $E_2 = U_2$



Sl.63.

Promenljivi fluks ϕ će indukovana ems u primaru i sekundaru, gde je:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt}[V],$$

$$e_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}[V].$$

Odnos ems, prema gornjim izrazima je:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Kod prostoperiodičnih veličina ovaj odnos se može preneti i na njihove efektivne vrednosti, pa je:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Kako je kod idealnih transformatora $U_1 = E_1$ i $U_2 = E_2$, predhodni izraz može da se odnosi i na napone, pa je:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = m}$$

Odnos između primarnog i sekundarnog broja navojaka, naziva se **odnosom transformacije** ili odnos preobražaja i obelwežava se sa **m**.

Ako pretpostavimo da je analitički izraz za fluks $\phi = \Phi_m \cos \omega t$, analitički izrazi za indukovane ems su:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_m \cos \omega t}{dt} = N_1 \cdot \omega \Phi_m \sin \omega t = E_{m1} \sin \omega t [V],$$

$$e_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_m \cos \omega t}{dt} = N_2 \cdot \omega \Phi_m \sin \omega t = E_{m2} \sin \omega t [V].$$

Maksimalne vrednosti indukovanih elektromotornih sila iznose:

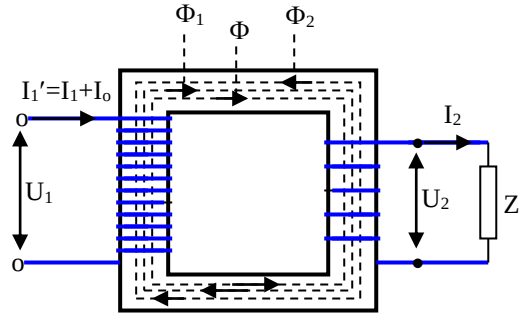
$E_{1m} = N_1 \omega \Phi_m$ i $E_2 = N_2 \omega \Phi_m$.

Efektivne vrednosti indukovanih ems su:

$$E_1 \cdot \sqrt{2} = N_1 \omega \Phi_m \Rightarrow E_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{N_1 \cdot 2\pi f \cdot \Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_m = 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_m,$$

$$E_2 \sqrt{2} = N_2 \omega \Phi_m \Rightarrow E_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44 \cdot f \cdot N_2 \cdot \Phi_m$$

$E_1 = 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_m$ i $E_2 = 4{,}44 \cdot f \cdot N_2 \cdot \Phi_m$



Sl.64.

Ako se sekundar optereti, priključi neka impedansa Z (sl.64.), tada će kroz namotaje sekundara proticati struja I_2, koja iznosi $I_2 = U_2/Z$. Pod dejstvom ove struje nastaje fluks Φ_2, koji se sada suprostavlja predhodnom fluksu Φ (kod praznog hoda). Fluks Φ_2 dodatno indukuje struju I_1 u primarnom namotaju (uzajamna indukcija), koja će svojim dodatnim fluksom Φ_1 poništiti fluks Φ_2. Na taj način ukupni fluks ostaje nepromenjen, tj. jednak predhodnom fluksu Φ (prazan hod).

Kako su fluksevi, prema Kap Hopkinsonovom zakonu, srazmerni magnetopobudnim silama (magnetnim naponima), koje iznose M = NI, magnetopobudna sila sekundara mora biti jednaka dodatnoj magnetopobudnoj primara.

Dakle,

$$N_1 I_1 = N_2 I_2.$$

Ove dve magnetomotorne (magnetopobudne) sile su suprotnih smerova, pa one i stvaraju svoje flukseve Φ_1 i Φ_2, koji se poništavaju.

Iz izraza za magnetomotorne sile primara (dodatna sila) i sekundara, sledi:

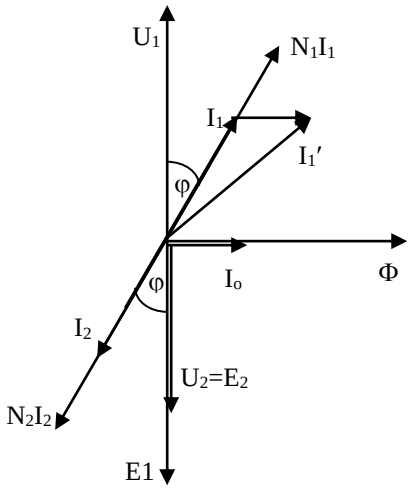
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = k = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = m.$$

Odnos između struje primara (struje koju dodatno prouzrokuje sekundarna struja) i struje sekundara je jednak recipročnoj vrednosti odnosa transformacije.

Ukupna struja primara, pri opterećenom sekundaru, iznosi $\underline{I}_1' = \underline{I}_1 + \underline{I}_o$, gde je struja I_1 naknadno povučena struja iz mreže kada se optereti sekundar.

Ako pretpostavimo da je impedansa Z_2 RL karaktera, tada će struja I_2 da kasni za svojim naponom za ugao φ. Proizvod struje I_2 i broja navojaka N_2 je jednak proizvodu struje I_1 i broja navojaka N_1. Ova dva vektora $N_2\underline{I}_2$ i $N_1\underline{I}_1$ su međusobno jednaki i pomereni za 180° (u opoziciji su). Na osnovu svega navedenog nastaje fazorski dijagram opterećenog idealnog transfoermatora, koji je prikazan na slici 65.

Struja praznog hoda je vrlo mala u odnosu na struju koju transformator povlači iz mreže kada se on normalno optereti na sekundaru ($I_1 >> I_o$), pa se u praksi može uzeti da je $I_1 \approx I_1'$.



Sl.65.

Iz izraza $U_1/U_2 = N_1/N_2$ i $I_2/I_1 = N_1/N_2$, sledi:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow U_1 I_1 = U_2 I_2 \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Ako celu jednačinu pomnožimo sa faktorom snage $\cos\varphi$, umesto prividnih snaga dobiju se aktivne snage, pa je:

P_1 $U_1 I_1 \cos\varphi = U_2 I_2 \cos\varphi \Rightarrow P_1 = P_2$.

Kod idealnih transformatora, snaga primara je jednaka snazi sekundara. Zbog toga su transformatori električne mašine koje električnu energiju jednog napona pretvaraju u električnu energiju drugog napona. Kod realnog transformatora snaga sekundara će biti manja od snage primara za sve gubitke koji nastaju idući od primara ka sekundaru.

Transformatori su mašine koje rade sa vrlo velikim stepenom korisnog dejstva, čak do 99 %.

11. 3. REDUKOVANJE VELIČINA KOD TRANSFORMATORA

Kako su kod transformatora razlike između primarnih i sekundarnih veličina vrlo velike (više stotina, pa i hiljada puta), da bi se mogle istovremeno nacrtati i primarne i sekundarne veličine, one se predhodno moraju svesti (redukovati) na vrednosti pogodne za crtanje. To se postiže na dva načina. Jedan način je svođenje primarnih veličina na sekundarne, a drugi način je obrnut. Redovito se sekundarne veličine redukuju na primarne veličine.

11.3.1. REDUKOVANJE SEKUNDARNOG NAPONA NA PRIMARNU VREDNOST

Iz izraza:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow E_1 = mE_2 = E_2'$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow U_1 = mU_2 = U_2'$$

Dakle, E_2' i U_1' su redukovane (uvećane ili smanjene) sekundarne veličine, koje su na ovaj način svedene na vrednost primarnih veličina. Kada sekundarne napone ili ems svodimo na primar, tada ih samo pomnožimo sa odnosom transformacije m. Pri svođenju primara na sekundar, tada bi primarne veličine delile sa odnosom transformacije m.

11.3.2. REDUKOVANJE SEKUNDARNE STRUJE NA PRIMARNU VREDNOST

Iz izraza:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{I_2}{m} = kI_2 = I_2'.$$

gde je I_2' sekundarna struja redukovana na primarnu.

Kod redukovanja sekundarne struje na primarnu vrednost, njenu vrednost (sekundarnu struju) podelimo sa odnosom transformacije m.

11.3.3. REDUKOVANJE SEKUNDARNIH OTPORA (IMPEDANSE) NA PRIMARNU VREDNOST

Redukovana impedansa sekundara, prema Omovom zakonu, iznosi:

$$Z_2' = \frac{U_2'}{I_2'} = \frac{mU_2}{\frac{I_2}{m}} = m^2 Z_2.$$

Na isti način se dobije i za aktivni i reaktivni (induktivni) otpor, pa je:

$R_2' = m^2 R_2$, odnosno $X_2' = m^2 X_2$,

gde su Z_2', R_2' i X_2' redukovane sekundarne veličine (impedansa, aktivni i reaktivni otpor) na primar.

11.4. REALNI TRANSFORMATOR SA GVOZDENOM JEZGROM

Idealni transformatori su oni kod kojih su ispunjeni sledeći uslovi:

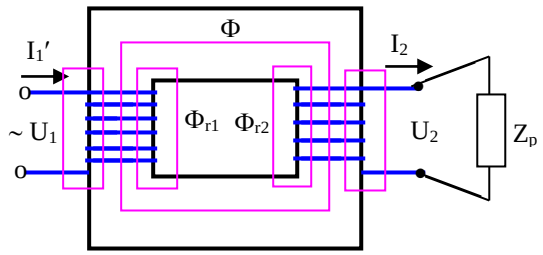
1) $R_1 = R_2 = 0$; (tj. $Z_{11} = j\omega L_1$ i $Z_{22} = j\omega L_2$);

2) $|M| = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$; (tj. koeficijent induktivne sprege $k = 1$) i

3) L_1 i $L_2 \to \infty$ (tj. i primar i sekundar imaju vrlo velik broj zavojaka, pa fluks u jezgri teži ka nuli).

Jasno je da se navedeni uslovi ne mogu ostvariti, što znači da u praksi imamo realne transformatore. Realni transformatori su oni kod kojih nisu ispunjeni uslovi za idealni transformator. Cilj je kod svih transformatora da su im navedena tri uslova približno zadovoljena (R_1 i R_2 što manje a k , L_1 i L_2 što veće).

Električna šema realnog transformatora, sa gvozdenom jezgrom, data je na slici 66.



Sl.66.

Prema slici su:

- Φ..... rezultantni fluks, koji indukuje ems u primaru i sekundaru E_1 i E_2;
- Φ_{r1}, Φ_{r2}... ...rasipni fluksevi primara i sekundara, koji stvaraju induktivne padove napona U_{r1} i U_{r2}
- I_1, I_2 .... struje opterećenja primara i sekundara
- I_1R_1 i I_2R_2 aktivni padovi napona U_{R1} i U_{R2}
- Z_p ..... impedansa potrošača.
- Z_1 i Z_2..... impedanse primara i sekundara.

Koristeći drugi Kirhofov zakon nastaju sledeće jednačine

- za primar:

$$\underline{U}_1 + \underline{E}_1 - \underline{I}_1R_1 - \underline{I}_1jX_1 = 0 \Rightarrow \underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + \underline{I}_1\cdot(R_1 + jX_1),$$

- za sekundar:

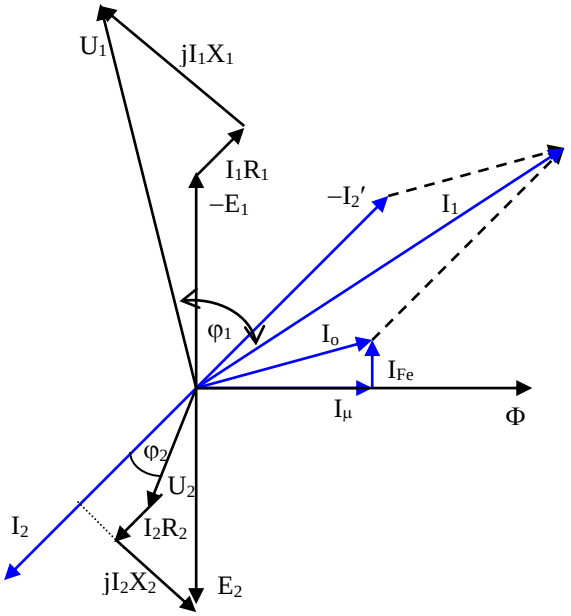
$$\underline{E}_2 - \underline{U}_2 - \underline{I}_2R_2 - \underline{I}_2jX_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_2 = \underline{E}_2 - \underline{I}_2\cdot(R_2 + jX_2) = \underline{E}_2 - \underline{I}_2\underline{Z}_2.$$

Na osnovu navedenih jednačina nastaje fazorski dijagram koji je prikazan na slici 67.

Prema fazorskom dijagramu aktivne komponente padova napona kako na primaru, tako i na sekundaru, u fazi su sa svojom strujom. To znači da je vektor (fazor) $\underline{I}_1R_1$ paralelan sa $\underline{I}_1$, a fazor $\underline{I}_2R_2$ sa $\underline{I}_2$.

Induktivni padovi napona I_1X_1 i I_2X_2 prednjače svojim strujama I_1, odnosno I_2 za $\pi/2$.

Fazni pomak između struje I_1 i napona U_1 iznosi φ_1, gde struja kasni za naponom za navedeni ugao. Ugao φ_2 čini fazno zaostajanje struje I_2 u odnosu na U_2. Ove fazne uglove odredimo iz impedanse Z_1 i Z_2.



Sl.67.

Pri crtanju fazorskog dijagrama redovito se sekundarne veličine svedu (redukuju) na primarne.

Kod realnog transformatora struja praznog hoda I_o se sastoji iz dve komponente, i to:

- I_μ ..... struja magnetiziranja, pa je ona u fazi sa fluksom Φ kojeg stvara i
- I_{Fe} ..... struja gubitaka u gvožđu

(vrtložne struje i histereza). Ova komponenta struje stvara u gvožđu, prema Džulovom zakonu, toplotne gubitke, pa je ona normalna na struju magnećenja.

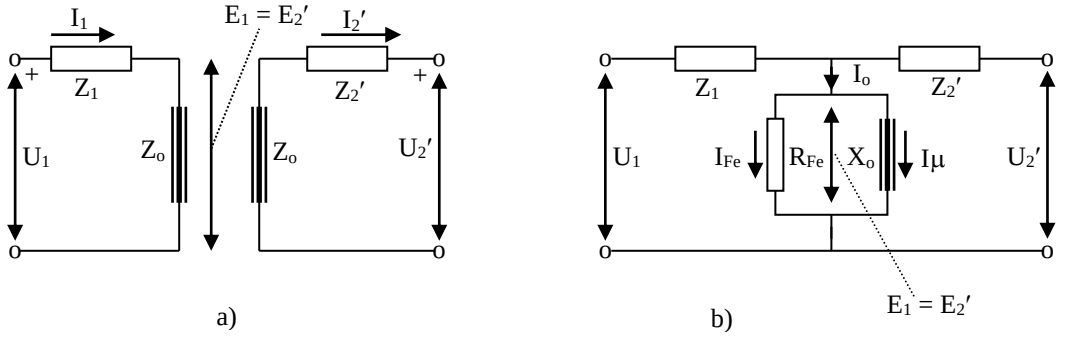
Struja praznog hoda je jednaka:

$$\underline{I}_o = \underline{I}_\mu + \underline{I}_{Fe} \Rightarrow I_o = \sqrt{I_\mu^{\,2} + I_{Fe}^{\,2}}$$

Redovito je $I\mu >> I_{Fe} \Rightarrow I_o \approx I_\mu$, što je i cilj (to se ostvaruje specijalnim trafolimovima).

EKVIVALENTNA ŠEMA REALNOG TRANSFORMATORA

Na slici 68 je data električna šema realnog transformatora sa redukovanim sekundarnim veličinama. Pomoću ove šeme mogu se objasniti sva fizička dešavanja u transformatoru, nezavisno od njegovog stepena opterećenja.



Sl.68. a) električna šema realnog transformatora;
b) nadomesna (ekvivalentna) šema realnog transformatora

Prema slici je:

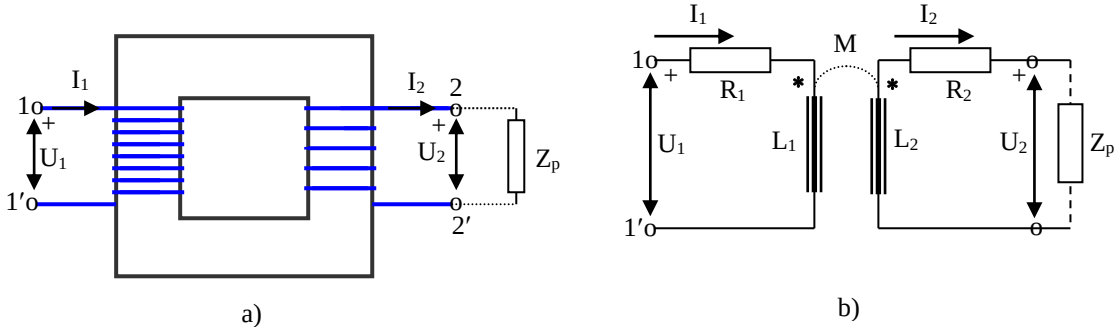
-Z_1 ..... impedansa primarnog namotaja N_1 ($\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$)
-Z_2' ..... redukovana impedansa sekundarnog namotaja na primar N_2 ($\underline{Z}_2' = R_2' + jX_2'$)
-R_{Fe} .... ekvivalentni (nadomesni) otpor gubitaka u gvožđu
-X_o ..... ekvivalentni induktivni otpor sa odgovarajućom međusobnom induktivnošću ($X_o = \omega L_m \cdot m$).

11.5. TRANSFORMATORI U LINEARNOM REŽIMU RADA (VAZDUŠNI)

Transformatori velikih snaga zbog različitog opterećenja feromagnetne jezgre, jezgra ima različitu magnetnu permeabilnost, što dovodi do toga da se pri promeni opterećenja (jačine struje) menja i magnetna provodnost, odnosno induktivnost namotaja. Kod takvih transformatora proračun je dosta otežen, pa se raznim aproksimacijama nastoji rad svesti na radni linearni režim.

Vazdušni transformatori (poneki i merni koji koriste kao komponente elektronske uređaje) rade u lionearnom režimu rada (magnetna permeabilnost konstantna, dakle, induktivnost ne zavisi od opterećenja).

Na slici 69 prikazan je transformator i njegova električna šema. Referentni smerovi za napon i struju primara su kao da je primar prijemnik (on uzima energiju) a za napon i struju sekundara kao da je on generator (sekundar daje energiju).



Sl.69. a) transformator i b) električna šema

Pošto su primar i sekundar induktivno povezani dolazi do međusobne induktivnosti, koja je takvog smera da im se fluksevi međusobno suprostavljaju. Zbog toga su zvezdice postavljene tako da je međusobna induktivnost L_m negativna, tj. $L_m < 0$ (umesto L_m često se uzima oznaka M).

Na osnovu električne šeme transformatora i induktivno spregnutih kola, koristeći drugi Kirhofov zakon, dolazimo do osnovnih jednačina transformatora:

$$\underline{U}_1 - \underline{I}_1\underline{Z}_{11} + \underline{I}_2\underline{Z}_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_{11} - \underline{I}_2\underline{Z}_{12}}$$

$$\underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_{22} - \underline{I}_1\underline{Z}_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\underline{U}_2 = \underline{I}_1\underline{Z}_{21} - \underline{I}_2\underline{Z}_{22}} \text{ , gde je } \mathbf{U_2 = I_2 Z_p}$$

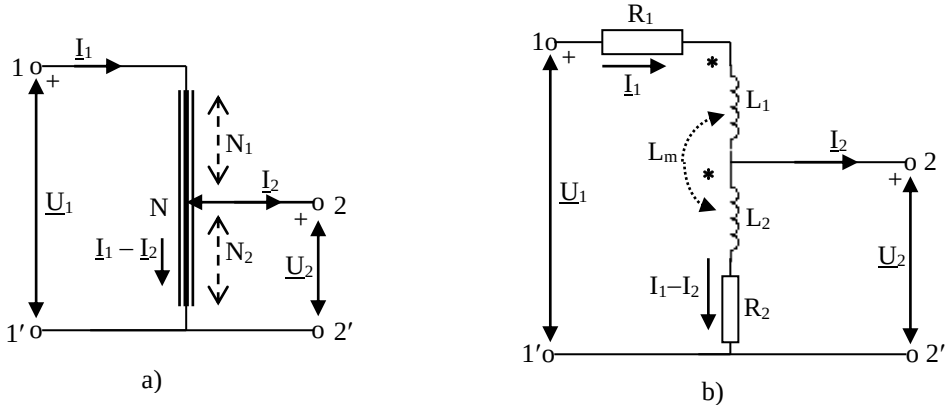
U ovim jednačinama transformatora je:

$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2$ i $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_m = j\omega|L_m|$ ($Z_m = j\omega|M|$),

Z_p je impedansa potrošača koja se veže na sekundar transformatora.

Navedene relacije se mogu koristiti kod svih vrsta transformatora sa linearnim režimom rada (transformatori bez magnetne jezgre, autotransformator , specijalni realni transformatori koji se svode na idealni transfo itd.).

AUTOTRANSFORMATORI



Sl.70. a) autotransformator; b) električna šema autotransformatora

Autotransformatori su poseban oblik transformatora sa jednim namotajem (štedni transformator) I kliznim kontaktom, kao što je prikazano na slici 70.

Koristeći električnu šemu jednačine autotransformatora imaju sledeće jednačine:

$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\cdot(R_2 + j\omega L_2) + (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\cdot j\omega L_m + \underline{I}_1\cdot j\omega L_m$ ……(1) i

$\underline{U}_2 = (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\cdot (R_2 + j\omega L_2) + \underline{I}_1\cdot j\omega L_m$ ……..……(2)

Treba imati na umu da se usled međusobne induktivnosti fluksevi potpomažu (sabiraju) jer su struje u namotajima N_1 i N_2 ($\underline{I}_1$ i $\underline{I}_1 - \underline{I}_2$) istog smera. Dakle, $L_{12} = L_{21} = L_m > 0$, pa se pad napona na namotaju usled induktivnosti, kao i međusobne induktivnosti sabira.

Sređivanjem predhodnih jednačina dobije se:

$\underline{U}_1 = [R_1 + R_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2L_m)]\cdot\underline{I}_1 - [R_2 + j\omega(L_2 + L_m)]\cdot\underline{I}_2$ ..... (1)

$\underline{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 + L_m)]\cdot\underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2)\cdot\underline{I}_2$ .....(2).

11.6. STEPEN KORISNOG DEJSTVA TRANSFORMATORA

Stepen korisnog dejstva je odnos između predane i primljene snage. Ako primljenu snagu obeležimo sa P_1 a predanu sa P_2, stepen korisnosti iznosi:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_g} = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}},$$

gde je P_g ukupna snaga gubitaka koji se sastoje od toplotnih gubitaka P_{Cu} u namotajima usled aktivne otpornosti (Džulovi gubici) i gubitaka u jezgri P_{Fe} (vrtložna struja i histerezis).

Stepen korisnosti kod transformatora je vrlo velik. On iznosi od 95 do 99 %.

Z A D A C I :

11.1. Primar nekog transformatora ima 1 000 navojaka tanke žice, a sekundar 25 navojaka.

a) Koliki je napon na krajevima sekundara ako se primar priključi na gradsku mrežu napona 220 V, ako su gubici u transformatoru zanemarljivi (idealan transformator)
b) Ako je jačina struje u primaru 1 A, kolika je struja sekundara.

11.2. Na koliki napon treba priključiti primar transformatora električnog zvona ako na sekundaru ima 20 puta manje navojaka nego na primaru? Za rad zvona potreban je napon od 6 V. Transformator je idealan.

11.3. Odrediti snagu sekundara transformatora koji ima 1 500 navojaka na primaru, a 50 navojaka na sekundaru. Primar je priključen na naizmenični napon od 120 V, pri čemu kroz sekundar protiče struja od 20 A. Stepen korisnog dejstva ovog transformatora iznosi 0,8 ($\cos \varphi_1 = \cos\varphi_2 = 1$).

11.4. Odrediti stepen korisnog dejstva transformatora ako je primar priključen na napon od 220 V, pri čemu kroz njega protiče struja od 2 A. Kroz sekundar protiče struja od 18 A, a napon na njegovim krajevima je 18 V. Faktor snage primara jednak faktoru snage sekundara ($\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \cos \varphi$).

11.5. Kada se primar transformatora priključi na naizmenični izvor, na krajevima sekundara pojavi se napon od 13,2 V, a kada se na isti izvor priključi sekundar na krajevima primara se pojavi napon od 120 V. Odrediti odnos broja namotaja primara i sekundara. Gubici su zanemarljivi.

11.6. Transformator je upotrebljen za prenošenje električne snage (energije) na daljinu. Primar je vezan u električno kolo centrale, a za sekundar su vezani provodnici dalekovoda. Koliko puta će se smanjiti gubici električne snage zbog zagrevanja žica dalekovoda ako se napon na sekundaru poveće hiljadu puta? U oba slučaje se prenosi ista vrednost snage ($\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = 1$).

11.7. Pomoću transformatora se snižava naizmenični napon od $U_1 = 220$ V na $U_2 = 4$ V ($\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = 1$).

a) Odrediti odnos transformacije m
b) Kada se na sekundar priključi sijalica, u kom odnosu stoje jačine struja primara i sekundara ako je stepen korisnog dejstva transformatora: 1) 100 % (1) i 2) 75 % (0,75)?

11.8. Kolika je efektivna vrednost jačine struje I_1 u primaru idealnog transformatora i I_2 u sekundaru ako je on priključen na napon od 3 000 V? Odnos broja navojaka primara i sekundara se odnosi: $N_1:N_2 = 150:11$, a transformator troši prividnu snagu od 10 kVA.

11.9. Da bi se odredio broj navojaka u primaru i sekundaru nekog idealnog transformatora koji napon od 220 V smanjuje na 20 V, namota se na sekundaru dodatnih 10 navojaka i pri tome izmeri na krajevima sekundara napon od 22 V. Odrediti broj navojaka u primaru i sekundaru.

11.10. Primar idealnog transformatora sadrži 100 navojaka i priključen je na napon 200 V čija je frekvencija 50 Hz. Sekundar transformatora ima 800 navojaka. Krajevi sekundara spojeni su sa kolom koje čine redno vezani kondenzator od 2 μF i kalem. Ukupni termogeni otpor sekundara je 100 Ω, a ukupna induktivnost 3 H. Kolika je jačina efektivne struje u sekundaru?

11.11. Električna snaga se prenosi na daljinu tako što se u elektrani pomoću transformatora poveća napon nekoliko hiljada puta i tako se struja visokog napona prenosi dalekovodima do potrošača, gde postoji drugi transformator koji snižava napon na potrebnu vrednost.
Ako je snaga koju razvija elektrana 6 kW, a napon na sekundaru prvog transformatora 20 kV, i ako se električna snaga prenosi bakarnim provodnicima na rastojanje 50 km, koliko navojaka treba da ima sekundar drugog transformatora? Broj navojaka primara drugog transformatora je 4 000 , a napon na njegovom sekundaru treba da je 200 V. Poprečni presek provodnika od bakra je 0,5 cm^2, a specifična el. otpornost $\rho_{Cu} = 0{,}0178\ \Omega mm^2/m$. Gubici u transformatoru su zanemarljivi (idealni transformatori) i oni rade u praznom hodu.

11.12. Gubici snage u transformatoru su 8 %. Ako je primarni kalem priključen na napon od 150 V, kroz njega protiče struja jačine od 2 A.
Koliki je napon na sekundaru ako kroz potrošač protiče struja od 0,1 A ($\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$)?

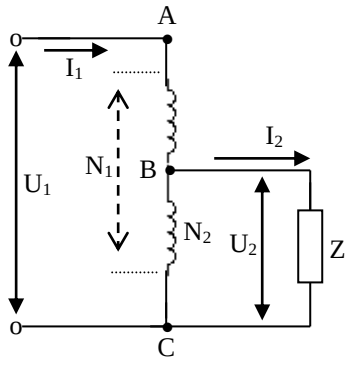
11.13. Idealni transformator od 200 kVA, napona 6 600 / 400 V i učestanosti 50 Hz, ima 80 navojaka na sekundaru. Odrediti:

a) primarnu i sekundarnu struja;
b) broj primarnih navojaka;
c) maksimalni fluks transformatora.

11.14. Idealni transformator ima izlaznu snagu 100 kVa, sekundarni napon 400 V, broj navojaka na primaru 200, broj navojaka na sekundaru 40. Odrediti:

a) napon primara;
b) primarnu i sekundarnu struju pri nominalnom opterećenju;
c) sekundarnu struju pri opterećenju od 50 kW sa faktorom snage $\cos \varphi_2 = 0{,}8$.

11.15.



Sl.11.15.

Na slici 11.15 prikazan je jedan autotransformator sa sledećim podacima:
$U_1 = 127$ V; $U_2 = 100$ V; $I_2 = 10$ A; $N_1 = 240$ navojaka.
Ako se uzme u obzir da se struja praznog hoda I_o može zanemariti, odrediti:

a) struju koju autotransformator uzima iz mreže;
b) broj navojaka sekundara N_2;
c) presek namotaja između tačaka A i B i tačaka B i C ako je dozvoljena gustina struje u provodnicima $J = 2$ A/mm^2 .

11.16. Sekundarni napon kod idealnog autotransformatora je $U_2 = 1{,}25\ U_1$. Prenosni odnos je $m = 0{,}8$. Kolika je snaga ovoga transformatora u odnosu na snagu transformatora sa odvojenim navojima primara i sekundara ?

11.17. Transformator sadrži na primarnoj strani 400 navojaka, a na sekundarnoj 1 000 navojaka. Poprečni presek gvožđa jezgra sa izolacijom limova iznosi $S = 63$ cm^2. Ako su primarni navojci priključeni na napon $u = 705 \sin 314\ t$ [V], odrediti:

a) najveću vrednost magnetne indukcije u gvožđu jezgra, ako na izolaciju i magnetno rasipanje otpada 5 %;
b) sekundarni napon.

11.18. Primarna strana iealnog transformatora ima $N_1 = 620$ navojaka, građena je za napon $U_1 = 220$ V. Odrediti:

a) broj navojaka sekundara za napone na sekundaru $U_2 = 3; 5$ i 8 V,
b) struju primara ako je struja sekundara $I_2 = 1; 0{,}8$ i $0{,}4$ A,
c) prividnau snagu S ako je korisnost $\eta = 1$, a frekvencija $f = 50$ Hz ,
d) presek jezgra ako je $B_m = 1$ T.

11.19. Odrediti broj navojaka primara i sekundara za iealni transformator sa sledećim podacima:

a) $U_1 = 220$ V; $U_2 = 42$ V; $S_{Fe} = 80$ cm^2; $B_m = 0{,}9$ T; $I_2 = 20$ A; $f = 50$ Hz;
b) $U_1 = 300$ V; $U_2 = 60$ V; $S_{Fe} = 105$ cm^2; $B_m = 0{,}82$ T; $I_2 = 50$ A; $f = 50$ Hz;
c) $U_1 = 500$ V; $U_2 = 110$ V; $S_{Fe} = 130$ cm^2; $B_m = 0{,}8$ T; $I_2 = 90$ A; $f = 50$ Hz;
d) $U_1 = 750$ V; $U_2 = 220$ V; $S_{Fe} = 150$ cm^2; $B_m = 0{,}75$ T; $I_2 = 130$ A; $f = 50$ Hz.

11.20. Odrediti struje i prividnu snagu primara transformatora za predhodni zadatak.

11.21. Idealni transformator sa vazdušnom jezgrom ima induktivnost primara $L_1 = 6$ mH, odnos transformacije $m = 3$ i koeficijent induktivne povezanosti $k = 0{,}1$. Kolika je induktivnost drugog kalema L_2 i uzajamna induktivnost obaju kalemova L_m ?

11.22. Neki transformator ima na primaru $N_1 = 200$ navojaka, a na sekundaru $N_2 = 50$ navojaka. Primar transformatora je priključen na napon $U_1 = 100$ V, a sekundar je opterećen termogenim otpornikom $R = 1\ \Omega$. Otpor transformatorskih namotaja i gubici u gvožđu su zanemarljivi. Odrediti U_2, I_1, I_2 i magnetni fluks Φ_m ako je frekvencija mreže $f = 50$ Hz.

11.23. Idealni transformator ima zadatak da podesi otpor potrošača od $R = 5\ \Omega$ na unutrašnji otpor izvora koji iznosi $R_i = 5\,000\ \Omega$. Treba odrediti koliki prenosni odnos transformacije m treba da ima ovaj transformator i koliki je broj navojaka na sekundaru N_2 ako je broj navojaka na primaru $N_1 = 2\,000$.

11.24. Za podizanje napona neke mreže od $U_1 = 4\,700$ V na $U_2 = 5\,000$ V potreban je autotransformator (transformator u štednoj vezi).
Odrediti za koju snagu S treba biti dimenzioniran ovaj transformator ako je $S_2 = 2\,000$ kVA?

11.25. Autotransformator ima na primaru $N_1 = 500$ navojaka, a na sekundaru $N_2 = 550$ navojaka. Koliki će se dobiti napon na sekundaru U_2 ako bi se na primar priključio napon $U = 200$ V ? Za koliku snagu P treba dimenzionirati transformator da bi se dobila snaga na sekundaru $P_2 = 10$ kW ?

11.26. Transformator sa vazdušnom jezgrom priključen je na napon $U_1 = 5$ V kružne učestanosti $\omega = 8 \cdot 10^6$ rad/s. Navoji transformatora imaju podatke: $L_1 = 4$ mH, $L_2 = 8$ mH, $L_m = 1$ mH, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 80\ \Omega$.
Na sekundaru je priključen potrošač čija je otpornost jednaka $R = 200\ k\Omega$.
Izračunati napon na sekundaru U_2, struju primara i sekundara I_1 i I_2 .

11.27. Transformator sa vazdušnom jezgrom ima primarni namotaj sa induktivitetom $L_1 = 3$ mH, sekundarni sa $L_2 = 4$ mH, a faktor induktivne povezanosti je $k = 0{,}06$. Otpori namotaja su $R_1 = 60\ \Omega$ i $R_2 = 100\ \Omega$.
Sekundarni namotaj se optereti prijemnikom čija je impedansa $\underline{Z} = (2\,000 + j500)\ [\Omega]$, a kružna učestanost mreže je $\omega = 5\,000$ rad/s.
Odrediti međusobnu induktivnost L_m (M) i odnos između struja I_1/I_2 i napona U_1/U_2.

11.28. Napisati izraz za trenutnu vrednost indukovane ems e_1, primara realnog transformatora , ako je poznat broj navojaka $N = 500$ i izraz za promenu magnetnog fluksa $\phi = 4 \sin (314t + 23°)$ [mWb].

11.29. Primar idealnog transformatora sa $N_1 = 500$ navojaka priključen je na napon $u_1 = 222\sqrt{2} \sin 314t$ [V]. Odrediti trenutnu vrednost izraza za magnetni fluks zanemarujući termogenu otpornost kalema i magnetno rasipanje.

11.30. Sa ciljem približnog određivanja odnosa transformacije izvršena su dva merenja primarnog i sekundarnog napona pri RL opterećenju. Pri prvom merenju je impedansa potrošača tri puta manja od impedanse pri drugom merenju.
Kako se odnose odnosi transformacije, ako je $m = U_1/U_2$ a $m' = U_1'/U_2'$?

11.31. Zaokružiti za koju vrednost, od ponuđenih vrednosti, impedanse potrošača Z najtačnije odgovara sledeća relacija: $\dfrac{I_1}{I_2} \approx \dfrac{N_2}{N_1}$, gde je Z_n nominalna vrednost impedanse potrošača.

a) $Z = Z_n$
b) $Z = 2Z_n$
c) $Z = Z_n/2$
d) $Z = 0$
e) $Z = \infty$

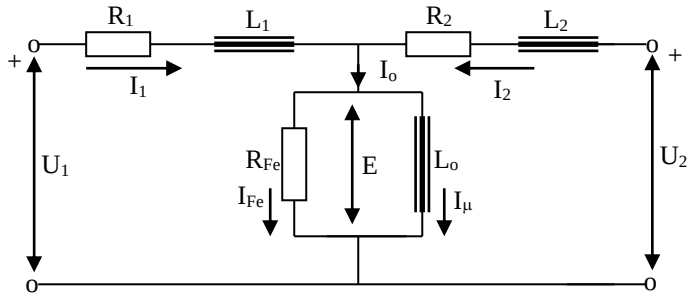
Odgovor obrazložiti.

11.32. Zaokružiti za koju vrednost, od ponuđenih vrednosti, impedanse potrošača Z najtačnije odgovara sledeća relacija: $\dfrac{U_1}{U_2} \approx \dfrac{N_1}{N_2}$, gde je Z_n nominalna vrednost impedanse potrošača. Odgovor obrazložiti.

a) $Z = Z_n$
b) $Z = 2Z_n$
c) $Z = Z_n/2$
d) $Z = 0$
e) $Z = \infty$

11.33. Nactrati ekvivalentnu električnu šemu realnog transformatora sa gvozdenom jezgrom i objasniti sve elemente na toj šemi.

11.34. Koji se od parametara na nadomesnoj električnoj šemi, prema slici 11.33, menja sa promenom frekvencije f na primaru transformatora, uz nepromenjeni primarni napon?



Sl.11.34.

11.35. Nacrtati fazorski dijagram za realni transformator sa gvozdenom jezgrom, čija je nadomesna šema data na slici 11.34.

11.36. Kako se manja fazni pomak između struje i napona na primaru transformatora, ako se jezgro transformatora, koja je napravljena od transformatorskih limova, zameni punim jezgrom od istog materijala?

11.37. Gubici transformatora u praznom hodu su jednaki:

a) gubicima u namotajima transformatora
b) gubicima zbog histereze i vrtložnih struja u jezgri transformatora (gvožđu)
c) gubicima zbog magnetnog rasipanja i vrtložnih struja u jezgri
d) gubicima zbog histereze i zagrevanja primarnog kalema
e) gubicima zbog rasipanja i aktivnog otpora oba namotaja.

Tačno rešenje zaokružiti.

11.38. Gubici transformatora u režimu kratkog spoja jednaki su:

a) gubicima u namotajima transformatora (oba)
b) gubicima zbog histereze i vrtložnih struja u jezgri transformatora
c) gubicima zbog histereze i zagrevanja primarnog namotaja transformatora
d) gubicima zbog magnetnog rasipanja i vrtložnih struja u jezgri
e) gubicima zbog rasipanja i aktivnom otporu u namotajima (oba namotaja)

Tačno rešenje zaokružiti.

11.39. Transformator je radio u nominalnom režimu rada. Ako se nakon toga otpor potrošača poveća tri puta, kako će se promeniti gubici u gvožđu P_{Fe} i gubici i bakru (namotaju transformatora) P_{Cu}?

11.40. Snagu koju uzima transformator u režimu kratkog spoja troši se uglavnom na:

a) zagrevanje namotaja
b) zagrevanje jezgre zbog vrtložnih struja i histereze
c) zagrevanje sekundarnog namotaja i na gubitke zbog vrtložnih struja
d) zagrevanje primarnog namotaja i na gubitke zbog vrtložnih struja
e) gubitke u rasipnim induktivnostima

Tačno rešenje zaokružiti.

12. P O L I F A Z N I – V I Š E F A Z N I S I S T E M

12.1. O S N O V N I POJMOVI O POLIFAZNOM SISTEMU

Sva kola do sada rešavana imala su generatore u kojima se indukovala samo jedna elektromotorna sila. Takvi generatori se mogu nazvati **jednofaznim (monofaznim) generatorima**. Ovi generatori sadrže jedan navoj u kojem se rotira magnetno polje. Usled promene magnetnog polja po navojku, u njemu se indukuje ems, kao što je objašnjeno prema slici 1 (vidi: Dobijanje naizmenične struje). Ako se u istom promenljivom magnetnom polju nađe više električno odvojenih navoja, sa određenim prostornim pomakom, kao na slici 2, u svakom od tih navojaka se indukuje po jedna ems. Na taj način nastaje više elektromotornih sila istih učestanosti, ali sa određenim faznim pomakom. Ovakav sistem, u kojem nastaje više ems istih učestanosti različitih faznih uglova (sa faznim pomakom), naziva se **višefazni ili polifazni sistem.** Kako na krajeve takvih generatora možemo priključiti električna kola, tada je broj tih kola jednak broju ems, tj. broju faza višefaznog sistema.

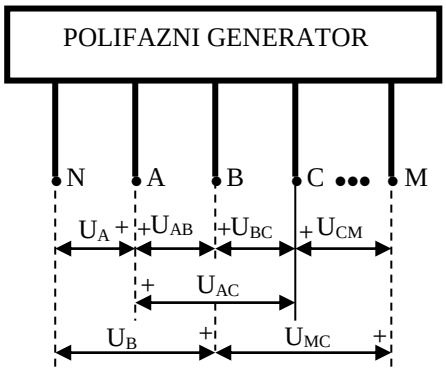
Polifazni sistem, u odnosu na monofazni sistem je u sledećoj prednosti:

1. Sa polifaznim sistemom se može obrazovati obrtno magnetno polje,
2. Konstantna snaga
3. Manji broj prenosnih provodnika.

Rotor elektromotora obrće obrntno magnetno polje statora, što znači da motori rade zahvaljujući polifaznom sistemu (Teslinom obrtnom magnetnom polju). Zahvaljujući faznom pomaku između ems (napona), snaga kod polifaznog sistema je konstantna, što nije slučaj kod jednofaznog sistema, gde se snaga vremenski menjala (oscilatorno). Obe ove navedene prednosti su vrlo značajne sa stanovišta rada motora. Manji broj provodnika sa višefaznim sistemom je omogućen time što se kao nulti provodnik uzima samo jedan (zajednički) provodnik, a ponekad se on može u potpunosti izbeći (kod simetričnih sistema). Na ovaj način se, pored uštede materijala, smanjuju Džulovi gubici na prenosnim provodnicima.

Usled navedenih prednosti višefaznog sistema u odnosu na jednofazni, višefazni sistem je skoro u potpunosti potisnuo jednofazni sistem iz upotrebe.

U praksi se od višefaznih sistema uglavnom koriste dvofazni i trofazni sistem. Dvofazni sistem ima primenu kod servomotora u automatici i tehnici regulacije, dok trofazni sistem se isključivo koristi u energetici (prenos energije na velike udaljenosti, rad trofaznih elektromotora).



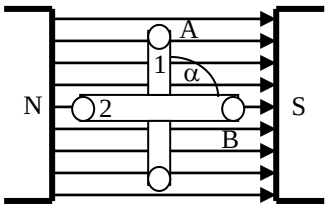
Sl.71.

Polifazni generator je šematski prikazan na slici 71. Priključci generatora, obeleženi sa A, B, ..., M, nazivaju se **faze (fazni provodnici)**, a uzemljeni priključak, koji je obeležen sa N, naziva se **nula (nulti provodnik)**. Učestanost napona između svih faza i neutralnog provodnika je ista. Naponi obeleženi sa U_A, U_B, ..., U_M, nazivaju se **fazni** naponi, a naponi obeleženi sa U_{AB}, U_{AC}, U_{MC}, itd. nazivaju se **međufazni naponi**.

Praktično, u elektrotehnici, sem dvofaznog sistema) se koriste polifazni generatori kod kojih je fazna razlika između faznih napona ista, i iznosi $2\pi/m$ (m je broj faza), a amplitude svih tih faza su jednake.

12.2. D V O F A Z N I S I S T E M

Ako se dva namotaja prostorno pomerena za $\pi/2$, kao što je prikazano na slici 72, obrću ugaonom brzinom ω u magnetnom polju, u namotajima će se indukovati ems koje su fazno pomerene za $\pi/2$. Isto će se dogoditi ako se obrće magnetno polje a nomotaji su u stanju mirovanja.



Sl.72.

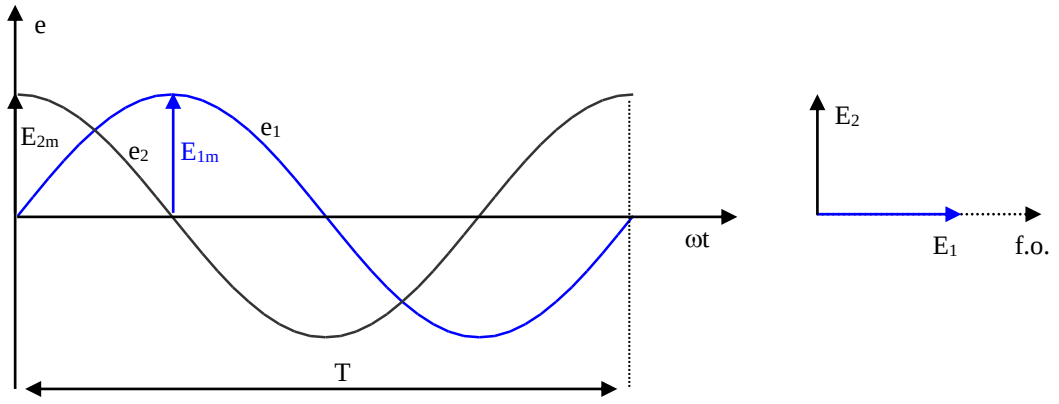
Namotaji 1 i 2 mogu biti električno povezani (redna veza), a i ne moraju, što ne utiče na iznos pojedinačnih indukovanih ems u njima. Oba namotaja su mehanički povezana, pa se rotiranjem jednog namotaja rotira i drugi istom ugaonom brzinom. Ako si i brojevi navojaka isti, tada će i amplitude indukovanih ems bite iste.

Iznos indukovanih ems, po navojima iznosi:

$e_1 = E_m \sin \omega t$ i

$e_2 = E_m \sin (\omega t + \pi/2) = E_m \cos \omega t$

Na slici 73 a dat je vremenski indukovanih ems u zavisnosti od ugaone brzine. Svaki od ovih namotaja možemo posmatrati posebno, kao jednofazni generator. U jednom generatoru se indukuje ems e_1 a u drugom e_2. Vremenski pomak između ovih ems je uvek isti, i on u ovom slučaju iznosi T/4, gde ems e_2 prednjači ems e_1. Fazni pomak, prikazan na slici 73 b, iznosi $\pi/2$.

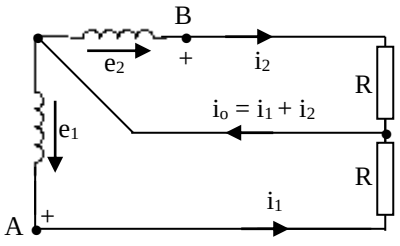


a) vremenski (grafički) dijagram ems

b) fazorski dijagram ems

Sl.73.

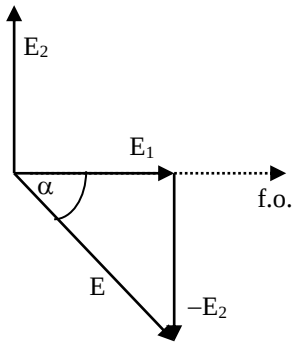
Priključenjem potrošača na krajeve ovih namotaja, usled ems e_1 i e_2 kroz potrošače će proticati struje i_1 i i_2 čiji se smer poklapa sa smerom ems.



Sl.74.

Ako su namotaji električno odvojeni, tada je svaki od tih namotaja u prostom kolu sa potrošačem, pa nastaju takva dva električno odvojena kola. U praksi se namotaji najčešće redno vežu, pa je jedna tačka (spojno mesto) zajednička. Na ovaj način umesto četiri provodnika potrebna su tri, što je prikazano na slici 74. Kroz zajednički provodnik će proticati ukupna struja, koja je jednaka pojedinačnih struja.

Kod vektorskog predstavljanja ems E_1 i E_2 vrlo je bitno da se predhodno znaju početci i krajevi namotaja. Početke obeležavamo štampanim slovima (A, B,C, ..., N), a krajeve sa malim slovima (x,y,z, ...,n). Smerovi ems, kod crtanja fazorskog dijagrama, u praksi se uvek uzimaju da su ka početku navoja (ka A, B, C ..). Tako nastaje fazorski dijagram, prema slici 75, koji je već dat na slici 73 b.



Sl.75.

Primenom drugog Kirhofovog zakona, prema slici 74, sledi:
$\underline{E}_{AB} - \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = 0 \Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_{AB} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2$..

Za jednake efektivne vrednosti ems E_1 i E_2, tada je efektivna vrednost napona između tačaka A i B (navoja na početku) jednaka:

$$E = \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2}} = \sqrt{2} \cdot E_1 .$$

Ems (napon), između dveju faza naziva se međufazna ems (napon). Vidimo da je međufazni napon veći od faznog napona (napon na krajevima jedne faze) za $\sqrt{2}$ puta. To znači da će i struja kroz prijemnik koji se priključi na međufazni napon biti veća od struje prijemnika koji se priključi na fazni napon za $\sqrt{2}$ puta.

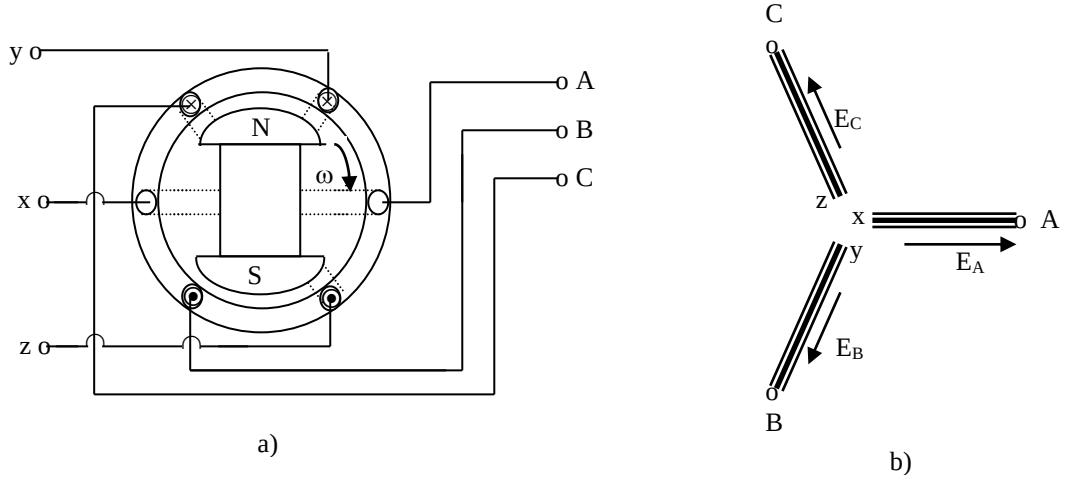
Analitički izraz za ems E (međufazni napon) je:
$e = E_m \sin (\omega t - \pi/4)$

Dakle, dvofaznim sistemom, imamo mogućnost korišćenja faznog i međufaznog napona gde je međufazni napon veći od faznog za $\sqrt{2}$ puta. Dvofazni sistem još omogućuje i stvaranje obrtnog magnetnog polja na osnovu kojeg rade naizmenični motori (Zahvaljujući našem naučniku Nikoli Tesli).

12.3. T R O F A Z N I S I S T E M

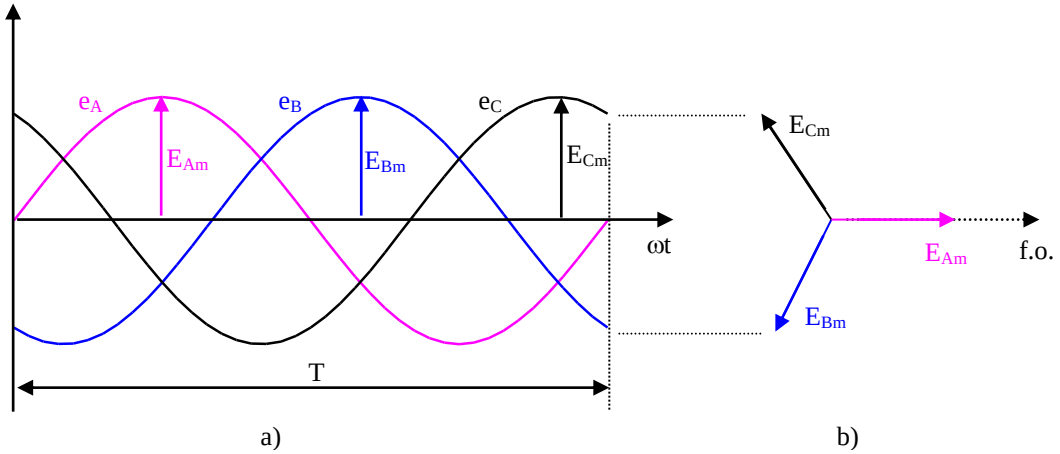
Trofazni sistem stvara trofazni generator, koji se sastoji od tri namotaja smeštena po obimu statora, sa prostornim pomakom od $2\pi/3$. Rotor, koji je u stvari magnet (stalni ili elektromagnet) se obrće u prostorno pomerenim namotajima i u njima indukuje ems koje su fazno pomerene za $2\pi/3$.

Uprošćena slika trofaznog sinhronog generatora je data na slici 76 a. Slika 76 b predstavlja samo namotaje čiji su početci obeleženi slovima A, B i C, a krajevi sa x, y i z.



Sl.76.

Obrtanjem rotora (magnetnog polja) u namotajima A-x, B-y i C-z se indukuju ems e_A, e_B i e_C, koje su prikazane grafički (vremenski) na slici 77 a. Na osnovu vremenskog dijagrama, kao i na osnovu položaja namotaja u obrtnom magnetnom polju prikazan je i fazorski dijagram na slici 77 b. Očito je da su vektori ems fazno pomereni za $2\pi/3$, kao i prostorni pomak namotaja. Na osnovu ove konstatacije može se fazorski dijagram elektromotornih sila predstaviti isto kao i namotaji, tj. pravac vektora ems je isti kao i pravac namotaja. Smer tih vektora se poklapa sa smerom početka namotaja (ka priključcima A, B i C).



Sl.77.

Analitički izrazi za indukovane ems po navojima su:

$$e_A = E_{Am} \sin \omega t = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_{Bm} \sin (\omega t - 2\pi/3) = E_m \sin (\omega t - 2\pi/3) \text{ i}$$

$$e_C = E_{Cm} \sin (\omega t - 4\pi/3) = E_m \cos (\omega t + 2\pi/3)$$

jer je $E_{Am} = E_{Bm} = E_{Cm} = E_m$.

Lako se može uočiti, bez posebnog dokazivanja (izvođenja), sa vremenskog dijagrama da je:

$$e_A + e_B + e_C = 0,$$

a sa fazorskog:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0.$$

12.3.1. VEZIVANJE NAMOTAJA TROFAZNIH GENERATORA

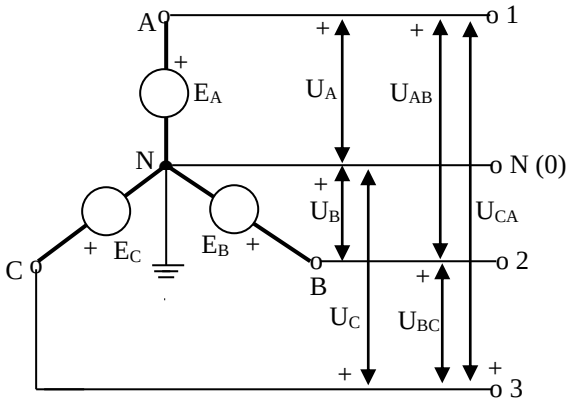
Trofazni generator bi mogao imati šest priključaka, vezanih za parove krajeva namotaja. Na ove priključke, pomoću šest provodnika bise mogli vezati razni potrošači. U praksi se, umesto šest priključaka, generatori izvode sa tri ili četiri priključka, čime se povećava ušteda u materijalu (linijskim provodnicima). To se postiže tako što se namotaji generatora vežu u zvezdu ili trougao (petlju).

12.3.1.1. Veza namotaja trofaznih generatora u zvezdu

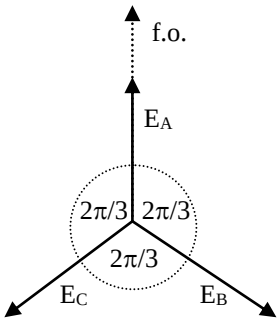
Najčešća veza namotaja trofaznih generatora je u zvezdu, što je prikazano na slici 78 a. Zajednička tačka sva tri namotaja označava se sa N (ili 0), i naziva se **neutralna tačka ili zvezdište**, i uvek se uzemljuje. Ovako povezani generator ima četiri provodnika (priključka). Provodnik koji spaja zvezdište naziva se **nulti provodnik** (neutralni provodnik) ili ponekad samo „ **nula** ". Tri provodnika koji su vezani za neuzemljene krajeve namotaja nazivaju se **fazni provodnici**, ili ponekad „ **faze** ". Usvojene oznake kod nas za faze su **A, B** i **C**, pri čemu se smatra da napon faze A prednjači naponu faze B za $2\pi/3$, a naponu faze C za $4\pi/3$.

Zvezdište je uzemljeno, te su sve tačke nultog provodnika u svakom trenutku na potencijalu Zemlje, uz pretpostavku da kroz nulti provodnik ne teče struja (simetrično opterećenje).

Ako generator radi u praznom hodu (potrošači nisu uključeni), u namotajima generatora nema struje, samim tim nema ni pada napona na namotajima generatora. Zbog toga je napon na krajevima svakog od namotaja jednak ems posmatranog namotaja. Napon na krajevima svake faze naziva se **fazni napon**, pa tako imamo tri fazna napona koji su fazno pomereni za $2\pi/3$, i to U_A, U_B i U_C. Fazorski dijagram faznih napona je dat na slici 78 b. Redovito se u faznu osu postavi napon U_A, pa je fazna osa normala na dosadašnji način njenog predstavljanja. Ništa se neće promeniti ako se kompletan dijagram zarotira za $\pi/2$ u desno, čime će se fazna osa i napon U_A naći u horizontali (dosadašnji način predstavljanja).



a)

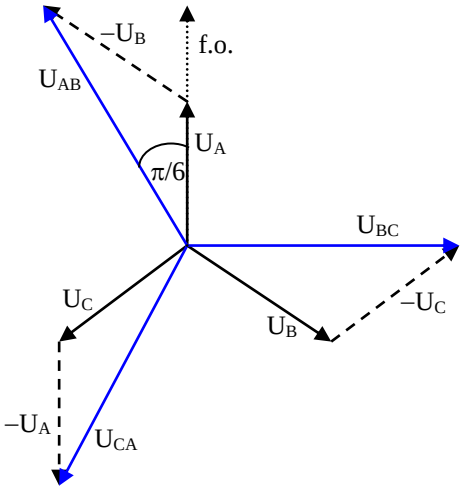


b)

Sl.78.

Osim faznih napona, tj. napona između faznih provodnika i neutralnog provodnika, postoje i **međufazni** (linijski) naponi. Međufazni naponi su naponi između dve faze, a to su U_{AB}, U_{BC} i U_{CA}. Koristeći drugi Kirhofov zakon, prema slici 78 a, linijski naponi iznose:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B;\ \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C \quad \text{i} \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$$



Sl.79.

Na osnovu navedenih jednačina može se nacrtati fazorski dijagram, koji je prikazan na slici 79. Iz fazorskog dijagrama se jasno vidi da su efektivne vrednosti međufaznih napona međusobno jednake i fazno pomerene za $2\pi/3$.

Efektivna vrednost faznih napona najčešće se obeležava sa U_f a međufaznih sa U (bez indeksa).

Koristeći fazorski dijagram lako se mogi svi naponi predstaviti kompleksno, pa je:

$\underline{U}_A = U_f \cdot e^{j0}$; $\underline{U}_B = U_f \cdot e^{-j\,120}$; $\underline{U}_C = U_f \cdot e^{-j\,240}$;

$\underline{U}_{AB} = U \cdot e^{j\,30}$; $\underline{U}_{BC} = U \cdot e^{-j\,90}$; $\underline{U}_{CA} = U \cdot e^{-j\,210}$.

Iz jednakokrakog trougla

$$\left(\cos 30^\circ = \frac{U/2}{U_f} \Rightarrow U/2 = U_f \cos 30^\circ = U_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

sledi:

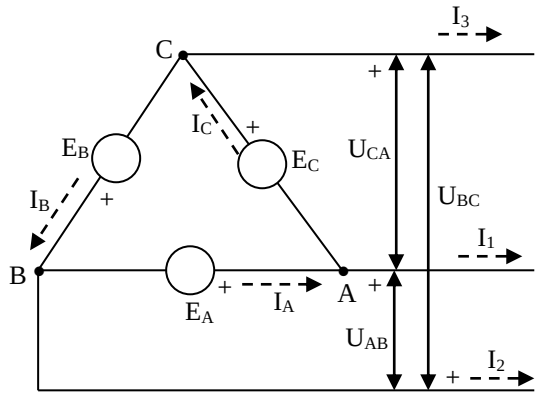
$$\boxed{U = \sqrt{3} \cdot U_f}$$

Dakle, kod veze trofaznih generatora u zvezdu, **međufazni napon je veći od faznog za $\sqrt{3}$ puta**. Ako na generator priključimo potrošač, kroz fazne provodnike će teći struje, koja će biti jednaka struji odgovarajućeg namotaja. To znači da su, kod veze namotaja u zvezdu, **linijske i fazne struje međusobno jednake**.

$$\boxed{U = \sqrt{3} \cdot U_f} \quad \text{i} \quad \boxed{I = I_f}$$

12.3.1.2. Vezivanje namotaja trifaznih generatora u trougao

Ova je veza, kod generatora, vrlo retka. Razlog je taj što kod ove veze nema neutralnog provodnika, pa ovaj sistem nema nulu. Šema po kojoj se namotaji generatora vežu u zvezdu data je na slici 80.



Sl.80.

Kod veze namotaja generatora u trougao fazni naponi generatora su ujedno i međufazni, pa je (u praznom hodu):

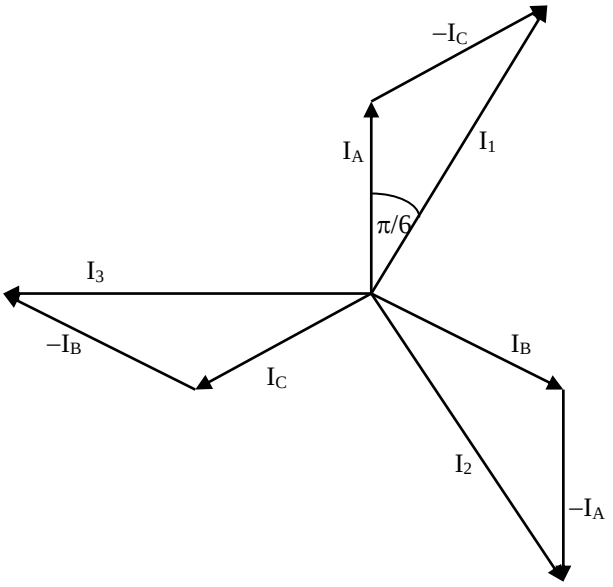
$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{BC} = \underline{E}_B$ i $\underline{U}_{CA} = \underline{E}_C$.

Ako generator vezan u trougao opteretimo simetričnim trofaznim potrošačem, tada će kroz namotaje generatora proticati fazne struje I_A, I_B i I_C, a kroz linijske provodnike struje I_1, I_2 i I_3. Fazne struje su istog smera kao i ems a linijske su ka potrošaču (jer se radi o generatoru).

Koristeći prvi Kirhofov zakon, sledi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_A - \underline{I}_C \; ; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_B - \underline{I}_A \quad \text{i} \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_C - \underline{I}_B.$$

Na osnovu veze generatora, prema slici 80, sledi fazorski dijagram struja, koji je prikazan na slici 81.



Sl.81.

Fazne struje se obeležavaju sa I_f, a linijske sa I ($I_A = I_B = I_C = I_f$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$), pa je prema fazorskom dijagramu na slici 81:

$$I = \sqrt{3}\, I_f$$

Dakle, kod veze navoja generatora u trougao, uz pretpostavku da su faze podjednako opterećene (simetričan sistem) **linijske struje su veće od faznih za $\sqrt{3}$ puta**, dok su **linijski i fazni naponi međusobno jednaki.**

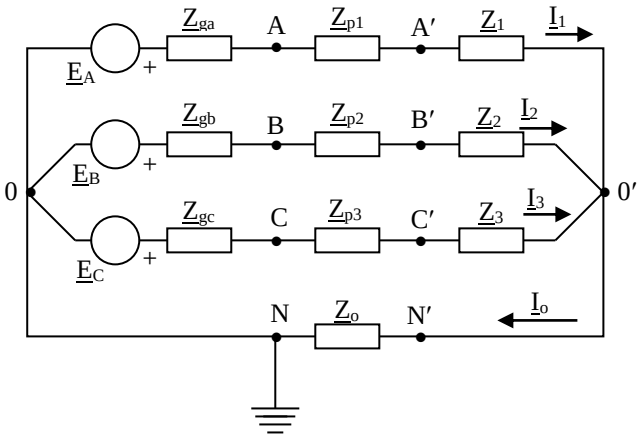
$$I = \sqrt{3}\, I_f \qquad \text{i} \qquad U = U_f$$

12.3.2. VEZIVANJE (TROFAZNIH) PRIJEMNIKA NA TROFAZNE GENERATORE

Namotaji trofaznog generatora su redovito vezani u zvezdu. Ako to nije slučaj, vezu namotaja trofaznih generatora iz trougla pretvori u zvezdu, te na taj način namotaji generatora su opet vezani u zvezdu. Zbog toga, bez obzira na vezu prijemnika, namotaje trofaznih generatora tretirati kao da su vezani u zvezdu. Trofazni prijemnici, ili grupa više jednofaznih prijemnika, na generator se mogu vezati u **zvezdu** i **trougao**.

Veza prijemnika u zvezdu

Veza prijemnika u zvezdu prikazana je na slici 82.



Sl.82.

Ako je sistem nesimetričan, što je redovito slučaj, tada se ovakva kola rešavaju složenim metodama (konturne struje ili zajedničkim naponom). Kod nesimetričnog sistema (različita opterećenja faza) između zvezdišta 0 i 0′, deluje napon U_o koji iznosi:

$$\underline{U}_o = \underline{U}_{o'o} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_o}$$

gde su Y_A, Y_B i Y_C ukupne admitanse faznih provodnika,a Y_o admitansa nultog provodnika.
Ove admitanse iznose:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_{ga} + \underline{Z}_{p1} + \underline{Z}_1};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_{gb} + \underline{Z}_{p2} + \underline{Z}_2};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_{gc} + \underline{Z}_{p2} + \underline{Z}_3};$$

$$\underline{Y}_o = \frac{1}{\underline{Z}_o}$$

Ako sistem nema nultog provodnika, tada je provodnost $\underline{Y}_o = 0$, jer je $Z_o = \infty$, pa je i struja $I_o = 0$.

Impedanse namotaja generatora su redovito jednake, pa se može uzeti da je $\underline{Z}_{ga} = \underline{Z}_{gb} = \underline{Z}_{gc} = \underline{Z}_g$. Isti je slučaj i sa impedansama faznih provodnika gde je $\underline{Z}_{p1} = \underline{Z}_{p2} = \underline{Z}_{p3} = \underline{Z}_p$.

Primenjujući drugi Kirhofov zakon, za prvu granu,sledi:

$$\underline{U}_o + \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_1\underline{Z}_{p1} + \underline{I}_1\underline{Z}_{ga} - \underline{E}_A = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{p1} + \underline{Z}_{ga}) = \underline{E}_A - \underline{U}_o.$$

Na isti način se postave jednačine i za druga dva fazna provodnika. Iz ovih jednačina odrede se sve struje u kolu, i one iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_o}{\underline{Z}_{ga} + \underline{Z}_{p1} + \underline{Z}_1} = \left(\underline{E}_A - \underline{U}_o\right)\cdot \underline{Y}_A;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_o}{\underline{Z}_{gb} + \underline{Z}_{p2} + \underline{Z}_2} = \left(\underline{E}_B - \underline{U}_o\right)\cdot \underline{Y}_A;$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_o}{\underline{Z}_{gc} + \underline{Z}_{p3} + \underline{Z}_3} = \left(\underline{E}_C - \underline{U}_o\right)\cdot \underline{Y}_C;$$

$$\underline{I}_o = \frac{\underline{U}_o}{\underline{Z}_o} = \underline{U}_o \cdot \underline{Y}_o$$

Struju u nultom provodniku možemo odrediti primenom prvog Kirhofovog zakona, gde je:

$$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Napon na prijemniku iznosi: $\underline{U}_A' = \underline{I}_1\cdot\underline{Z}_1$; $\underline{U}_B' = \underline{I}_2\cdot\underline{Z}_2$ i $\underline{U}_C' = \underline{I}_3\cdot\underline{Z}_3$

Na isti način se odrede i svi ostali padovi napona (kako na faznim provodnicima tako i na otporu generatora).

Ako je sistem simetriča, nema napona U_o, nema ni struje I_o, pa su struje po fazama jednake:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_p + \underline{Z}};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_p + \underline{Z}};$$

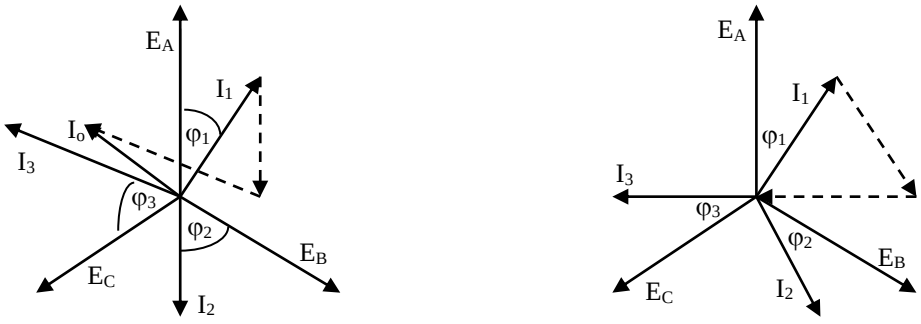
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_p + \underline{Z}}$$

Kako je $|E_A| = |E_B| = |E_C| = |E|$, sledi:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{E}{Z_u},$$

gde je $\underline{Z}_u = \underline{Z}_g + \underline{Z}_p + \underline{Z}$

Fazorski dijagram napona i struja za vezu prijemnika u zvezdu dat je na slici 83. Slika 83 a predstavlja dijagram kod nesimetričnog sistema, a slika 83 b kod simetričnog sistema. (Karakter prijemnika je RL.)



a) b)

Sl83.

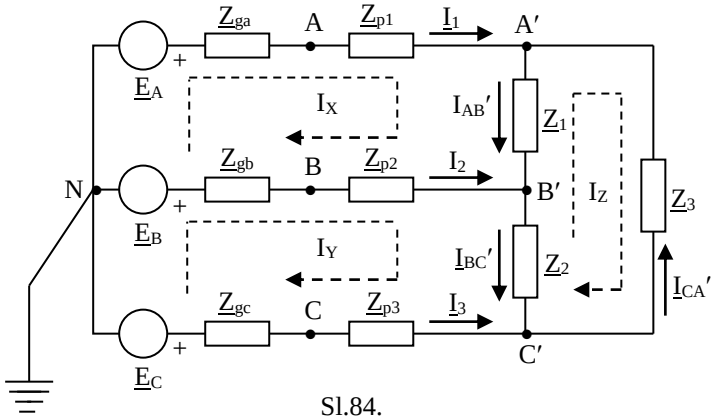
Da bi struja u nultom provodniku bila jednaka nuli, sistem bio simetričan, fazne struje I_1, I_2 i I_3 moraju biti jednake i fazno pomerene za 120° ($\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$). To će se dogoditi kada su ispunjena sledeća dva uslova:

1. Impedanse prijemnika međusobno jednake: $Z_1 = Z_2 = Z_3$ i
2. Fazni pomaci između struja i faznih napona jednaki: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$.

a to se u stvaru svodi na uslov: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$.

Veza prijemnika u trougao

Veza prijemnika u trougao je data na slici 84.



Sl.84.

Ovakva kola, ako je sistem nesimetričan, rešavaju se metodom konturnih struja. Za datu vezu odgovaraju sledeće tri jednačine (tri konture):

$\underline{E}_A - \underline{E}_B = \underline{I}_X\cdot(\underline{Z}_{ga} + \underline{Z}_{p1} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{p2} + \underline{Z}_{gb}) - \underline{I}_Y\cdot(\underline{Z}_{gb} + \underline{Z}_{p2}) - \underline{I}_Z\cdot\underline{Z}_1$ ..... (1)

$\underline{E}_B - \underline{E}_C = \underline{I}_Y\cdot(\underline{Z}_{gb} + \underline{Z}_{p2} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{p3} + \underline{Z}_{gc}) - \underline{I}_X\cdot(\underline{Z}_{g2} + \underline{Z}_{p2}) - \underline{I}_Z\cdot\underline{Z}_2$ ..... (2)

$0 = \underline{I}_Z\cdot(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{I}_X\cdot\underline{Z}_1 - \underline{I}_Y\cdot\underline{Z}_2$ ..... (3)

Rešenjem ovih jednačina dobiju se rešenja konturnih struja, koje rešavaju sve struje u sistemu, gde je:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_X$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_Y - \underline{I}_X$; $\underline{I}_3 = -\underline{I}_Y$; $\underline{I}_{AB}' = \underline{I}_X - \underline{I}_Z$, $\underline{I}_{BC}' = \underline{I}_Y - \underline{I}_Z$; $\underline{I}_{CA}' = -\underline{I}_Z$

U praksi se umesto ems E_A, E_B i E_C često daju međufazni naponi (napon mreže). Kako su to naponi između tačaka A, B i C (idealni naponski generatori – $R_{ga} = R_{gb} = R_{gc} = 0$), predhodne jednačine glase:

$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_X\cdot(\underline{Z}_{p1} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{p2}) - \underline{I}_Y\cdot\underline{Z}_{p2} - \underline{I}_Z\cdot\underline{Z}_1$ ..... (1)

$\underline{U}_{BC} = \underline{I}_Y\cdot(\underline{Z}_{p2} + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{p3}) - \underline{I}_X\cdot\underline{Z}_{p2} - \underline{I}_Z\cdot\underline{Z}_2$ ..... (2)

$0 = \underline{I}_Z\cdot(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{I}_X\cdot\underline{Z}_1 - \underline{I}_Y\cdot\underline{Z}_2$ ..... (3)

Ako je sistem simetričan, a pad napona na linijskim provodnicima i generatoru zanemarljiv, tada je napon na trofaznim prijemnicima jednak međufaznom naponu generatora (mreže), tj.

$U_{AB}' = U_{AB} = E_A\cdot\sqrt{3}$; $U_{BC}' = U_{BC} = E_B\cdot\sqrt{3}$; $U_{CA}' = U_{CA} = E_B\cdot\sqrt{3}$, pa je struja prijemnika jednaka:

$$I_{AB}' = I_{BC}' = I_{CA}' = I' = \frac{U_{AB}'}{Z_1} = \frac{U_{BC}'}{Z_2} = \frac{U_{CA}'}{Z_3} = \frac{U'}{Z}$$

Na slici 85 dat je fazorski dijagram struja za trofazni simetrični potrošač vezan u truogao. Struje potrošača su I_{AB}', I_{BC}' i I_{CA}'. Koristeći prvi kirhofov zakon, za kolo prema slici 84, sledi:

$\underline{I}_1 + \underline{I}_{CA}' = \underline{I}_{AB}' \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_{AB}' - \underline{I}_{CA}'$;

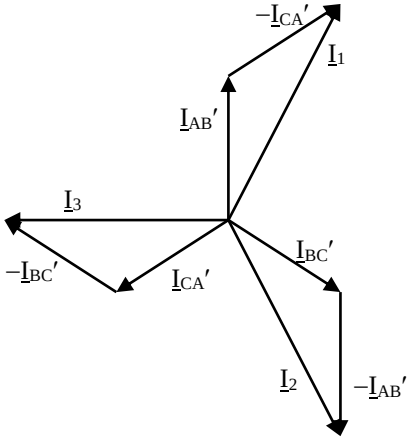
$\underline{I}_2 + \underline{I}_{AB}' = \underline{I}_{BC}' \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{BC}' - \underline{I}_{AB}'$

$\underline{I}_3 + \underline{I}_{BC}' = \underline{I}_{CA}' \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{CA}' - \underline{I}_{BC}'$

Ako je sistem simetričan, $I_{AB}' = I_{BC}' = I_{CA}' = I'$, tada je $I_1 = I_2 = I_3 = I$, odnosno linijsk struja I je veća od struje potrošača I' za $\sqrt{3}$ puta.

Dakle,

$$I = \sqrt{3}\, I'$$



Sl.85.

12.3.3. SNAGA TROFAZNIH GENERATORA I TROFAZNIH PRIJEMNIKA

Trofazni generatori, kao i prijemnici, su u stvari tri jednofazna generatora , odnosno prijemnika, koji su povezani ili u zvezdu ili u trougao. To znači da se pri računanju snage proračun izvodi isto kao u jednofaznom sistemu, pa se ukupna snaga dobije zbirom pojedinačnih snaga, tj. snaga po fazama.

Snaga trofaznih generatora i trofaznih prijemnika vezanih u zvezdu

Kako su indukovane ems po fazi, prema slici 82, E_A, E_B i E_C, a struje koje prolaze tim fazama (ujedno i linijske struje) I_1, I_2 i I_3, snaga koju proizvodi trofazni generator iznosi:

Aktivna snaga:

$$P_g = P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} = E_A \cdot I_1 \cos\varphi_A + E_B \cdot I_2 \cos\varphi_B + E_C \cdot I_3 \cos\varphi_C;$$

Reaktivna snaga:

$$Q_g = Q_{g1} + Q_{g2} + Q_{g3} = E_A \cdot I_1 \sin\varphi_A + E_B \cdot I_2 \sin\varphi_B + E_C \cdot I_3 \sin\varphi_C$$

Prividna snaga:

$$S_g = S_{g1} + S_{g2} + S_{g3} = E_A \cdot I_1 + E_B I_2 + E_C \cdot I_3$$

Ako je sistem simetričan ($E_A = E_B = E_C = E$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$; $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi_g$), aktivna, reaktivna i prividna snaga iznosi:

$$P_g = 3EI \cos\varphi_g \ [W];$$

$$Q_g = 3EI \sin\varphi_g \ [VAr] \quad i$$

$$S_g = 3EI \ [VA].$$

Ako umesto ems generatora uvrstimo međufazne napone, gde je $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U = E \cdot \sqrt{3}$ navedeni izrazi za snage glasi:

$$P_g = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cos\varphi_g = \sqrt{3} UI \cos\varphi_g \ [W],$$

$$Q_g = 3 \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \sin\varphi_g = \sqrt{3} UI \sin\varphi_g \ [VAr],$$

$$S_g = 3 \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I = \sqrt{3} UI \ [VA].$$

gde je: U .. linijski (međufazni) napon; I ... linijska struja i φ_g... fayni pomak između E i I.

Na isti način se dobije snaga trofaznih prijemnika, gde je,

Aktivna snaga prijemnika:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U_A' I_1 \cos\varphi_1 + U_B' I_2 \cos\varphi_2 + U_C' I_3 \cos\varphi_3;$$

Reaktivna snaga prijemnika:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U_A' I_1 \sin\varphi_1 + U_B' I_2 \sin\varphi_2 + U_C' I_3 \sin\varphi_3 \quad i$$

Prividna snaga prijemnika:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = U_A' I_1 + U_B' I_2 + U_C' I_3$$

Kada je sistem simetričan ($U_A' = U_B' = U_C' = U_f$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$) , aktivna, reaktivna i prividna snaga trofaznog prijemnika je:

$$P = 3U_f I \cos\varphi = \sqrt{3} UI \cos\varphi \ [W],$$

$$Q = 3U_f I \sin\varphi = \sqrt{3} UI \sin\varphi \ [VAr],$$

$$S = 3U_f I = \sqrt{3} UI \ [VA]$$

gde je: - U_A', U_B'; U_C'... fazni naponi na prijemniku (impedansama Z_1, Z_2 i Z_3),
- U .... međufazni napon
- φ_1, φ_2, φ_3.... fazni pomak između struja i napona na prijemniku (U_A' i I_1 ...)

Snaga trofaznih generatora i trofaznoh prijemnika vezanih u trougao

Postupnim izvođenjem snage trofaznih generatora i trofaznih prijemnika dolazimo do istih relacija (izraza) po kojima se određuje snaga sistema. Kod ove veze, vidi sliku 84, međufazni naponi na prijemniku su jednaki faznim naponima. Kod simetričnog sistema $U = U_f$, a linijska struja je veća od fazne struje prijemnika za $\sqrt{3}$ puta.

Pošto su relacije univerzalne, bez obzira na način veze prijemnika **snaga kod trofaznih generatora** iznosi:

Aktivna snaga:

$$P_g = P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} = E_A \cdot I_1 \cos\varphi_A + E_B \cdot I_2 \cos\varphi_B + E_C \cdot I_3 \cos\varphi_C;$$

Reaktivna snaga:

$$Q_g = Q_{g1} + Q_{g2} + Q_{g3} = E_A \cdot I_1 \sin\varphi_A + E_B \cdot I_2 \sin\varphi_B + E_C \cdot I_3 \sin\varphi_C$$

Prividna snaga:

$$S_g = S_{g1} + S_{g2} + S_{g3} = E_A \underline{I}_1 + E_B I_2 + E_C \cdot I_3$$

Ako je sistem simetričan ($E_A = E_B = E_C = E$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$; $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi_g$), aktivna, reaktivna i prividna snaga iznosi:

$$\begin{aligned} P_g &= 3EI\cos\varphi_g = \sqrt{3}UI\cos\varphi_g \,[\mathrm{W}], \\ Q_g &= 3EI\sin\varphi_g = \sqrt{3}UI\sin\varphi_g \,[\mathrm{VAr}], \\ S_g &= 3EI = \sqrt{3}UI\,[\mathrm{VA}]. \end{aligned}$$

gde je: - U .. linijski (međufazni) napon;
- I ... linijska struja i
- φ_g... fazni pomak između E i I.

Na isti način se dobije **snaga trofaznih prijemnika**, gde je,

Aktivna snaga prijemnika:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U_A' I_1 \cos\varphi_1 + U_B' I_2 \cos\varphi_2 + U_C' I_3 \cos\varphi_3;$$

Reaktivna snaga prijemnika:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U_A' I_1 \sin\varphi_1 + U_B' I_2 \sin\varphi_2 + U_C' I_3 \sin\varphi_3$$

Prividna snaga prijemnika:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = U_A' I_1 + U_B' I_2 + U_C' I_3$$

Kada je sistem simetričan ($U_A' = U_B' = U_C' = U_f$; $I_1 = I_2 = I_3 = I$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$) , aktivna, reaktivna i prividna snaga trofaznog prijemnika je:

$$\begin{aligned} P &= 3U_f I\cos\varphi = \sqrt{3}UI\cos\varphi\,[\mathrm{W}], \\ Q &= 3U_f I\sin\varphi = \sqrt{3}UI\sin\varphi\,[\mathrm{VAr}], \\ S &= 3U_f I = \sqrt{3}UI\,[\mathrm{VA}] \end{aligned}$$

gde je: - U_A', U_B'; U_C'... fazni naponi na prijemniku (impedansama Z_1, Z_2 i Z_3),
- U .... međufazni napon
- φ_1, φ_2, φ_3.... fazni pomak između struja i napona na prijemniku (U_A' i I_1 ...)

ZADACI:

12.1. Fazni naponi dvofaznog sistema iznose $u_1 = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ [V] i $u_2 = 200\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/2)$ [V]. Ako faze opteretimo sa $R_1 = R_2 = 10$ [Ω], odrediti fazne struje sistema i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.2. Naponi dvofaznog sistema su $u_1 = 200\sqrt{2}\sin\omega t$ [V] i $u_2 = 200\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/2)$ [V], a opterećenja faza $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (10 + j10)$ [Ω]. Nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.3. Na linijski (međufazni) napon dvofaznog sistema čiji fazni naponi iznose $u_1 = 300\sqrt{2}\sin\omega t$ [V] i $u_2 = 300\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/2)$ [V] priključen je potrošač $\underline{Z} = (20 + j10)$ [Ω]. Odrediti linijske i fazne struje i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.4. Naponi dvofaznog sistema su $u_1 = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ [V] i $u_2 = 100\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/2)$ [V], a struje su $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/3)$ [A] i $i_2 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 5\pi/6)$ [A].
Odrediti aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu i nacrtati vektorski dijagram snaga.

12.5. Kod dvofaznog sistema fazni naponi su $\underline{U}_1 = 200$ V, i $\underline{U}_2 = -j200$ V, a opterećenja $\underline{Z}_1 = j10$ [Ω] i $\underline{Z}_2 = 10$ [Ω]. Odrediti sve snage sistema (P;Q i S).

12.6. Opterećenje $\underline{Z} = (20 - j20\sqrt{3})$ [Ω] priključeno je na linijski napon $u_{12} = 282\sin(\omega t - \pi/4)$. Odrediti snage sistema P, Q i S.

12.7. Nacrtati grafički (vremenski) dijagram snaga p_1, p_2 i p ako su fazni naponi i fazne struje date izrazima $u_1 = 100\sin\omega t$ [V], $u_2 = 100\sin(\omega t - \pi/2)$ [V], $i_1 = 5\sin(\omega t - \pi/6)$ [A] i $i_2 = 5\sin(\omega t - \pi/2)$ [A].

12.8. Opterećenja faza kod dvofaznog sistema su $\underline{Z}_1 = 50$ [Ω] i $\underline{Z}_2 = (30 + j40)$ [Ω], a odgovarajuće struje su $\underline{I}_1 = 4$ [A] i $\underline{I}_2 = (-3{,}2 - j2{,}4)$ [A]. Odrediti fazne napone $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$, i aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu sistema.

12.9. Aktivna snaga dvofaznog sistema je $P = 2$ [kW] pri $\cos\varphi = 0{,}8$.
Ako kroz kolo protiče struja od $I = 20$ [A] odrediti fazni napon generatora.

12.10. Kod dvofaznog sistema je $\underline{Z}_1 = -j2$ [Ω] i $\underline{Z}_2 = j2$ [Ω]. Ako je $\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (-5 + j5)$ [A] i fazni napon $u_1 = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ [V], odrediti napon u_2, struje $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.11. Impedansa $\underline{Z} = R + jX$ priključena je na linijski napon dvofaznog sistema. Reaktivna snaga u kolu je $Q = 2\,000$ [VAr] pri faznom naponu $U_f = 125\sqrt{2}$ [V] učestanosti $f = 50$ Hz i faktora snage $\cos\varphi = 0{,}6$.
Koliki kondenzator treba vezati paralelno sa impedansom Z da bi se reaktivna snaga smanjila na 1 500 [VAr] ?

12.12. Izračunati odnos efektivnih vrednosti linijskih (međufaznih) i faznih napona kod dvofaznog, trofaznog, šestofaznog , dvanaestofaznog i osamnaestofaznog trofaznog simetričnog sistema.

12.13. Otpori $R_1 = R_2 = R_3 = 50$ [Ω] vezani su u zvezdu. Ako je linijska struja sistema $I = 3$ [A] odrediti fazne i linijske napone.

12.14. Tri jednaka prijemnika $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (5 + j15)$ [Ω] vezana su u zvezdu na linijski napon $U = 390$ [V]. Koliki je fazni napon i fazna struja sistema ?

12.15. Trofazni motor vezan je u trougao i priključen na mrežu linijskog napona $U = 380$ [V] i uzima faznu struju $I_f = 50$ [A]. Odrediti sve snage motora ako je njegov faktor snage $\cos\varphi = 0{,}8$.

12.16. Trofazni motor spojen je u zvezdu i priključen je na linijski napon $U = 400$ [V]. Reaktivna snaga motora je $Q = 8\,000$ [VAr], a fazna struja motora je $I_f = 15$ [A]. Kolike su prividna i aktivna snaga motora ?

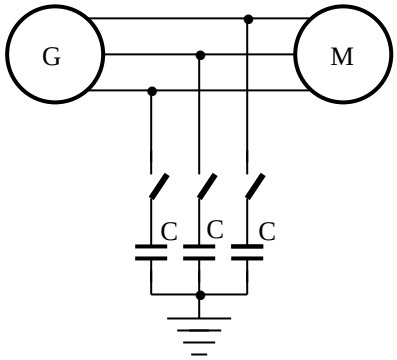
12.17. Tri impedanse $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R + jX$, vezane su u trougao i priključene na međufazni (linijski) napon $U = 200\sqrt{3}$ [V]. Odrediti aktivnu snagu ovog prijemnika ako je linijska struja $I = 15$ [A], a fazni pomak između faznog napona i fazne struje $\varphi = \pi/4$.

12.18. Kada trofazni motor priključuimo na mrežu 380/220 [V], linijskim vodovima protiče struja $I = 85$ [A] uz faktor snage $\cos\varphi = 0{,}83$. Koliko je vremenski uključem motor u pogon ako on razvije rad (energiju) od $W = 450$ [kWh] ?

12.19. Na linijskim vodovima A i B priključen je kondenzator od $C = 200$ [μF], pri čemu je struja za 15 [A] veća nego kod priključka na vodove B i N (0). Koliki je napon mreže ako je frekvencija $f = 50$ [Hz] ?

12.20. Trofazna mreža opterećena je motorom od $P = 100$ kW koji radi sa stepenom korisnosti $\eta = 91$ % i ima faktor snage $\cos\varphi = 0{,}8$. Linijski napon mreže je $U = 5$ kV. Treba odrediti faznu struju generatora I_f koji je vezan u zvezdu.

12.21.



Sl.12.21.

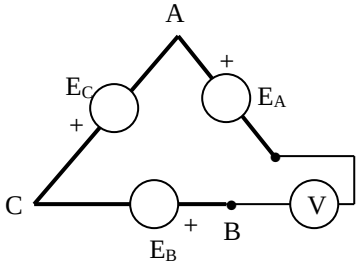
Trofazna mreža linijskih napona 3×380 V frekvencije $f = 50$ Hz daje energiju industrijskom pogonu koji ima snagu $P = 500$ kW pri faktoru snage $\cos\varphi = 0{,}6$ (ind.). Da bi se povećao faktor snage na $\cos\varphi_1 = 0{,}8$ na mrežu su priključene tri jednake kondenzatorske baterije vezane u zvezdu, prema slici 12.21. Odrediti linijsku struju mreže I pre uključenja kondenzatorskih baterija i linijsku struju I_1 nakon uključenja kondenzatora. Koliki je pojedinačni kapacitet svake od baterije ?

12.22. Trofazni generator ima ems po fazi $E = 5\,200$ [V], a vezan je u zvezdu. Impedansa namotaja generatora iznosi $Z_g = (0{,}4 + j0{,}5)$ [Ω]. Na generator je priključen trofazni elektromotor sa vezom u zvezdu impedanse po fazi $Z_m = (15{,}6 + j11{,}5)$ [Ω]. Odrediti struju po fazama I, napon na krajevima generatora U, faktor snage mreže $\cos\varphi$, snagu motora P_m i gubitak snage u generatoru P_g.

12.23. Trofazni motor ima pod opterećenjem snagu $P = 25$ [kW] uz $\cos\varphi_m = 0{,}75$. Linijski napon na priključnicama motora vezanog u zvezdu iznosi $U_m = 1\,200$ [V]. Motor je vezan na generator preko vodova impedanse $Z_v = (2 + j4)$ [Ω]. Treba odrediti struju mreže I, struju motora I_m, linijski (međufazni) napon generatora U_g i stepen korisnosti η mreže.

12.24. Odrediti prividnu snagu trofazne mreže S i faktor snage $\cos\varphi$ na koju su priključena dva motora sa snagama $P_1 = 10$ kW sa $\cos\varphi_1 = 0{,}6$ induktivno i $P_2 = 9$ kW sa $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ kapacitivno. Kolika je struja mreže I, struje motora I_1 i I_2 ako je napon mreže $U = 1$ kV (međufazni) ?

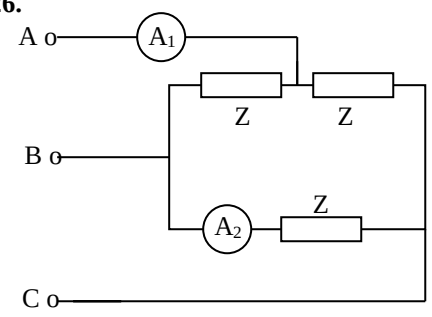
12.25.



Sl.12.25.

Šta pokazuje idealni voltmetar, prema slici 12.25, ako se on veže redno na vezu trofaznih namotaja generatora u trougao? Efektivne vrednosti ems su jednake i iznose $E_A = E_B = E_C = 220$ V. pomerene za 120°.
Rešenje prokomentarisati.

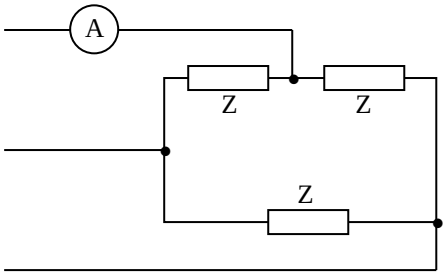
12.26.



Sl.12.26.

Šta pokazuje ampermetar A_2, prema slici 12.26, ako ampermetar A_1 pokazuje struju 34,6 A ?
Impedanse Z su vezane u trougao i priključene na trofaznu mrežu.
Ampermetri su idealni.

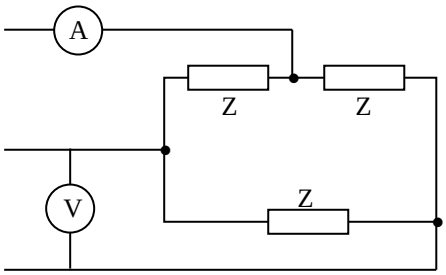
12.27.



Sl.12.27.

Na simetričnu trofaznu mrežu priključen je potrošač prema slici 12.27.
Šta će pokazati idealni ampermetar ako je međufazni (linijski) napon mreže jednak U = 100 V ?

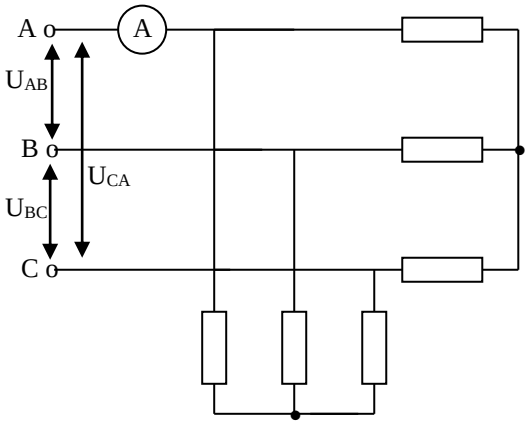
12.28.



Sl.12.28.

Šta će pokazati voltmetar ako ampermetar pokazuje 17,3 A, prema slici 12.28 ?
Ampermetar i voltmetar su idealni.

12.29.



Sl.12.29.

U mreži, prema slici 12.29, međufazni naponi su prostoperiodični i simetrični i iznose $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U = 380$ V.
Ako su svi potrošači međusobno jednaki i iznose Z = 10 Ω, šta će izmeriti idealni ampermetar ?

12.30. Kako će se promeniti linijska struja, ako se simetrični trofazni prijemnik, vezan u zvezdu, bez nultog voda, prespoji u trougao ? Linijski naponi mreže se ne nemenjaju i čine simetričan sistem.

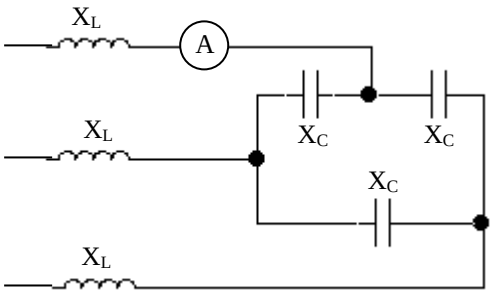
12.31. Kako će se promeniti aktivna snaga, ako se simetričan potrošač, vezan u zvezdu bez nule, prespoji u trougao, uz iste linijske napone (simetričan sistem) ?

12.32. Data su dva simetrična potrošača, od kojih je jedan vezan u trougao a drugi u zvezdu. Potrošači se sastoje od jednakih termogenih otpora i priključeni su na trofazni generator. Koji je odnos između linijskih struja kod veze u trougao i linijskih struja kod veze u zvezdu (I_t / I_z) ?

12.33. Dva simetrična potrošača od kojih je jedan vezan u trougao a drugi u zvezdu priključena su na trofazni generator. Linijske struje potrošača su međusobno jednake. Ako potrošač koji je vezan u trougao ima impedansu $Z_t = 15\ \Omega$, odrediti impedansu potrošača vezanog u zvezdu Z_z.

12.34. Impedanse dvaju simetričnih trofaznih potrošača su jednake i iznose **Z**. Prvi potrošač je vezan u trougao, a drugi u zvezdu, pri čemu su oba priključena na isti izvor napona **U**.
Kolika je linijska struja I, koristeći parametre U i I. ?

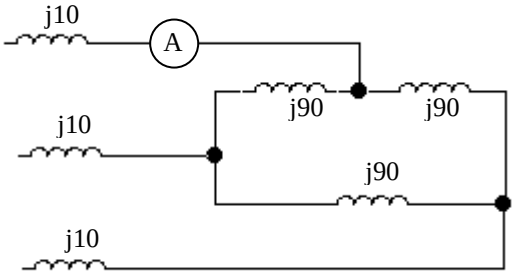
12.35.



Sl.12.35.

Na trofaznu mrežu, prikazanoj na slici 12.35, priključen je simetričan sistem linijskih napona $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U = 220$ V.
Šta će pokazati idealni ampermetar, ako su reaktivne otpornosti $X_L = 10\ \Omega$ i $X_C = 60\ \Omega$?

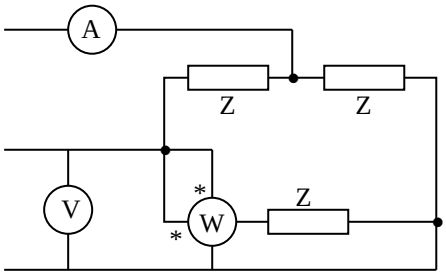
12.36.



Sl.12.36.

Trofazna simetrična mreža, prema sl.12.36, priključena je na simetričan sistem linijskih napona $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 380$ V. Aktivni otpori prenosnih vodova se mogu zanemariti.
Šta će pokazati idealni ampermetar ?
Brojni podaci su navedeni na slici.

12.37.

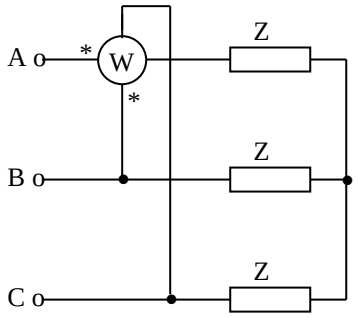


Sl.12.37.

Simetričan trofazni potrošač se napaja iz trofazne mreže, prema slici 12.37. Voltmetar ampermetar i jednofazni vatmetar pokazuju sledeće vrednosti $U_V = 127$ V, $I_A = 4\sqrt{3}$ A i $P_W = 508$ W.
Kojeg je karaktera impedansa Z ?

1. aktivnog;
2. aktivno – reaktivnog ($X_L > X_C$)
3. aktivno – reaktivnog ($X_L < X_C$)
4. induktivno reaktivnog
5. kapacitivno reaktivnog

12.38.



Sl.12.38.

Simetričan trofazni potrošač se napaja iz trofazne mreže, prema slici 12.38.

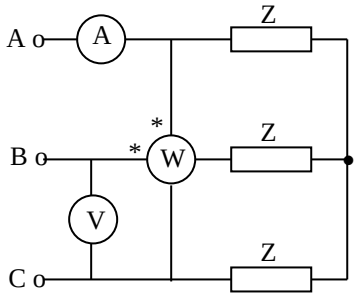
Kojeg je karaktera impedansa Z ako vatmetar pokazuje nulu ?

Uz objašnjenje zaokružiti tačno rešenje.

1. aktivnog;
2. aktivno – reaktivnog ($X_L > X_C$)
3. aktivno – reaktivnog ($X_L < X_C$)
4. induktivno reaktivnog
5. kapacitivno reaktivnog

NAPOMENA! Zvezdica na vatmetru govori o početku strujnog odnosno naponskog namotaja.

12.39.



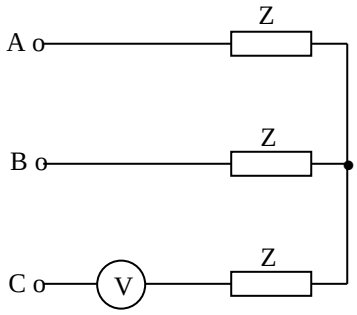
Sl.12.39.

Simetričan trofazni potrošač se napaja iz trofazne mreže, prema slici 12.39. Voltmetar i ampermrtar pokazuju:
$U_V = 380$ V, $I_A = 3$ A.

Šta će pokazati vatmetar ako je impedansa Z savršeno termogena ?

Zvezdice na vatmetru pokazuju ulaz (početak namotaja).

12.40.



Sl.12.40.

Šta će pokazati idealni vatmetar, prema sl. 12.40, ako je međufazni napon jednak U = 380 V?

Uz komentar zaokružiti jedan od ponuđenih odgovora:

1. 380 V,
2. $380 / \sqrt{3}$ V,
3. $380 \sqrt{3}$ V,
4. nulu
5. beskonačnu vrednost

12.41. Trofazni generator ima snagu P = 20 kW, linijski napon generatora U = 200 V i gubitak snage na linijskim provodnicima od 5 %. Kiliki su fazni naponi simetričnog trofaznog prijemnika ako je on vezan u zvezdu ?

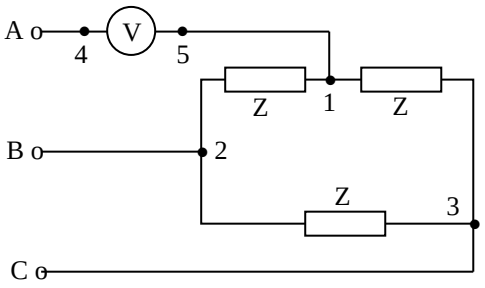
12.42. Trofazni asinhroni motor priključen je na trofaznu mrežu, zanemarljivih impedansi na linijskim provodnicima, simetričnih linijskih napona, efektivnih vrednosti U = 220 V i učestanosti f = 50 Hz. Ako su aktivna snaga i faktor snage P = 3 kW i $\cos\varphi = 0{,}8$, odrediti kapacitivnost kondenzatora koju terba uključiti na elektromotor tako da se faktor snage simetrične mreže (voda) poveća na $\cos\varphi' = 0{,}9$.

12.43. Trofazni asinhroni motor, čiji su namotaji vezani u trougao priključen je na simetričnu trofaznu mrežu. Poznat je linijski napon **U**, učestanost **f**, aktivna snaga **P** i faktor snage motora **cos φ**. Odrediti kapacitete kondenzatora koje treba vezati paralelno sa motorom da bi se faktor snage maksimalno povećao, ako su:

a) kondenzatori vezani u trougao i
b) kondenzatori vezani u zvezdu.

Brojni podaci: U = 380 V; f = 50 Hz; P = 36 kW; cos φ = 0,8; cos φ_1 = 1.

12.44.



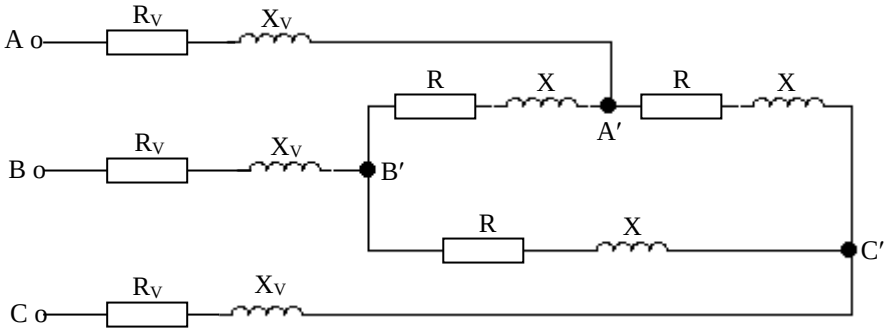
Sl.12.44.

Trofazni simetrični prijemnik je vezan u trougao, prema slici 12.44, i priključen je na mrežu linijskog napona čija je efektivna vrednost jednaka U = 380.

Odrediti vrednost koju pokazuje idealni voltmetar (prekid linijskog voda A).

12.45. Napon na krajevima prijemnika vezanog u trougau, prema slici 12.45, iznosi 120 V. Aktivne otpornosti svakog od linijskog provodnika iznosi R_V = 1 Ω, a reaktivna (induktivna) X_V = 2 Ω.

Ako je aktivna otpornost prijemnika je R = 6 Ω a reaktivna X = 9 Ω, odrediti koliki su naponi na početku linija (linijski naponi) ?



Sl.12.45.

12.46. Simetričan trofazni prijemnik vezan u zvezdu impedansi $\underline{Z}$ = (10 + j2) Ω priključen je preko trofaznog voda impedansi provodnika $\underline{Z}_V$ = (0,5 + j0,8) Ω na trofazni generator vezan u zvezdu, efektivne vrednosti ems E = 220 V i unutrašnje impedanse namotaja $\underline{Z}_G$ = (0,1 + j2) Ω. Izračunati fazne struje sistema, međufazne napone prijemnika, aktivnu i reaktivnu snagu prijemnika i aktivnu i reaktivnu snagu generatora.

12.47. Rešiti predhodni zadatak ako je prijemnik vezan u trougao.

12.48. Dva prijemnika koji se sastoji od trougla i zvezde, priključeni su za iste tačke trofazne mreže i linijskim provodnicima impedansi $\underline{Z}_V$ = (1 + j2) Ω su priključeni na simetričan trofazni generator efektivne vrednosti ems namotaja E = 350 V.

Ako su mpedanse prijemnika : kod trougla $\underline{Z}_t$ = (10 + j2) Ω i kod zvezde $\underline{Z}_z$ = (15 – j3) Ω, zračunati međufazni napon prijemnika, aktivnu i reaktivnu snagu prijemnika i pad napona od generatora do prijemnika. Impedanse namotaja generatora zanemariti.

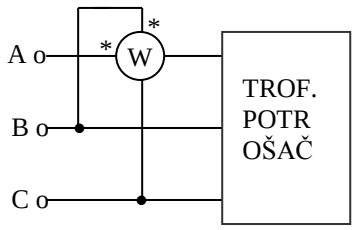
12.49. Kako će se promeniti aktivna snaga trofaznom simetričnom prijemniku, koji je vezan u zvezdu, ako ga prespojimo u trougao i priključimo na isti napon mreže ?

12.50. Dva trofazna simetrična prijemnika priključena su na istu trofaznu mrežu. Prvi prijemnik je povezan u trougao i njgova impedansa po fazi iznosi $Z_t = 12\ \Omega$. Kolika bi bila impedansa drugog prijemnika Z_z, ako su linijske struje za oba prijemnika jednake ?

12.51. Dva simetrična trofazna prijemnika, spojena u zvezdu, priključena su na trofaznu mrežu faznih napona $U_{f1} = 220 \cdot e^{j0}$ V, $U_{f2} = 220 \cdot e^{-j120}$ V i $U_{f3} = 220 \cdot e^{-j240}$ V, vidi sliku 12.29 (zad. 12.29).

Odrediti sve fazne i linijske struje i nacrtati fazorski dijagram napona i struja su mpedanse po fazi prvog prijemnika $Z' = 30 \cdot e^{j0}\ \Omega$, a drugog $Z'' = 30 \cdot e^{j30}\ \Omega$.

12.52.



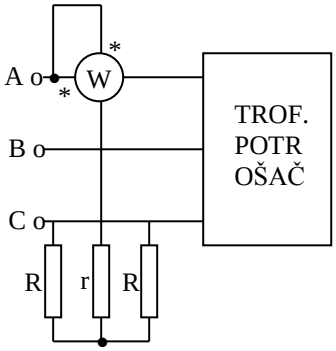
SL.12.52.

Šta pokazuje vatmetar kod simetričnog trofaznog potrošača, koji se napaja iz mreže, prema slici 12.52 ?

Zaokružiti jedno od rešenja uz objašnjenje.

1. trećinu ukupne aktivne snage potrošača (P/3)
2. ukupnu reaktivnu snagu potrošača (Q)
3. $Q/\sqrt{3}$
4. trećinu ukupne reaktivne snage potrošača (Q/3)
5. $P/\sqrt{3}$

12.53.

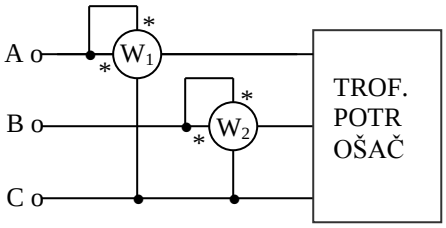


Sl.12.53.

Za merenje aktivne snage napravljena je veštačka nula, kao na slici 12.53. Ako je otpor naponskog kalema vatmetra $R_{VW} = 10\ k\Omega$ a otpor $R = 30\ k\Omega$, koliko iznosi otpor r ?

Uz rešenje zadatka dati potrebno objašnjenje.

12.54.

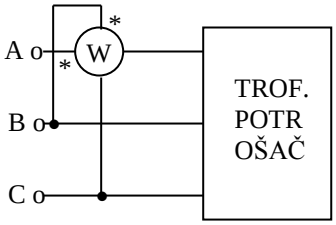


Sl.12.54.

Koja i kako se može izračunati snaga trofaznog sistema, prema slici 12.54 ?

Odgovor detaljno obrazložiti.

12.55.



Sl.12.55.

Pomoću vatmetra, vezanog prema slici 12.55, može se izmeriti jedna od sledećih snaga:

1. reaktivna snaga simetričnog trofaznog sistema
2. aktivna snaga simetričnog trofaznog sistema
3. reaktivna snaga simetričnog trofaznog sistema
4. aktivna snaga nesimetričnog trofaznog sistema
5. prividna snaga simetričnog trofaznog sistema
6. nijedna

Odgovor obrazložiti.

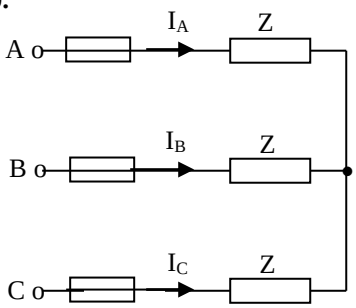
12.56. Kroz faze trofaznog generatora spojenog u zvezdu sa nultim vodom protiču struje $I_1 = 20$ A, $I_2 = 15$ A i $I_3 = 10$ A koje su fazno pomerene za $2\pi/3$. Izračunati struju nultog voda.

12.57. Trofaznom generatoru međufaznih napona $U_{12} = U_{23} = U_{31} = 380$ [V] prva faza je opterećena sa $\underline{Z}_1 = 10$ [Ω] , druga sa $\underline{Z}_2 = (10 + j10)$ [Ω], a treća je neopterećena ($\underline{Z}_3 = \infty$). Odrediti struju nultog voda.

12.58. Aktivni otpornik, kalem i kondenzator vezani su u zvezdu. Odrediti fazne struje sistema ako je efektivna vrednost struje nultog voda $\underline{I}_o = (4 - 4\sqrt{3})$ [A] i ako je $Z_1 = Z_2 = Z_3$ i $Z_o = 0$ [Ω].

12.59. Trofazni simetrični sistem linijskog napona $U = 200$ [V] napoja prijemnik vezan u traugao čije su impedanse $\underline{Z}_1 = 8$ [Ω], $\underline{Z}_2 = (10 + j10\sqrt{3})$ [Ω] i $\underline{Z}_3 = (10 - j10\sqrt{3})$ [Ω]. Odrediti fazne i linijske struje.

12.60.

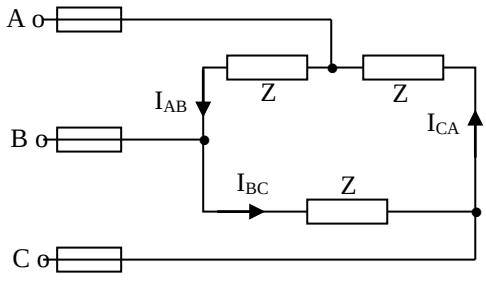


Sl.12.60.

Poznat je linijski napon **U** i impedansa simetričnog trofaznog potrošača **Z** , prema sl. 12.60.

Preko navedenih parametara izraziti linijske struje I_A, I_B i I_C nakon pregorevanja osigurača na vodu C.

12.61.

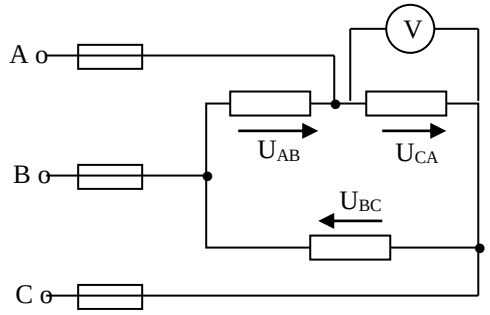


Sl.12.61.

Fazne struje simetričnog trofaznog potrošača vezanog u trougao, prema slici 12.61, iznose $I_f = 12$ A.

Kolike će biti fazne i linijske struje, kada pregori osigurač na vodu A ?

12.62.

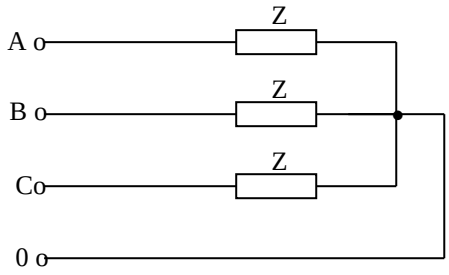


Sl.12.62.

Trofazna mreža koja napaja simetrični trofazni potrošač vezan u trougao, prema slici 12.62, ima linijski napon U 380 V.

Šta će pokazati idealni voltmetar nakon pregorevanja osigurača na vodu C ?

12.63.



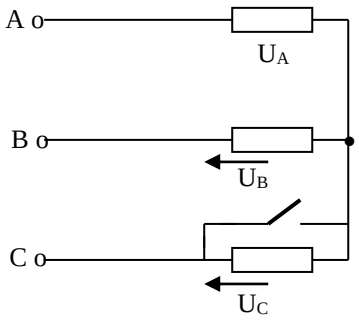
Sl.12.63.

Kako će se promeniti fazne struje u simetričnom trofaznom potrošaču, vezanom u zvezdu sa nultim provodnikom, prema slici 12.63, kada dođe do prekida voda A ?

Potrošač se napaja simetričnim naponom mreže. Pad napona na nultom provodniku zanemarljiv.

Pre prekida voda linijska struja je bila I = 10 A.

12.64.



Sl.12.64.

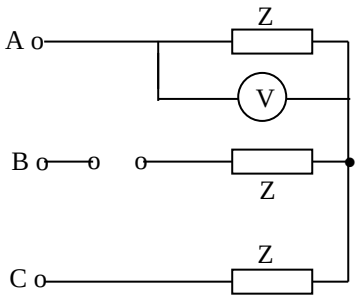
Poznat je linijski napon simetrične trofazne mreže **U**, koji napaja simetrično trofazno opterećenje vezano u zvezdu, prema slici 12.64.

Koliki će biti napon na fazi B ako se faza C kratko spoji (uključi prekidač).

Zaokružiti ponuđeno tačno rešenje uz objašnjenje.

1. $U_B = U$; 2. $U_B = 2U$; 3. $U_B = U/\sqrt{3}$;
4. $U_B = U/2$; 5. $U_B = \sqrt{3}\,U$.

12.65.



Sl.12.65.

Šta pokazuje voltmetar, priključen na simetrični trofazni potrošač, prikazan na slici 12.65, ako je linijski napon mreže **U**, a vod B prekinut?

Zakoružiti jedno od ponuđenih rešenja, uz potrebno objašnjenje.

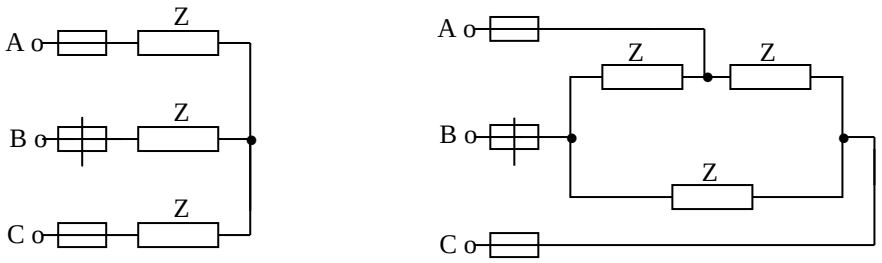
1. nulu;
2. $U/\sqrt{3}$
3. U
4. $\sqrt{3}\,U/2$
5. U/2

12.66. Trofazna mreža radila je u simetričnom režimu. Potrošač je vezan u zvezdu bez nultog voda. Nakon prekida faze A naponi U_B i U_C će se:

1. povećati za $\sqrt{3}$ puta,
2. biti jednaki polovini linijskih napona,
3. biti jednaki linijskim naponima,
4. ostato nepromenjeni
5. smanjiti se za $\sqrt{3}$.

Zakkružiti tačno rešenje uz potrebno objašnjenje.

12.67. Na trofaznu mrežu linijskog napona $U = 3 \times 380$ [V] priključen je simetrični trofazni potrošač impedanse $\underline{Z} = 5 \cdot e^{j36,87°}$ [Ω], koji se prvo veže u zvezdu a zatim u trougao, prema slici 12.67 (a i b). Odrediti linijske struje I_A, I_B i I_C, kao i snagu sistema, ako dođe do prekida faze B (pregori osigurač).



a) b)

Sl.12.67.

12.68. Impedanse $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (10 + j10)$ [Ω] vezane su u zvezdu (vidi sliku 12.67. a). Ako je istovremeno došlo do kratkog spoja impedanse Z_1 i prekida drugog faznog provodnika (napojnog voda B) odrediti, nakon navedenog kvara, struje u sistemu ?

12.69. Tri otpornika, po 30[Ω] spojena su u zvezdu (slika 12.67.a) i priključena na fazni napon $U_f = 240$ [V]. Odrediti struju u otporima, kao i promenu struja kada dođe do prekida trećeg napojnog voda (provodnik C).

12.70. Na međufazni napon od 420 V priključena su tri otpora od po 30 [Ω] vezana u zvezdu. Odrediti:

a) fazne i linijske struje sistema
b) fazne i linijske struje sistema nakon prekida trećeg voda (vod C)

12.71. Analizirati posledice koje nastaju kada kod trofaznog prijemnika vezanog u trougao (slika 12.67.b) dođe do pregorevanja jedne faze (prve).

Kolike su struje pre i posle pregorevanja faze, ako je međufazni napon $U = 400$ [V] a $R_1 = R_2 = R_3 = 40$ [Ω]?

12.72. Analizirati posledice koje nastaju kada kod trofaznog prijemnika vezanog u trougao dođe do prekida jedne faze (prve). Kolike su struje pre i posle prekida faze, ako je međufazni (linijski) napon $U = 400$ [V] a $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (10 + j10\sqrt{3})$ [Ω]?

12.73. Tri otpora od po [20] Ω vezana su u zvezdu i priključena na linijski napon $U = 380$ [V]. Šta će se dogoditi sa strujama u sistemu ako umesto otpornika R_1 nastane kratka veza, a nulti provodnik ne postoji?

12.74. Tri impedanse $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2 = (10 + j10)$ [Ω] i $\underline{Z}_3 = (10 - j10)$ vezane su u zvezdu i priključene na linijski napon $U = 380$ [V]. Kolike su struje u sistemu ako je impedansa Z_1 u kratkoj vezi ($Z_1 = 0$)?

12.75. Otpornici $R_1 = R_2 = 10$ [Ω] i $R_3 = 5$ [Ω] vezani su u zvezdu i priključeni na linijski napon $U = 380$ [V]. Odrediti:

a) napon U_o između zvezdišta generatora i prijemnika ako je sistem bez nultog voda i
b) napone i struje trofaznog prijemnika i nacrtati fazorski dijagram napona i struja prijemnika.

12.76. Odrediti napon U_o između zvezdišta trofaznog generatora i prijemnika ako su opterećenja po fazama $R_1 = 20$ [Ω], $R_2 = 30$ [Ω], $R_3 = 40$ [Ω] a linijski napon iznosi $U = 220\sqrt{3}$ [V]. Sistem nema nulti provodnik.

12.77. Prijemnik vezan u zvezdu, bez nultog voda, čija su opterećenja po fazama $\underline{Z}_1 = 10\ [\Omega]$, $\underline{Z}_2 = j10\ [\Omega]$ i $\underline{Z}_3 = -j10\ [\Omega]$ priključen je na linijski napon $U = 300\sqrt{3}$ [V]. Naći fazne napone i struje prijemniku.

12.78. Otpornici $R_1 = 10\ [\Omega]$, $R_2 = 40\ [\Omega]$ i $R_3 = 20\ [\Omega]$ vezani su u zvezdu bez nultog voda i priključeni na napon mreže 380/220 [V]. Odrediti aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu po fazama i ukupne snage sistema.

12.79. Izračunati sve snage trofaznog sistema kada su opterećenja vezana u zvezdu i priključena na linijski napon, bez nultog voda, $U = 100\sqrt{3}$ [V], ako je $\underline{Z}_1 = 10\ [\Omega]$, $\underline{Z}_2 = (10 + j10)\ [\Omega]$ i $\underline{Z}_3 = (10 - j10)\ [\Omega]$.

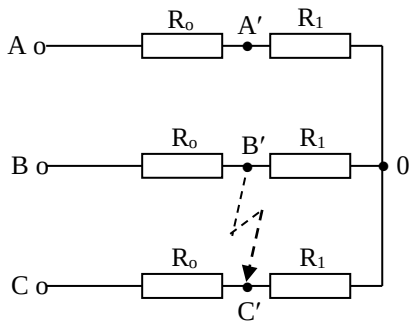
12.80. Odrediti struju nultog voda, zanemarljive impedanse, I_o ako je fazni napon na prijemniku, koji je vezan u zvezdu, $U_f' = 100$ [V] a aktivne snage pojedinačnih faza prijemnika su $P_1 = 1{,}3$ [kW], $P_2 = 1{,}2$ [kW] i $P_3 = 1{,}8$ [kW] pri faktorima snaga $\cos\varphi_1 = 1$, $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ i $\cos\varphi_3 = 0{,}7$.

12.81. Tri impedanse $\underline{Z}_1 = 10\ [\Omega]$, $\underline{Z}_2 = j10\ [\Omega]$ i $\underline{Z}_3 = -j10\ [\Omega]$ vezane su u trougao. Pretvoriti ovu vezu u ekvivalentnu vezu u zvezdu. Kolike su impedanse ekvivalentne veze u zvezdi ?

12.82. Otpornici $R_1 = 10\ [\Omega]$, $R_2 = 20\ [\Omega]$ i $R_3 = 40\ [\Omega]$ vezani su u zvezdu. Ovu vezu pretvoriti u ekvivalentnu vezu u trougao. Kolike su otpornosti ekvivalentne veze u trouglu ?

12.83. Trofazni potrošač impedansi $\underline{Z}_1 = (2 + j4)\ [\Omega]$, $\underline{Z}_2 = -j5\ [\Omega]$ i $\underline{Z}_3 = j5\ [\Omega]$ vezan je u zvezdu sa nultim provodnikom i priključen na mrežu linijskog napona $U = 220$ [V]. Ako je otpor nultog provodnika i faznih provodnika (linija) jednak i iznosi $R_o = R = 1\ [\Omega]$, odrediti sve struje sistema (I_1, I_2, I_3 i I_o), fazne napone potrošača (U_{f1}, U_{f2} i U_{f3}), snagu potrošača i snagu gubitaka na linijskim provodnicima (P, ΔP_1, ΔP_2, ΔP_3, ΔP_o) i ukupnu aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu izvora (mreže) P_g, Q_g i S_g.

12.84.

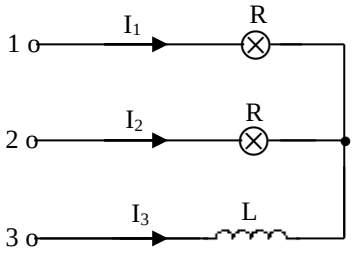


Sl.12.84.

Na mrežu međufaznih napona $U = 380$ [V] spojen je simetričan trofazni potrošač spojen u zvezdu, prema slici 12.84. Između tačaka B′ i C′ došlo je do kratkog spoja. Odrediti struje u kolu (I_A, I_B i I_C), nakon kratkog spoja, i napon između dvaju zvezdišta U_o (generatora i potrošača).

Brjni podaci:
$R_o = 5\ [\Omega]$ i $R_1 = 20\ [\Omega]$.

12.85.

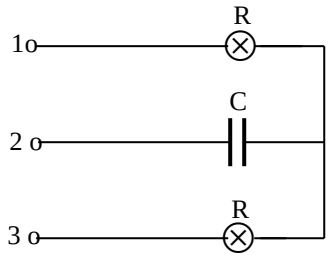


Sl.12.85.

Dve sijalice istih otpornosti R (iste jačine) i jedan kalem induktivnosti L vezani su u zvezdu, prema slici 12.85. Obrazložiti način kako se može ustanoviti redosled faza koristeći navedeni nesimetrični trofazni prijemnik (R, R i L).

12.86. Da li se određivanje redosleda faza kod simetričnog trofaznog sistema može izvesti ako je umesto kalema na slici 12.85 vezan kondenzator kapacitivnosti C ? Odgovor obrazložiti.

12.87.



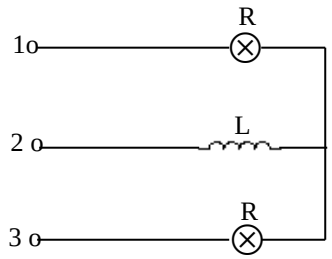
Sl.12.87.

Zbog određivanja redosleda faza simetričnog trofaznog sistema načinjena je veza dve jednake sijalice i kondenzator, kao na slici 12.87. Ova se veza priključi na trofazni napon čiji se redosled faza ispituje.

Koji je redosled faza za dati trofazni sistem ?

Brojni podaci: $R = X_C$

12.88.



Sl.12.88.

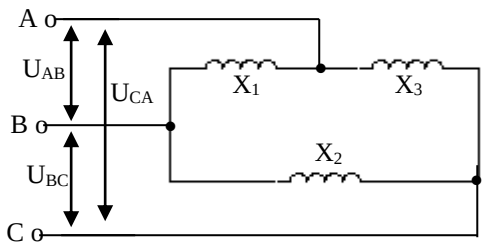
Za određivanja redosleda faza simetričnog trofaznog sistema načinjena je veza dve jednake sijalice i kalem, vezani kao na slici 12.88.

Odrediti odnos struja kroz sijalice priključene na linijske provodnike 1 i 2.

Brojni podaci:

$R = 1\ \Omega$; $X_L = 1\ \Omega$ $U_{12} = U_{23} = U_{31} = U = 10$ V.

12.89.

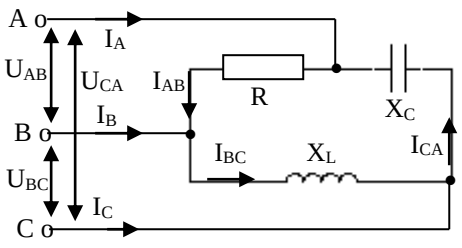


Sl.12.89.

Tri induktivna otpornika $X_1 = 10\ [\Omega]$, $X_2 = 8\ [\Omega]$ i $X_3 = 6\ [\Omega]$ vezana su u trougao , prema slici 12.89, i priključena na trofaznu simetričnu mrežu linijskog napona $U = 400$ V.

Odrediti fazne i linijske struje i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.90.

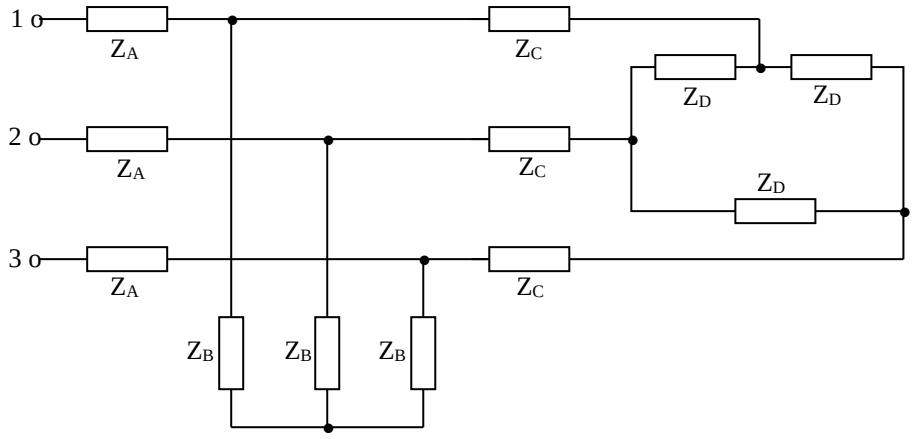


Sl.12.90.

Aktivni otpor $R = 20\ \Omega$, induktivni $X_L = 20\ \Omega$ i kapacitivni $X_C = 20\ \Omega$ vezani su u trougao i priključeni na simetričnu trofaznu mrežu, prema slici 12.90.

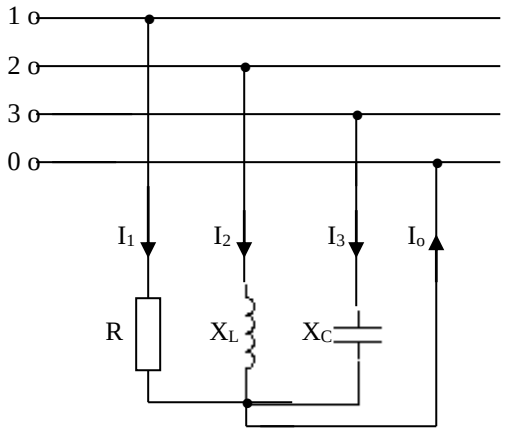
Ako su linijski naponi $\underline{U}_{AB} = 400 \cdot e^{j90}$ V, $\underline{U}_{BC} = 400 \cdot e^{-j30}$ V i $\underline{U}_{CA} = 400 \cdot e^{-j150}$ V, odrediti fazne i linijske struje i nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.91. Na trofazni sistem sa tri voda, linijskog napona U = 380 V, priključeni su simetrični trofazni potrošači, prema slici 12.91. Odrediti linijske struje na glavnim vodovima, ako je:
$\underline{Z}_A = (2{,}31 + j2{,}31)\ [\Omega]$; $\underline{Z}_B = (20 + j25)\ [\Omega]$; $\underline{Z}_C = (1 + j1)\ [\Omega]$ i $\underline{Z}_D = (57 + j42)\ [\Omega]$.



Sl.12.91.

12.92.



Sl.12.92.

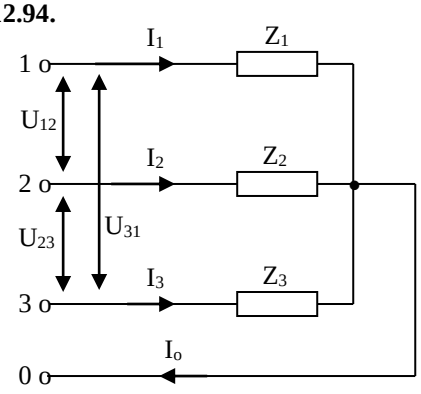
Na trofazni mrežu sa četiri voda linijskog napona U = 380 V priključen je trofazni potrošač, koji se sastoji od tri impedanse $\underline{Z}_1 = R = 20\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = jX_L = j20\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = -jX_C = -j20\ \Omega$, spojenih u zvezdu, prema slici 12.92.

Ako zanemarimo impedanse svih vodova, odrediti:

a) linijske struje I_1, I_2, I_3 i struju koja teče nultim vodom I_o
b) otpornost R′ prve faze pri kojoj će struja nultog voda biti jednaka nuli.
c) Nacrtati fazorski dijagram za oba slučaja.

12.93. Aktivni otpor R = 20 Ω, induktivni otpor $X_L = 20\ \Omega$ i kapacitivni otpor $X_C = 20\ \Omega$ vezani su u zvezdu bez nultog voda, prema slici 12.92 (nula u prekidu) i priključeni na linijski napon $U = 240\sqrt{3}$ V. Odrediti fazne napone potrošača i linijske struje, a zatim nacrtati fazorski dijagram napona.

12.94.



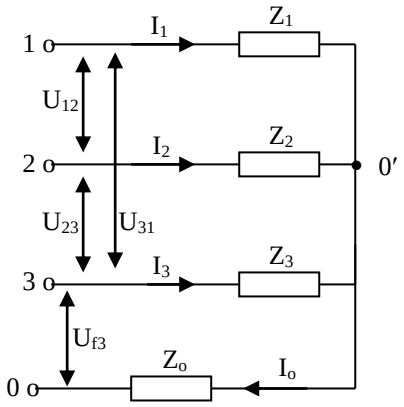
Sl.12.94.

Na trofaznu mrežu sa četiri provodnika linijskih napona $U = 254\sqrt{3}$ V priključen je potrošač, koji se sastoji od tri impedanse $\underline{Z}_1 = (16 + j12)\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = (14 - j21)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = 25\ \Omega$ vezane u zvezdu, prema sl. 12.94.

Uz pretpostavku da se impedanse linijskih provodnika, kao i nultog voda, mogu zanemariti, odrediti:

a) linijske struje I_1, I_2, I_3 i struju nultog voda I_o
b) aktivnu snagu pojedinačnih faza i
c) Nacrtati fazorski dijagram napona i struja.

12.95. Tri impedanse $\underline{Z}_1 = 10 \cdot e^{j0}\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 20 \cdot e^{j60}\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = 20 \cdot e^{-j60}\ \Omega$ vezane su u zvezdu, prema slici 12.95, i priključene na trofazni sistem sa četiri voda linijskih napona $U = 380$ V. Impedansa nultog provodnika iznosi $\underline{Z}_o = 60 \cdot e^{j0}\ \Omega$.



Sl.12.95.

a) Odrediti struju I_o koja protiče kroz nulti provodnik,
b) Odrediti struju I_o, ako impedanse Z_2 i Z_3 zamenu svoja mesta
c) Odrediti struju I_o pod tačkom b) uz pretpostavku da je impedansa Z_o zanemarljiva ($Z_o = 0$) i nacrtati odgovarajući fazorski dijagram napona i struja.

12.96. Tri impedanse $\underline{Z}_1 = 40 \cdot e^{j36,87}\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 25 \cdot e^{j0}\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = 20 \cdot e^{-j53,13}\ \Omega$ vezane su u zvezdu i priključene na trofazni sistem sa tri voda linijskih napona $U = 220\sqrt{3}$ V.

a) Odrediti napon U_o između zvezdišta generatora i zvezdišta potrošača, fazne napone potrošača i linijske struje.
b) Odrediti sve veličine pod a), uz pretpostavku da se nul tačke generatora i potrošača poveže nultim vodom impedanse $\underline{Z}_o = 0{,}8\ \Omega$.

Nacrtati odgovarajuće fazorske dijagrame napona i struja (i za a i za b).

12.97. Rešiti zadatak 12.92, uz sledeće pretpostavke:

a) nulti vod je u prekidu,
b) admitansa nultog voda iznosi $\underline{Y}_o = 0{,}45$ S.

Nacrtati odgovarajuće fazorske dijagrame napona i struja (za obe tačke).

12.98. Nesimetrični trofazni prijemnik vezan u zvezdu, impedansi $\underline{Z}_1 = 10\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = (15 + j5)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (20 - j4)\ \Omega$, vezan je vodovima zanemarljive impedanse na simetrični trofazni generator, koji je vezan u zvezdu. Ako je fazni napon generatora (mreže) $U_f = 220$ V, izračunati sve struje u vodovima i struju nultog provodnika, kao i sve snage prijemnika. Impedanse namotaja generatora su zanemarljive.

12.99. Rešiti predhodni zadatak uz pretpostavku da sistem nema nulti provodnik (nula u prekidu).

12.100. Koliki je zbir trenutnih (analitičkih izraza) elektromotornih sila trofaznog simetričnog generatora ako je on vezan a) u trougao; b) u zvezdu ?

12.101. Simetričan trofazni, pretežno kapacitivni, prijemnik impedanse $Z = 300\ \Omega$ i faktora snage $\cos\varphi = 0{,}8$, priključen je na simetričan trofazni generator, čiji su namotaji vezani u zvezdu. Ako je efektivna vrednost ems generatora po fazama (namotaju) jednaka $E = 10$ kV, odrediti vrednosti aktivne i reaktivne snage sistema.

12.102. Simetričan trofazni prijemnik, faktora snage $\cos\varphi = 1$, priključen je na idealni simetrični trofazni generator. I prijemnik i generator su vezani u zvezdu bez nultog voda. Ako je aktivna snaga prijemnika bez jedne faze(npr. na fazi C isključen prekidoč) $P = 6$ kW, kolika će biti aktivna snaga prijemnika kada je uključena i treća faza (uključen prekidač na fazi C) ?

12.103. Trofazni simetrični prijemnik vezan u trougao, priključen je na simetričan trofazni generator vezan u zvezdu. Ako je ems generatora po fazi (namotaju) $E = 1$ kV a impedansa prijemnika $Z = R = 900\ \Omega$, odrediti promenu snage na prijemniku kada dođe do prekida jedne faze (voda B).

REŠENJA:

1.1. ----- $i = I_m \sin\alpha \Rightarrow 12 = I_m \sin 30° \Rightarrow 12 = 0{,}5\, I_m \Rightarrow I_m = 12 / 0{,}5 = 24$ [A];

1.2. ----- 49,9 V;

1.3. -----

$$\frac{I}{2} = I\sqrt{2}\sin 314t \Rightarrow \sin 314t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 314t = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}3625\,[\text{rad}] \Rightarrow t = \frac{0{,}3625}{314} = 0{,}00115\,[\text{s}] = 1{,}15\,[\text{ms}]$$

1.4. ----- $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I_m \sin 314\,t \Rightarrow \sin 314\,t = 0{,}707 \Rightarrow 314\,t = \pi/4 \Rightarrow t = \frac{3{,}14}{4\cdot 314} = \frac{1}{400} = 0{,}0025\,[\text{s}] = 2{,}5$ ms;

1.5. ----- 14.1 A; **1.6.** ----- 15 A;

1.7. ----- $0 = 100\cos(\omega t - \pi/4) \Rightarrow \cos(\omega t - \pi/4) = 0 \Rightarrow \omega t - \pi/4 = \arccos 0 = \pi/2 \Rightarrow \omega t = \pi/2 + \pi/4$

$$\frac{2\pi}{T}\cdot t = \frac{2\pi+\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{8}T;$$

1.8. ----- 50 Hz; **1.9.** ----- p = 3;

1.10. ----- $n = \frac{60\cdot f}{p} = \frac{60\cdot 50}{6} = 500\left[\text{ob}/\text{min}\right] = 500$ [min^{-1}].

1.11. ----- p = 20; **1.12.** ----- t = 2,2 ms; **1.13**. ----- t = 2,5 ms; **1.14.** ----- $\omega t = 45°$;

1.15. ----- f = 50 Hz; **1.16.** ----- n = 10 000 min^{-1};

1.17. ----- $E_m = N\cdot\omega\cdot\Phi_m = 2\pi\cdot\frac{n\cdot p}{60}\cdot\Phi_m = 6{,}28\cdot\frac{3000\cdot 1}{60}\cdot 2\cdot 10^{-2} = 6{,}28\,[\text{V}] \Rightarrow e = 6{,}28\sin(314\,t - \pi/2)$ [V];

1.18. ----- $t_1 = 1{,}918$ ms, $t_2 = 12{,}5$ ms;

1.19. ----- $u = 2\sqrt{2}\sin(2\pi f\cdot t + \psi) \Rightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\sin(2\pi\cdot t / T + \psi) \Rightarrow \sin(62800\cdot t + \psi) = 0{,}5$
Kako se vreme počinje meriti sa t = 0 s, sledi: $\sin\psi = 0{,}5 \Rightarrow \psi = \arcsin 0{,}5 = 30° = \pi/6$ [rad].
Analitički izraz za dati napon je $u = 2\sqrt{2}\sin(62\,800\,t + \pi/6)$ [V].
Za $t' = 10^{-5}$ s $\Rightarrow u' = 2\sqrt{2}\sin(62\,800\cdot 10^{-5} + 3{,}14/6) = 2{,}82\sin(0{,}628 + 0{,}523) = 2{,}82\cdot 0{,}913 = 2{,}575$ [V].

1.20. ----- $I_m = 50$ A, $I^2 \approx (0^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2 + 50^2)/6 = 5500/6 = 916{,}67 \Rightarrow I \approx 30{,}28$ A, $I_S = 25$ A;

1.21. ----- $E_m = N\cdot\omega\cdot\Phi = N\cdot 2\pi\cdot f\cdot B\cdot S = 2\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{n\cdot p}{60}\cdot 1{,}59\cdot 0{,}1 = 4\cdot\pi\cdot\frac{3000}{60}\cdot 0{,}159 = 200\cdot\pi\cdot 0{,}159 = 99{,}9\,[\text{V}]$.

1.22. ----- Fazna razlika između napona iznosi $(\omega t + 15°) - (\omega t - 30°) = 45° \Rightarrow t : T = 45° : 360° \Rightarrow$
$t = 0{,}125\cdot T = 0{,}125 / f = 0{,}125 / 50 = 0{,}0025$ [s] = 2,5 [ms];

1.23. ----- $I_m = 6\sqrt{2} = 8{,}485\,[\text{A}]$, $I_S = \frac{2I_m}{\pi} = 5{,}405\,[\text{A}]$, $T = \frac{1}{f} = 0{,}02\,[\text{s}]$,

$$q = I_S\cdot\frac{T}{2} = 5{,}405\cdot 0{,}01 = 0{,}005405\,[\text{C}];$$

1.24. ----- $I_1 = 2\,I_2$; **1.25.** ----- $U_m = 400$ V; **1.26.** ----- $\alpha = 3°45'$;

1.27. ----- $e = 1\,004{,}8\sin 314t$, $\omega = 314$ rad/s;

1.28. ----- a) $I_S = 2$ A, b) $I = 4$ A, c) $k = I / I_S = 2$;

1.29. ----- a) $i_1 = \sin \omega t$; $i_2 = \sqrt{2} \sin (\omega t + \theta_2) \Rightarrow \sin 2\pi \cdot 50 \cdot 15 \cdot 10^{-3} = \sqrt{2} \sin (2\pi \cdot 50 \cdot 15 \cdot 10^{-3} + \theta_2)$

$\sin 3\pi/2 = \sqrt{2} \sin (3\pi/2 + \theta_2) \Rightarrow -1 = \sqrt{2} \sin (3\pi/2 + \theta_2) \Rightarrow \sin (3\pi/2 + \theta_2) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

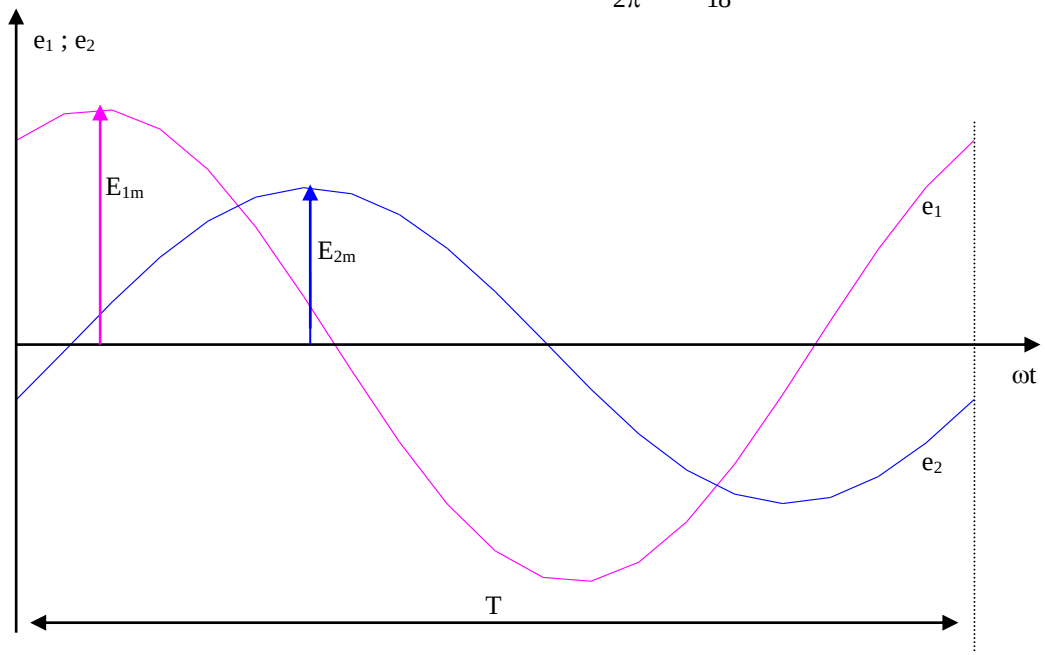
Slede dva rešenja. Prvo: $3\pi/2 + \theta_2' = 5\pi/4 \Rightarrow \theta_2' = 5\pi/4 - 6\pi/4 = -\pi/4$
i drugo: $3\pi/2 + \theta_2'' = 7\pi/4 \Rightarrow \theta_2'' = \pi/4$,

b) $i_2 = \sqrt{2} \sin (\omega t \pm \pi/4) \Rightarrow$ Prvo rešenje je $i_{2o}' = 1$ mA, a drugo $i_{2o}'' = -1$ mA;

1.30. ----- a) Magnetni fluks kalema, u odnosu na pozitivni smer, prema slici smer kazaljke na satu iznosi:
$\phi = \Phi_m \cos (\omega t + \theta) = B \cdot S \cos (\omega t + \theta) = Bab \cos (\omega t + \theta) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cos (\omega t + \theta) = 10^{-3} \cos (\omega t + \theta)$.
Kružna učestanost kalema je $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi \cdot n}{60} = 104{,}6$ [rad/s]. Kako je $E_m = N\omega\Phi_m = 100 \cdot 104{,}6 \cdot 10^{-3} = 10{,}46$ V
pa izraz za ndukovanu ems glasi : $e = E_m \sin (\omega t + \theta) = 10{,}46 \sin (104{,}6\, t + 30°)$ V.
NAPOMENA! Imati u vidu da je pozitivni smer smer kazaljke na satu i da fluks ϕ prednjači ems e za $\pi/2$.
b) $E_m = 10{,}46$ V, $E = 7{,}39$ V, $f = 16{,}6$ Hz, $\theta = 30°$,
c) Kada se kalem pomeri za ugao α_1 u odnosu od početnog položaja, njegov početni ugao je sada $\alpha_1 + \pi/6$, pa izraz za indukovanu ems e_1 glasi: $e_1 = 10{,}46 \sin (\omega t + \alpha_1 + \pi/6) = 10{,}46 \sin (\alpha_1 + \pi/6) = 9{,}06$ V.

1.31. ----- $E_{1m} = 60$ V, $E_{2m} = 40$ V, $E_1 = 42{,}3$ V, $E_2 = 28{,}2$ V, $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = -\pi/9$, $\theta = 4\pi/9$, $\omega = 628$ rad/s,

$f = 100$ Hz, $T = 10$ ms, $t_{12} : T = \theta : 2\pi \Rightarrow t_{12} = \dfrac{\frac{4}{9}\pi}{2\pi} \cdot T = \dfrac{4}{18} \cdot 10 = 2{,}2$ ms (vremenski pomak),



1.32. ----- a) $e_2 = 282 \sin (\omega t + \pi/3)$ V,
b) $t_{13} : T = \theta_{13} : 360° \Rightarrow$

$\theta_{13} = \dfrac{t_{13} \cdot 360}{T} = t_{13} \cdot 360 \cdot f = \dfrac{5}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 360 \cdot 50 = 30° \quad \Rightarrow \quad e_3 = 141 \sin (\omega t - 50°)$ V.

1.33. ----- $I_{1s} = (3 + 0 + 0 + 0)/4 = 0{,}75$ A, $I_{2s} = (1 + 1 + 1 + 0)/4 = 0{,}75$ A i $I_{3S} = 0$ A
$I_1^2 = (9 + 0 + 0 + 0)/4 = 2{,}25 \Rightarrow I_1 = 1{,}5$ A, $I_2^2 = (1 + 1 + 1 + 0)/4 = 0{,}75 \Rightarrow I_2 = \sqrt{3}/2$ A i $I_3 = 5$ A.

1.34. ----- $U_S = 50$ V (za T/2), $U_S = 0$ (za T); $U^2 \approx (0^2 + 10^2 + 20^2 + .. + 100^2) / 11 \Rightarrow U \approx 59{,}16$ V

1.35. ----- $t_K : T = [\ 60 - (\ -120\ )\ ] : 360 \Rightarrow t_K = T/2 = 1/2f = 2\pi/2\omega = \pi/100\pi = 0{,}01$ s.

1.36. ---- $-40 = 80 \sin(\ 2\pi\cdot 400\cdot 1{,}25\cdot 10^{-3} + \theta\ ) \Rightarrow -0{,}5 = \sin(\ \pi + \theta\ ) \Rightarrow (\ \pi + \theta\ ) = \arcsin(\ -5\ )$
Slede dva rešenja. Prvo: $\pi + \theta_1 = -\pi/6 \Rightarrow \theta_1 = -7\pi/6 = 5\pi/6$ i drugo: $\pi + \theta_2 = -\pi + \pi/6 \Rightarrow \theta_2 = \pi/6$.

Analitički izraz za struju pri prvom rešenju glasi:

$$i' = 80 \sin(\ 800\pi\cdot t + 5\pi/6\ )\ [\text{mA}],$$

a za drugo rešenje:

$$i = 80 \sin(\ 800\pi\cdot t + \pi/6\ )\ [\text{mA}].$$

Na grafiku se vidi (tačka A) da je kod drugog rešenja struja u negativnom porastu (raste od –40 mA ka negativnom maksimumu, tj. ka – 80 mA), matematički broj opada, pa se za rešenje zadatka uzimo ovo drugo rešenje.

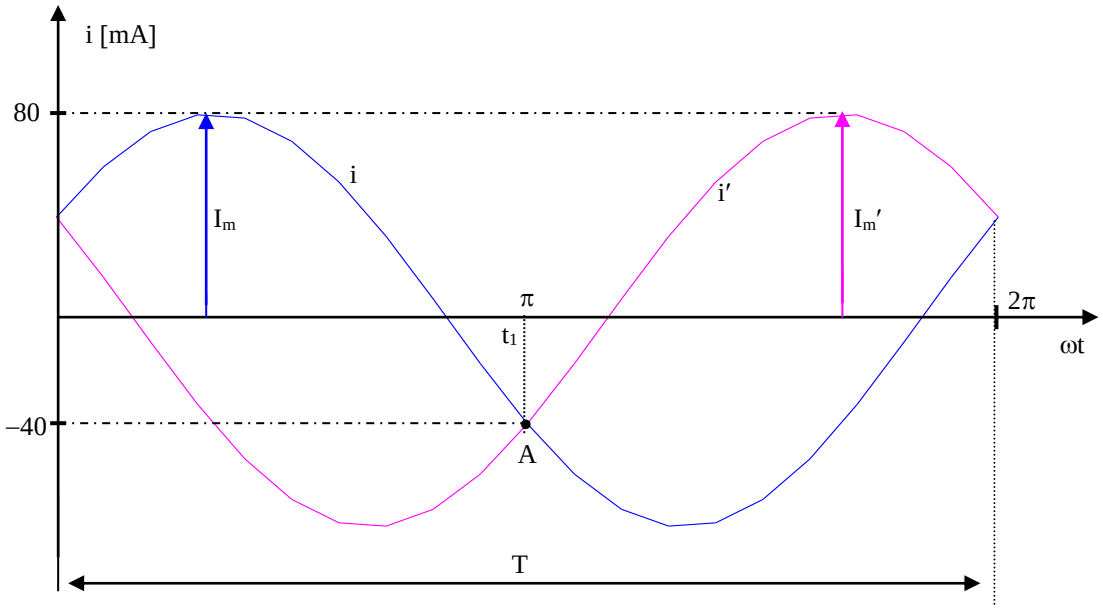
NAPOMENA! Ako se pretpostavi da je znak minus samo znak suprotnog smera struje, tada bi se moglo uzeti za rešenje zadatka prvo rešenje, jer ta struja raste u suprotnom smeru od trenutka t_1.

Dakle, gledano matematički, rešenje je:

$$i = 80 \sin(\ 800\pi t + \pi/6\ ) \Rightarrow \theta = \pi/6$$

a u realnosti rešenje je:

$$i' = 80 \sin(\ 800\pi t + 5\pi/6\ ) \Rightarrow \theta = 5\pi/6.$$



1.37. ----- a) $i_2 = 60\sqrt{2} \sin(\ \omega t + 4\pi/15\ )$ mA; b) $i_2 = 30\sqrt{2} \sin(\ \omega t + \pi/6\ )$ mA;
c) $i_2 = 30\sqrt{2} \sin(\ \omega t + 2\pi/3\ )$ mA;

1.38. ----- a) $I_1 / I_2 = 1$, b) $I_{S1} / I_{S2} = 0$; **1.39.** ----- $E_m = N\cdot\omega\cdot\Phi_m = 20$ V $\Rightarrow$ $e = 20 \sin(\ 100t - 90°\ )$ V;

1.40. ----- $\sqrt{3} = U_m \sin(\ \omega t_o + \theta\ ) = U_m \sin\theta$; $3 = U_m \sin(\ \omega t_1 + \theta\ ) = U_m \sin(\ 90° + \theta\ ) \Rightarrow$

$$U_m = \frac{\sqrt{3}}{\sin\theta} = \frac{3}{\sin(90+\theta)} \Rightarrow \sqrt{3}\sin(\ 90 + \theta\ ) = 3\sin\theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sin\theta}{\sin(90+\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\theta \Rightarrow \theta = 30°.$$

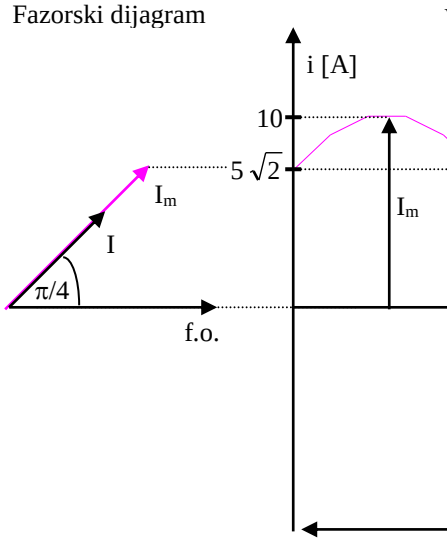
$$U_m = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30^o} = \frac{\sqrt{3}}{0{,}5} = 3{,}46[\text{V}] \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{0{,}5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{0{,}5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{0{,}5\cdot 2} = \sqrt{6}[\text{V}]\ ;$$

1.41. ----- $u = 220\cdot 1{,}41 \sin(\ 314t + \pi/2\ ) = 220\cdot 1{,}41 \sin(\ 314/300 + 1{,}57\ ) = 155{,}45$ V.

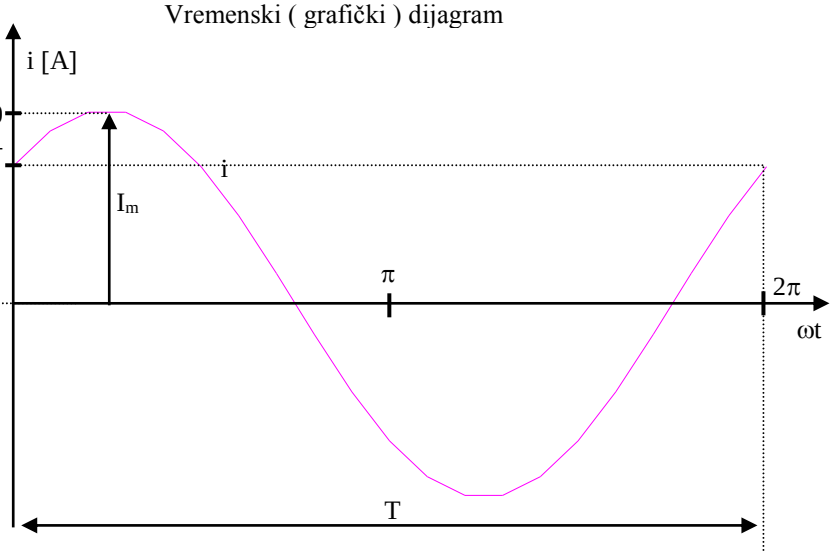
2.1. ---- $i_2 = 5 \sin (\omega t + \pi/4 - 3\pi/4) = 5 \sin (\omega t - \pi/2) = -5 \cos \omega t$;

2.2. ----- $\underline{I} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4} [A] = 5 + j\,5$ [A];

Fazorski dijagram



Vremenski (grafički) dijagram



2.3. ---- $i = 20 \sin (\omega t + \pi/4)$;

2.4. ----

Analitičko sabiranje :

$i = i_1 + i_2 = 5 \sin (\omega t + \pi/4) + 5 \cos (\omega t + \pi/4) = 5 \sin (\omega t + \pi/4) + 5 \sin (\omega t + \pi/4 + \pi/2) \Rightarrow$

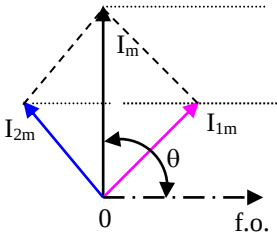
$i = 5 \sin (\omega t + \pi/4) + 5 \sin (\omega t + 3\pi/4)$.

Kako je: $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \Rightarrow$

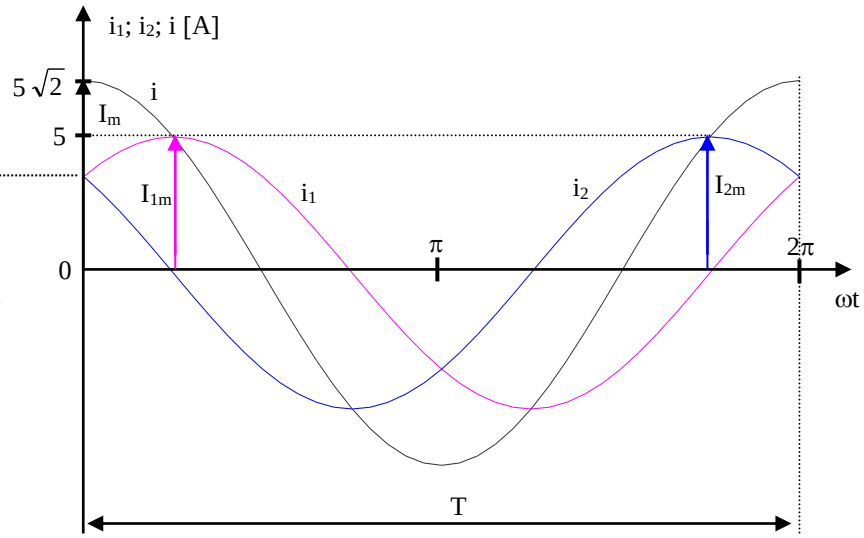
$$i = 5 \cdot 2 \sin \frac{\omega t + \pi/4 + \omega t + 3\pi/4}{2} \cdot \cos \frac{\omega t + \pi/4 - \omega t - 3\pi/4}{2} = 10 \sin \frac{2\omega t + \pi}{2} \cos \frac{-\pi/2}{2} = 10 \sin\left(\omega t + \pi/2\right) \cos\left(-\pi/4\right) \Rightarrow$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 \sin\left(\omega t + \pi/2\right) = 5\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \pi/2\right) = 5\sqrt{2} \cos \omega t \ ;$$

Fazorsko sabiranje:



Grafičko sabiranje:



Kompleksno sabiranje:

$$\underline{I}_{m1} = 5\cdot e^{j\pi/4} = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + j\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)[A] \Rightarrow \underline{I}_1 = \left(\frac{5}{2} + j\frac{5}{2}\right)[A] \ ;$$

$$\underline{I}_{m2} = 5\cdot e^{j3\pi/4} = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{-5\sqrt{2}}{2} + j\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)[A] \Rightarrow \underline{I}_2 = \left(-\frac{5}{2} + j\frac{5}{2}\right)[A];$$

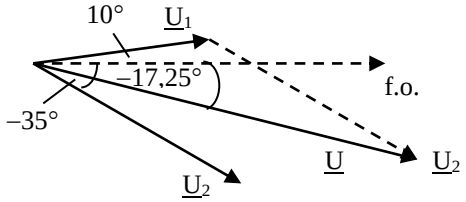
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = j5[A] \Rightarrow I = 5[A] \Rightarrow I_m = 5\sqrt{2}[A] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}.$$

Na ovom zadatku se lako uočava da je fazorsko i kompleksno sabiranje najjednostavnije, pa se ova dva načina najčešće i koriste. Nedostatak analitičkog proračuna je uslov dobrog poznavanje trigonometrije, a grafičkog složenost crtanja grafika.

2.5. ----- $\underline{I}_3 = I\cdot e^{-j4\pi/3} = I\cdot e^{j2\pi/3}$; $\underline{I} = I + I\cdot[\cos(-2\pi/3) + j\sin(2\pi/3)] + I\cdot[\cos 2\pi/3 + j\sin 2\pi/3] = 0$;

2.6. ----- $\underline{I} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + j5\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$;

2.7. ----- $\underline{U} = \frac{463}{\sqrt{2}}\cdot e^{-j17{,}25^\circ}$; $u = 463\sin(314t - 17°15')$;



2.8. ----- $i_o = 2\sqrt{17}\ \sin(\omega t + 14°)$;

2.9. -----

$$\underline{I}_o = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{10}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{10}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{I}_o = \frac{5}{\sqrt{2}} + j\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - j\frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}535 + j6{,}125 + 6{,}125 - j3{,}535 = 9{,}66 + j2{,}59 \Rightarrow I_o = \sqrt{9{,}66^2 + 2{,}59^2} = 10[A]$$

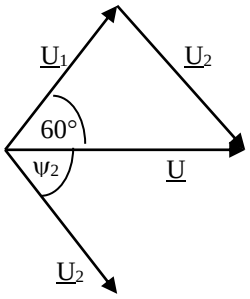
$$\theta_o = \text{arctg}\frac{2{,}59}{9{,}66} = \text{arctg}0{,}268 = 15^\circ \Rightarrow i_o = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 15^\circ)[A] \Rightarrow \underline{I}_o = 10\cdot e^{j15^\circ}[A]$$

Čitaocu se ostavlja da nacrta fazorski i grafički dijagram, na osnovu dobijenih podataka.

2.10. ----- $i_1 = 10\sin(25t + 90°)$; $i_2 = 5\sin(25t - 45° + 90°) = 5\sin(25t + 45°) \Rightarrow$
$\underline{I}_1 = 7{,}05\cdot(\cos 90° + j\sin 90°) = j7{,}05$; $\underline{I}_2 = 3{,}536\cdot(\cos 45° + j\sin 45°) = 2{,}5 + j2{,}5$;
$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = j7{,}05 + 2{,}5 + j2{,}5 = 2{,}5 + j9{,}55 \Rightarrow I_3 \approx 10$; $\theta_3 = \text{arct}(9{,}55/2{,}5) \approx 75° \Rightarrow$
$i_3 = 14{,}1\sin(25t + 75°)$, $\underline{I}_3 = 10\cdot e^{j75°}$;

Čitataocu se preporučuje da rešenje zadatka proveri analitičkim, fazorskim i grafičkim načinom.

2.11. -----



Ako pretpostavimo da je napon U u faznoj osi, sledi:
$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \Rightarrow \underline{U}_2 = \underline{U} - \underline{U}_1 = 220 - 175\cdot(\cos 60° + j\sin 60°)$
$\underline{U}_2 = 220 - 87{,}5 - j151{,}55 = 132{,}5 - j151{,}55 \Rightarrow$
$U_2 = 201{,}3$ V ; $\psi_2 = -48{,}84°$.

2.12. ----- $U_{BA} = 100$ V, $U_{CD} = 173$ V, $\theta_{BA} = 60°$, $\theta_{CD} = -30°$; **2.13.** ----- $i = 6{,}8 \sin(\omega t + 5{,}5°)$ A;

2.14. ----- U = 429,6 V**;** **2.15.** ----- $\underline{I} = 13{,}53 \cdot e^{j\,12°48'}$ A; **2.16.** ----- $\underline{I}_2 = 7{,}48 \cdot e^{j\,78°24'}$ A;

2.17. ----- $e = 12{,}1 \sin(314t - 5{,}5°)$; **2.18.** ----- $\underline{U}_1 = 120\, e^{j\,0°}$ V, $\underline{U}_2 = 120\, e^{j\,60°}$ V, $\underline{U} = 120\, e^{-j\,60°}$ V;

2.19. ----- $e_2 = e - e_1 = 28{,}3 \sin(\omega t + 0{,}558)$ V [NAPOMENA! ($\omega t + 0{,}558$) u radijanima];

2.20. ----- $e = 16{,}09 \sin(\omega t + 34{,}74°)$ V;

2.21. ----- $\omega t = 120°$, $e_1 = 8{,}66$ V, $e_2 = 0$ V, $e_3 = 4$ V, $e_4 = -5{,}796$ V, $e = 6{,}866$ V. Iz navedenih podataka sledi $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, što potvrđuje drugi Kirhofov zakon (kao i tačnost rešenja zadatka);

2.22. ----- a) $e = e_1 + e_2 = 0 \Rightarrow 141 \sin(314t + 30°) = -200 \cos(314t - 30°)$.
Koristeći izraze $\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$ **i** $\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \Rightarrow$
$\operatorname{tg} 314t = -1{,}097 \Rightarrow \alpha = -47{,}65°$. Kako vreme traje od nule ($t > 0$), tada se ovom negativnom vremenu doda T/2 (ili u uglu 180°) $\Rightarrow 360 \cdot 50 \cdot t = -47{,}65° + 180° \Rightarrow t = 0{,}00735$ s = 7,35 ms. Čitaocu se preporučuje da ovo vreme izračuna preko analitičkog izraza za ukupnu ems e [$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \Rightarrow e = 0 = 233{,}17\sqrt{2} \sin(314t + 47{,}57°)$. $\Rightarrow t = 7{,}35$ ms] i proveri tačnost rešenja (primenom drugog Kirhofovog zakona),
b) $\underline{E}_1 = 100\, e^{j\,30°}$, $\underline{E}_2 = 141\, e^{j\,60°}$, $\underline{U} = 328{,}6\, e^{j\,47{,}62°}$, $\omega t = 42{,}39°$, $e_1 = 134{,}39$ V, $e_2 = 195{,}34$ V, $u = 328{,}6$ V.
c) $\omega t = 150° \Rightarrow t = 8{,}33$ ms, $e_2 = u = -100$ V. Drugi Kirhofov zakon se primenjuje na trenutne vrednosti.

2.23. ----- $\underline{I}_2 = I \cdot e^{j\,0°} = 10\, e^{j\,0°}$ A, $\underline{I}_3 = I \cdot e^{j\,120°} = 10\, e^{j\,120°}$. Ova dva vektora sa svojim zbirom daje vektor I_1 koji je jednak $\underline{I}_1 = I \cdot e^{j\,60°} = 10 \cdot e^{j\,60°}$, jer sva tri vektora čine jedan jednakostranični trougao.
Za $i_1 = 10$ A $\Rightarrow \omega t + 60° = 90° \Rightarrow \omega t = 30°$, $i_2 = 5$ A, $i_3 = 5$ A, što potvrđuje prvi Kirh. Zakon

2.24. ----- $\underline{U}_1 = U\, e^{j\,0°}$, $\underline{U}_2 = U e^{j\,60°}$, $\underline{U}' = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \Rightarrow U' = \sqrt{3}\, U$, $\underline{U}'' = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \Rightarrow U'' = U$;

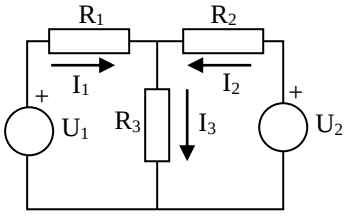
2.25. ----- a) $I_3 = 60\sqrt{2}$ mA, $\theta = 3\pi/4$; b) Dioda propušta samo jedan smer struje, pa će zbog toga efektivna vrednost struje (na kvadrat) kroz diodu biti dva puta manja od efektivne vrednosti struje bez diode (na kvadrat). Napomena! Efektivna vrednost struje se dobije iz srednje vrednosti kvadrata struje (toplota).
Dakle, $I'^2 = I^2/2 \Rightarrow I' = I/\sqrt{2} = 60\sqrt{2}/\sqrt{2} = 60$ mA;
Kako se srednja vrednost računa za polovinu periode, ona je ista sa ili bez diode i iznosi $I_S = 240/\pi$ mA;

2.26. ----- $\underline{E} = 110\, e^{-j\,150°}$ V;

3.1.1. ----- $u = 220\sqrt{6}$ V; **3.1.2**. ----- I = 3 A; **3.1.3.** ----- $i = 20\sqrt{2}$ A; **3.1.4.** ---- $i = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$;

3.1.5. ----- $I = 4\sqrt{2}\sin\omega t$;

3.1.6. -----



$\underline{U}_1 - \underline{I}_1R_1 - \underline{I}_3R_3 = 0 \Rightarrow 100/1{,}41 - 20\underline{I}_1 - 5\underline{I}_3 = 0$ …… (1)

$\underline{U}_2 - \underline{I}_2R_2 - \underline{I}_3R_3 = 0 \Rightarrow 140/1{,}41 - 20\underline{I}_2 - 5\underline{I}_3 = 0$ ……. (2)

$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ……(3)

$100 - 20\underline{I}_{m1} - 5\cdot(\underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2}) = 0 \Rightarrow 100 - 25\underline{I}_{m1} - 5\underline{I}_{m2}$ ……..(1′)

$140 - 20\underline{I}_{m2} - 5\cdot(\underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2}) = 0 \Rightarrow 140 - 5\underline{I}_{m1} - 25\underline{I}_{m2}$ … …. (2″)

$-500 + 125\underline{I}_{m1} + 25\underline{I}_{m2} = 0$

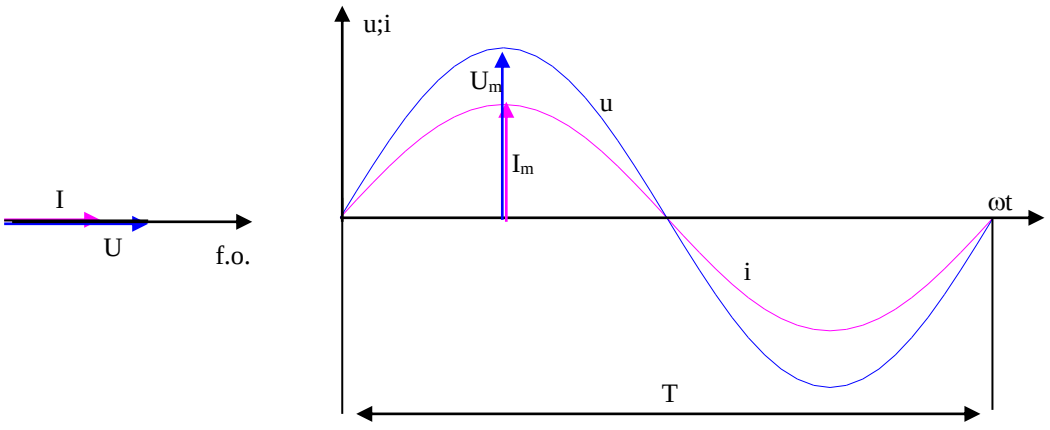
$140 - 5\underline{I}_{m1} - 25\underline{I}_{m2} = 0$

$-360 + 120\underline{I}_{m1} = 0 \Rightarrow \underline{I}_{m1} = 3;\ \underline{I}_{m2} = 5;\ \underline{I}_{m3} = 8$

$i_1 = 3\sin\omega t;\ \ i_2 = 5\sin\omega t;\ \ i_3 = 8\sin\omega t.$

3.1.7. ----- R = 14,1 Ω, $\underline{R} = 14{,}1e^{j\,0°}\ \Omega$, f = 73,41 Hz;

3.1.8. ----- $R_e = R_1 + R_2 = 15\ \Omega$; $I = U/R_e \Rightarrow I_m = U_m/R_e = 300/15 = 20\ A \Rightarrow I = 14{,}1$ A;



3.1.9. ----- $R = 35\sqrt{2}\ \Omega$;

3.1.10. ----- $i = 3{,}38\sin(314\,t + 30°)$ A; **3.1.11.** ----- $\underline{Z}_R = R = 49{,}35\ \Omega$, $\underline{Z}_R = 49{,}35e^{j\,0°}\ \Omega$;

3.1.12.. ----- a) $i_1 = i_2 = 10\sin 314\,t$ (samo pozitivne poluperiode); $i_3 = |\,10\sin 314\,t\,|$ (negativna poluperioda je Grecovim spojem dioda pretvorena u pozitivnu poluperiodu.

b) $I_3 = 10/\sqrt{2} = 7.07$ A (isto kao i bez dioda)

$I_1^2 = I_2^2 = (I_m^2/2)/2 = (100/2)/2 = 25 \Rightarrow I_1 = I_2\ \ 5$ A (druga polovina poluperiode je jednaka nuli, pa je $I_m^2/2$ deljeno sa 2, jer je površina koju stvara i_1 (odnosno i_2) dva puta manja od površine koju čini struja i_3 u vremenskom intervalu T.

3.2.1. ----- $e_L = 31{,}4 \sin \omega t$; **3.2.2.** ----- L = 1 mH; **3.2.3.** ----- $i = 200 \sin (500t - \pi/4)$;

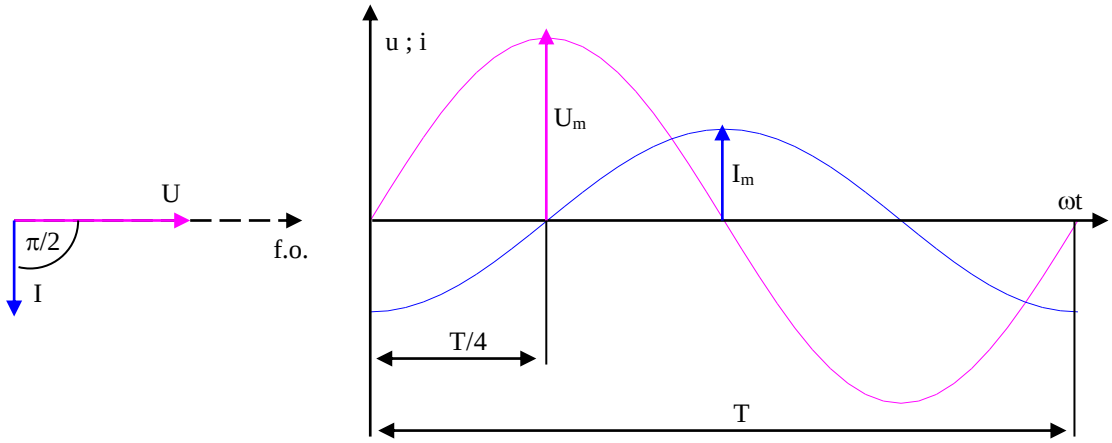
3.2.4. ----- $i = 200 \sin (100t - \pi/2)$; **3.2.5.** ----- f = 50 Hz;

3.2.6. ----- $X_{L1} = \omega_1 L \Rightarrow L = X_{L1}/\omega_1 = 78/2\pi\cdot 500$; $X_{L2} = 2\pi f_2 L \Rightarrow f_2 = \dfrac{X_{L2}}{2\pi \cdot L} = \dfrac{120}{2\pi \cdot \dfrac{78}{2\pi \cdot 500}} = 769{,}23 [\text{Hz}]$.

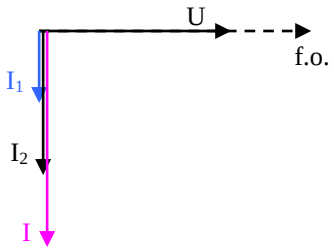
3.2.7. ----- $u = U_m \sin (\omega t + \theta_u) \Rightarrow 0 = 100\sqrt{2} \sin (2\pi/6 + \theta_u) \Rightarrow \sin (\pi/3 + \theta_u) = 0 \Rightarrow \pi/3 + \theta_u = 0 \Rightarrow \theta_u = -\pi/3 \Rightarrow u = 141 \sin (314t - \pi/3)$; $i = I_m \sin (\omega t - \pi/3 - \pi/2) = I_m \sin (\omega t - 150°)$;
$I_m = U_m / \omega L = 6{,}37\sqrt{2}$; za $t = T/6 \Rightarrow i = 6{,}37\sqrt{2} \sin (60° - 150°) = -I_m = -6{,}37\sqrt{2}$ [A],
$i_o = 0 = I_m \sin (\omega t' - 5\pi/6) \Rightarrow \sin (314t' - 2{,}618) = 0 \Rightarrow 314t' - 2{,}618 = 0 \Rightarrow t' = \dfrac{2{,}618}{314} = 0{,}00834$ s.
Struja će biti jednaka nuli u trenutku $t' = 0{,}00834$ [s] = 8,34 [ms];

3.2.8. ----- a) I = 2,65 A, b) I = 0,159 A; **3.2.9.** ----- L = 51 mH; **3.2.10.** ----- $I_m = 0{,}28$ A, L = 80 mH;

3.2.11. ----- $X_{L1} = 2\pi\cdot 60\cdot 0{,}4 = 48\pi$ [Ω] ; $X_{L2} = 2\pi\cdot 60\cdot 0{,}2 = 24\pi$ [Ω]
a) $X_{Le} = X_{L1} + X_{L2} = 72\pi$ [Ω]; $I = U / X_{Le} = 80 / 72\pi = 0{,}354$ [A],



b) $I_1 = U/ X_{L1} = 80/48\pi = 0{,}531$ [A]; $I_2 = U/X_{L2} = 80/24\pi = 1{,}062$ [A]; $I = I_1 + I_2 = 1{,}593$ [A]**;**
Na slici je dato rešenje fazorskog dijagrama, uzimajući napon u faznoj osi (početni ugao nula). Čitaocu nije problem da na osnovu fazorskog dijagrama nacrta vremenski (grafički). Čitaocu se preporučuje da nacrta novi fazorski dijagram u kojem će u faznu osu postavi struje I_1, I_2 i I, pa na osnovu takvog fazorskog dijagrama da nacrta vremenski.



3.2.12. ----- $\underline{Z}_L = j X_L = j\ 16\ \Omega$; **3.2.13.** ----- $\underline{Z}_L = j X_L = j\ 32\ \Omega$;

3.2.14. ----- a) $\underline{Z}_{L1} = j\ 150{,}72\ \Omega$, $\underline{Z}_{L2} = j\ 75{,}36\ \Omega$, X_L je srazmerno sa f;

3.2.15. ----- U = 0 ($U = I\cdot X_L = 3\cdot 0 = 0$), jer je induktivni otpor kod jednosmerne struje jednak nuli.

3.3.1. ---- C = 312,5 μF; **3.3.2.** -----napon je pomeren u odnosu na f.o. za 3π/4, a struja (3π/4 + π/2) 225°;

3.3.3. ---- I = 0,8 A; **3.3.4.** ----- C = 5μF;

3.3.5. ----- a) X_C = 106,2 Ω, b) I = 3,77 A;
Ako uzmemo da je početni ugao za napon 0 ($\underline{U}$ = 400 V) ⇒
a) $\underline{Z}_C = -j106{,}2 = 106{,}2\,[\cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2)] = 106{,}2\cdot e^{-j\pi/2}$ [Ω];
b) $\underline{I} = j3{,}77 = 3{,}77\,(\cos\pi/2 + j\sin\pi/2) = 3{,}77\cdot e^{j\pi/2}$ [A].
Rešenja kompleksnih brojeva su data redosledom: algebarski, trigonometrijski i eksponencijalni oblik.

3.3.6. ----- a) i = 14,1 sin (314t + π/3), b) $X_C' = 1$ Ω, c) i′ = 141 sin (3 140t + π/3);
$\underline{I} = 10\cdot e^{j\pi/3} = 5 + j8{,}66$; $\underline{Z}_C = 10\cdot e^{-j\pi/2} = -j10$; $\underline{Z}_C' = 1\cdot e^{-j\pi/2} = -j1$; $\underline{I}' = 100\cdot e^{j\pi/3} = 50 + j86{,}6$
Reaktansa ne zavisi od napona i struje, jer je u svim varijantama kod savršenog C kola fazni pomak između napona i struje jednak π/2, pa je: $\underline{Z}_C = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U}{I}\cdot e^{-j\pi/2} = X_C\cdot e^{-j\pi/2} = -jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$

3.3.7. ----- I_m = 8,85 A;

3.3.8. ----- $X_{C1} = 1/\omega C_1 = 63{,}69$ Ω; $X_{C2} = 1/\omega C_2 = 318{,}47$
a) $Z_r = X_{C1} + X_{C2} = 382{,}16$ Ω, $\underline{Z}_r = -j\,382{,}16$ Ω,
b) b) $Z_p = \dfrac{X_{C1}\cdot X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} = \dfrac{63{,}69\cdot 318{,}47}{63{,}69 + 318{,}47} = 53{,}08[\Omega]$; $\underline{Z}_p = -j53{,}08$ Ω,
$\dfrac{Z_r}{Z_p} = \dfrac{382{,}47}{53{,}08} = 7{,}2$

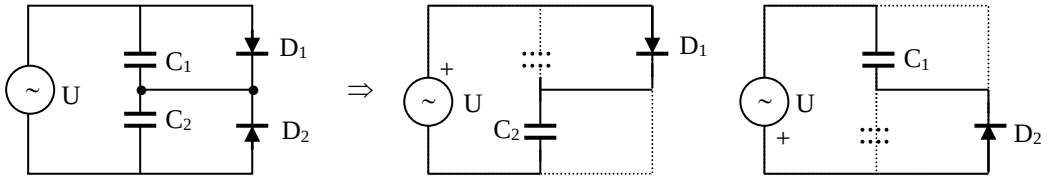
3.3.9. ----- ωL = 1/ωC = 100 Ω ⇒ (f = 50 Hz): L = 0,318 H, C = 31,8 μF. (U nema uticaja na R, X_L i X_C);
Čitaocu nije problem da nađe rešenja za preostale tačke.

3.3.10. ----- $\underline{Z}_R = 100\ \Omega = 100\ e^{j\,0°}\ \Omega$, $\underline{Z}_L = j\,100\ \Omega = 100\ e^{j\,90°}\ \Omega$, $\underline{Z}_C = -j\,100\ \Omega = 100\ e^{-j\,90°}\ \Omega$; Kako ovi otpori predstavljaju fizičke veličine koje ne zavise od napona i struje, sledi da će ove vrednosti biti uvek ovakve. Napon i struja su u finkciji sa R, X_L i X_C a samim tim i njihov kompleksni izraz će zavisiti od $\underline{Z}_R$, $\underline{Z}_L$ i $\underline{Z}_C$.

3.3.11. ----- $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{U/X_1}{U/X_2} = \dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{1/2\pi f_2}{1/2\pi f_1} = \dfrac{f_1}{f_2} = 10$;

3.3.12. ----- $\dfrac{I_1}{I} = \dfrac{X}{X_1} = \dfrac{1/\omega C}{1/\omega C_1} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{\varepsilon\, S/d_1}{\varepsilon\, S/d_1} = \dfrac{d}{d_1} = 2 \quad \Rightarrow d_1 = 1$ mm;

3.3.13. -----



a) b)

Kada je naizmenični izvor sa + polom prema gore, kao na slici a), tada je dioda D_1 propusna a D_2 nepropusna. U ovom slučaju se kolo zatvara preko kondenzatora C_2 (C_1 čini prekid kola, jer je otpor diode D_1 jednak nuli). Kada se na izvoru promene polovi; kao na slici b), tada je dioda D_2 propusna (kratka veza), dok je D_1 nepropusna. Kolo se u ovom slučaju zatvara preko kondenzatora C_1(nepropusna dioda ima beskonačan otpor).
Iz svega navedenog sledi da je u ovom kolu ukupni kapacitet jednak pojedinačnom, jer je: $C = C_1 = C_2$.
a) $C_e = C$, b) $Z_e = 1 / \omega C$.

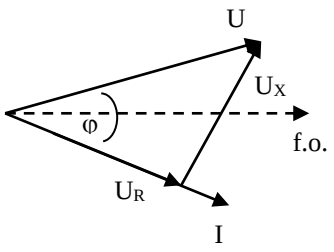
4.1.1. ----- i = 112 sin (ωt – 17°13′);

4.1.2. ----- $\underline{Z}$ = 10 – j 10 Ω, $\underline{U}_R$ = 150 + j 80 V, $\underline{U}_L$ = – 80 + j 150 V, $\underline{U}_C$ = 160 – j 300 V, $\underline{U}$ = 230 – j 70 V;

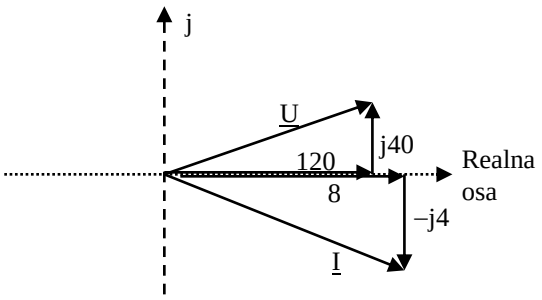
4.1.3. ----- tg φ = X/R ⇒ X = X_L – X_C = R·tg π/4 = 10 ⇒ X_L = 10 + X_C = 16 [Ω].

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120 + j40}{10 + j10} = (8 - j4)[\mathrm{A}].$$

Fazorski dijagram



Kompleksni dijagram



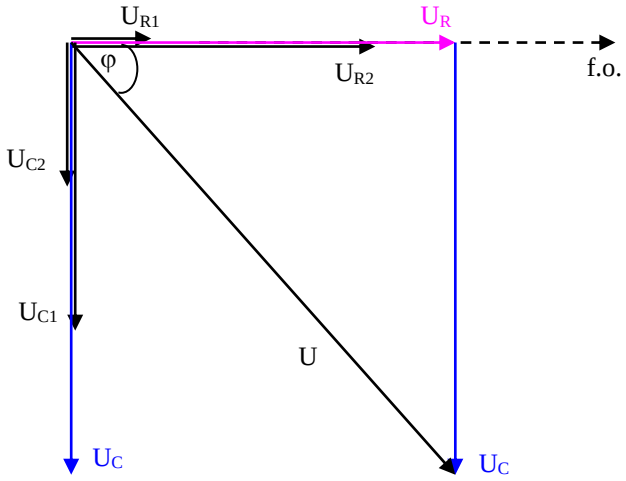
4.1.4. ----- tg φ = X/R ⇒ X = R·tg φ = $20\sqrt{3}\cdot \mathrm{tg}60^{\circ} = 20\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 60[\Omega]$

X = X_L – X_C = 3X_C – X_C = 60 ⇒ X_C = 30 Ω; X_L = 90 Ω; X_L = ω·L ⇒ ω = X_L/L = 1 000 rad/s, C = 33,3 μF;

4.1.5. ----- $\underline{Z}$ = j 2X_C, Z = U/I = 50 Ω, U_L = 150 V, U_C = 50 V. Struja kasni za naponom za π/2.

4.1.6. ----- $\underline{Z} = (R_1 + R_2) - j\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\right) = (10 + 50) - j\left(\frac{10^6}{1875\cdot 20} + \frac{10^6}{1875\cdot 10}\right) = 60 - j(26{,}67 + 53{,}33) \Rightarrow$

$\underline{Z}$ = 60 – j 80 Ω ⇒ Z = 100 Ω, I = U/I = 2 A, U_{R1} = I·R_1 = 20 V, U_{R2} = 100 V, U_{C1} = 106,6 V, U_{C2} = 53,3 V.

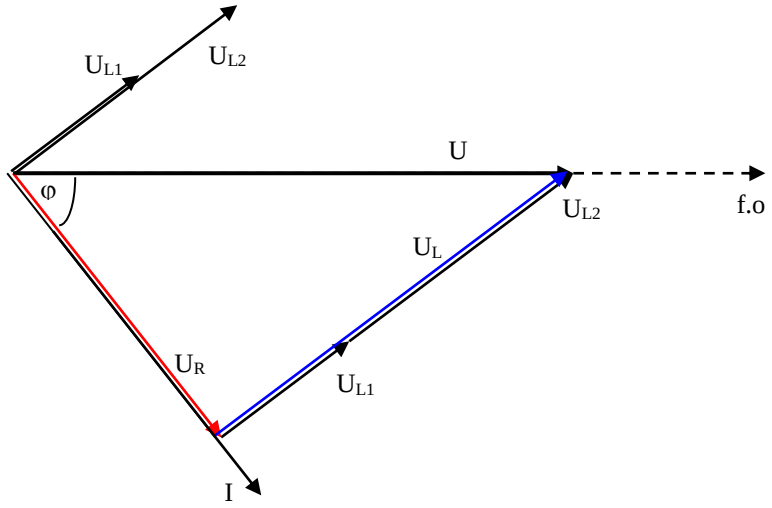


4.1.7. ----- i = 40 sin (ωt + 113°); **4.1.8.** ----- $\underline{Z}$ = 20√3 – j 20 Ω, Z = 40 Ω, I = 5,5 A, φ = – π/6;

4.1.9. ----- I = 3,33 A, L_1 = 0,4 H, L_2 = 0,2 H;

4.1.10. ----- $\underline{Z}_1$ = 10 + j 30 Ω, $\underline{Z}_2$ = 20 + j 10 Ω, $\underline{Z}$ = 30 + j 40 Ω, I = 4 A, L_1 = 95,4 mH, L_2 = 31,8 mH;

4.1.11. ----- $\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j (X_{L1} + X_{L2}) = 24 + j32 \Rightarrow Z = 40\ \Omega$; $I = U/Z = 5$ A;
$\varphi = \text{arc tg } X/R = \text{arc tg } 32/24 = 53° \Rightarrow i = 5\sqrt{2} \sin (\omega t - 53°)$;



4.1.12. ----- $u = 100\sqrt{2} \sin (100t + 36°52')$, $L = 0{,}3$ H;

4.1.13. ----- $Z = 112{,}5\ \Omega$, $I = 1{,}96$ A, $Z' = 48{,}1\ \Omega$, struja se poveća na $I' = 4{,}57$ A;

4.1.14. ----- $X = X_L - X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{77{,}4^2 - 50^2} = 59{,}1[\Omega]$ f = 115 Hz;

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 59{,}1 / \cdot \omega C \Rightarrow \omega^2 L - \frac{1}{C} = 59{,}1 \cdot \omega \Rightarrow \omega^2 L - 59{,}1 \cdot \omega - \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow 2\omega^2 - 59{,}1\omega - 10^6 = 0$$

$$\omega_{1/2} = \frac{59{,}1 \pm \sqrt{59{,}1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10^6)}}{2 \cdot 2} = \frac{59{,}1 \pm \sqrt{3492{,}81 + 8000000}}{4} = \frac{59{,}1 \pm 2829}{4 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow$$

Kako je frekvencija $f \geq 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega = \frac{59{,}1 + 2829}{4} = 722 \left[\text{rad}/\text{s} \right]$

$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \omega / 2\pi = 115$ [Hz].

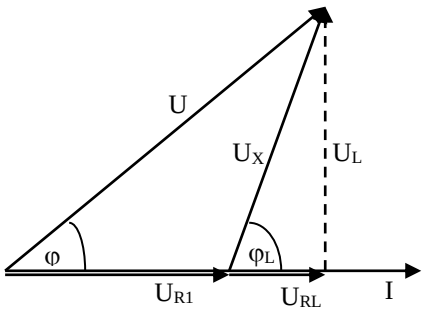
4.1.15. ----- $I = 32{,}25$ A, $\theta = -60°$, $\varphi = 26°15'$;

4.1.16. ----- $\underline{Z} = (R_1 + R_2 + R_3) + j (X_{L1} + X_{L2} - X_C) = (12 + j16)\ [\Omega] \Rightarrow \underline{Z} = 20 \cdot e^{j\,53°7'}$; $Z = 20\ [\Omega]$.

4.1.17. ----- $i = 0{,}977 \sin (314t + 77{,}6°)$ A; **4.1.18.** ----- $i = 22 \sin (314t + 5{,}7°)$ mA;

4.1.19. ----- $U = 200$ V, $R = 3\ \Omega$, $X_L = 4\ \Omega$;

4.1.20. -----



Iz kosinusne teoreme (prema fazorskom dijagramu), sledi:

$U^2 = U_{R1}^2 + U_X^2 - 2U_{R1}U_X \cos (180 - \varphi_L) \Rightarrow$

$U^2 = U_{R1}^2 + U_X^2 + 2U_{R1}U_X \cos \varphi_L \Rightarrow$

$$\cos \varphi_L = \frac{U^2 - U_{R1}^2 - U_X^2}{2U_{R1}U_X} = \frac{168^2 - 56^2 - 148^2}{2 \cdot 56 \cdot 148} = 0{,}192 \Rightarrow$$

$\varphi_L = 78{,}9°$

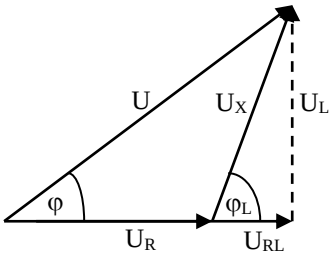
$U_L = U_X \cdot \sin \varphi_L = 148 \cdot \sin 78{,}9 = 145{,}24$ [V]

$$U_{RE} = U_{R1} + U_{RL} = \sqrt{U^2 - U_L^2} = \sqrt{168^2 - 145{,}24^2} = 84{,}42[\text{V}]$$

$$\cos \varphi = U_{RE}/U = 0{,}503 \Rightarrow \varphi = 59{,}83°$$

$I = U_{R1}/R_1 = 56/4 = 14$ [A]; $U_{RL} = U_{RE} - U_{R1} = 28{,}42$ [V]; $R_L = U_{RL}/I = 28{,}42/14 = 2{,}03\ [\Omega]$;
$X_L = U_L/I = 145{,}24/14 = 10{,}37\ [\Omega]$; $L = X_L/2\pi f = 10{,}37/314 = 0{,}03304$ [H] = 33,04 [mH].

4.1.21. -----



Iz kosinusne teoreme, $U_X^2 = U^2 + U_R^2 - 2UU_R \cos\varphi$, odredimo $\cos\varphi$, koji iznosi:

$$\cos\varphi = \frac{U^2 + U_R^{\,2} - U_X^{\,2}}{2UU_R} = \frac{U^2 + (IR)^2 - (IZ_L)^2}{2UIR} = \frac{100^2 + 60^2 - 72^2}{2\cdot 100\cdot 60}$$

$\cos\varphi = 0{,}701 \Rightarrow \varphi = 45{,}47^o$

$U_X = I\cdot Z_L = 72$ [V]; $U_L = U\cdot\sin\varphi = 71{,}28$ [V] $\Rightarrow$

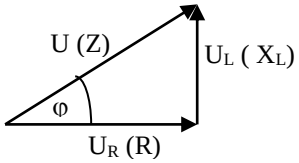
$X_L = U_L/I = 71{,}28/6 = 11{,}88$ [Ω]; $L = X_L/\omega = 0{,}0378$ [H] = 37,8 [mH]

$U_R + U_{RL} = U\cdot\cos\varphi = 70{,}1$ [V] $\Rightarrow$ $U_{RL} = 70{,}1 - IR = 10{,}1$ [V]

$R_L = U_{RL}/I = 1{,}68$ [Ω].

Analitički izraz za struju je: $i = 6\sqrt{2}\ \sin(314t - 45{,}47°)$ A;

4.1.22. -----



Iz trougla napona (otpora), sledi:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{U_R}{U} = \frac{160}{250} = 0{,}64 \Rightarrow Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{10}{0{,}64} = 15{,}625$$

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{15{,}625^2 - 10^2} = 12{,}006[\Omega]$$

4.1.23. ----- R = 3,025 Ω, X_L = 4,59 Ω; **4.1.24.** ----- R = 200 Ω, C = 328 pF;

4.1.25. ----- $tg\varphi_1 = \dfrac{X_{C!}}{R} = \dfrac{1/\omega C_1}{R} = \dfrac{1}{R\cdot\omega C_1}$;

$$tg\varphi_2 = \frac{1/C_{2e}}{R} = \frac{1}{R\cdot\omega C_{2e}} = \frac{1}{\omega R\cdot\dfrac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}} = \frac{C_1+C_2}{\omega RC_1C_2} \Rightarrow$$

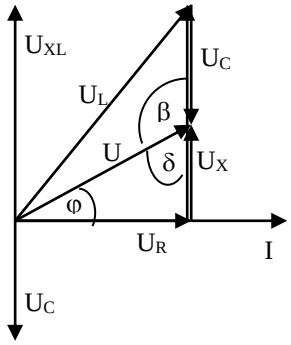
$$tg\varphi_2 = (C_1+C_2)\cdot\frac{1}{C_2}\cdot\frac{1}{\omega RC_1} = \frac{C_1+C_2}{C_2}tg\varphi_1 \Rightarrow C_1+C_2 = C_2\frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_1} \Rightarrow C_1 = C_2\left(\frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_1} - 1\right) = 2\left(\frac{1{,}33}{0{,}75} - 1\right) = 1{,}57[\mu F]$$

φ_1 = arc coc (0,8) = 36,87°; φ_2 = arc cos (0,6) = 53,13°;

Kada C_1 uvrstimo u prvu jednačinu dobije se otpornost R, koja iznosi:

$$R = \frac{1}{\omega C_1 tg\varphi_1} = \frac{1}{2\pi\dfrac{10000}{2\pi}\cdot 1{,}57\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}75} = \frac{10^6}{1{,}1775\cdot 10^4} = 84{,}93[\Omega].$$

4.1.26. -----



Da bi se zadatak mogao rešiti predhodno treba nacrtati fazorski dijagram.

Iz kosinusne teoreme, $U_L^2 = U^2 + U_C^2 - 2UU_C\cos\beta$, sledi:

$$\cos\beta = \frac{U^2 + U_C^{\,2} - U_L^{\,2}}{2UU_C} = \frac{200^2 + 320^2 - 440^2}{2\cdot 200\cdot 320} = -0{,}4 \Rightarrow \beta = 113{,}58^o$$

$\delta = 180° - \beta = 66{,}42°$;

$\varphi + \delta = 90° \Rightarrow \varphi = 90° - \delta = 23{,}58°$.

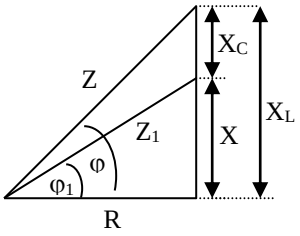
$U_R = U\cdot\cos\varphi = 200\cdot\cos 23{,}58° = 183{,}3$ [V];

$U_X = U\cdot\sin\varphi = 200\cdot\sin 23{,}58° = 80$ [V];

$U_X = U_{XL} + U_C \Rightarrow U_{XL} = U_X + U_C = 400$ [V].

Čitalac lako može proveriti rešenje fazorskim dijagramom, koristeći odgovarajuću razmeru (npr. 1 cm = 50 V).

4.1.27. -----



Iz trougla otpora, prema slici, sledi:
R = Z cos φ = 40·0,6 = 24 [Ω].
Z_1 = R/cos $φ_1$ = 24/0,8 = 30 [Ω].

$$X = X_L - X_C = \sqrt{Z_1^{\,2} - R^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18[\Omega]$$

X_L = Z sin φ = 40·0,8 = 32 [Ω].
$X_C = X_L - X$ = 14 [Ω].

4.1.28. ----- $u_L = 7{,}98\sqrt{2}\ \sin(2\,000t + 63{,}3°)$ V;

4.1.29. -----

$$Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}[\Omega]$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = 10[\Omega] \Rightarrow$$

Za $\varphi = \pi/4 \Rightarrow X = X_L - X_{C1} = 10 \Rightarrow X_{C1} = X_L - 10 = 10$ [Ω];
a za $\varphi = -\pi/4 \Rightarrow X = X_L - X_{C2} = -10 \Rightarrow X_{C2} = X_L + 10 = 30$ [Ω].

4.1.30. ----- Ako prevladava induktivno opterećenje ($X_L > X_C$) sledi

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \sqrt{Z^2 - R^2} = 30[\Omega]$$

$$10\omega - \frac{1}{\omega \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 30 \Rightarrow 10\omega - \frac{10^5}{\omega} = 30 \,/\cdot\omega \Rightarrow 10\omega^2 - 30\omega - 10^5 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{1/2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 10 \cdot \left(-10^5\right)}}{2 \cdot 10} = \frac{30 \pm 2000}{20}$$

Kako je frekvencija $f \geq 0 \Rightarrow \omega = 2030/20 = 101{,}5$ [rad/s] $\Rightarrow f = \omega/2\pi = 16{,}16$ [Hz].

Ako prevladava kapacitivno opterećenje, tada je $X = X_L - X_C = -10$ [Ω], pa sledi:

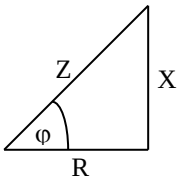
$$10\omega - \frac{10^5}{\omega} = -30 \Rightarrow 10\omega^2 + 30\omega - 10^5 = 0 \Rightarrow \omega_{1/2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 10 \cdot \left(-10^5\right)}}{2 \cdot 10} = \frac{-30 \pm 2000}{20} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{1970}{20}\ 98{,}5\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 15{,}68[\text{Hz}].$$

4.1.31. ----- $u = 15\sqrt{2}\ \sin(1\,000t + 45°)$; **4.1.32.** ----- R = 35,35 Ω, L = 70,7 mH;

4.1.33. ----- u = 111,8 sin (5 000t + 26,6°) V; **4.1.34.** ----- $\underline{U} = 231{,}4 \cdot e^{j\,14°20'}$ V;

4.1.35. -----



$\varphi = \psi_u - \psi_i = 17° - (-28) = 45°$.

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{\frac{25}{\sqrt{2}}} = 4[\Omega];$$

$$R = X_C = X = Z\cos 45^o = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}[\Omega] \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \cdot 2\sqrt{2}} = 1129{,}3[\mu\text{F}].$$

$$X_L - X_C = 2\sqrt{2}[\Omega] \Rightarrow X_L = 2\sqrt{2} + X_C = 4\sqrt{2}[\Omega] \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4\sqrt{2}}{314} = 17{,}96[\text{mH}].$$

4.1.36. ----- $U = 30\sqrt{2}$ V; **4.1.37.** ----- $U_L = 60$ V; **4.1.38.** ----- $Z_1 = 4\sqrt{10}$ Ω;

4.1.39. -----

$$R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{120}{20} = 6[\Omega] \rightarrow Z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{220}{20\sqrt{2}} = 5{,}5\sqrt{2}[\Omega] \Rightarrow$$

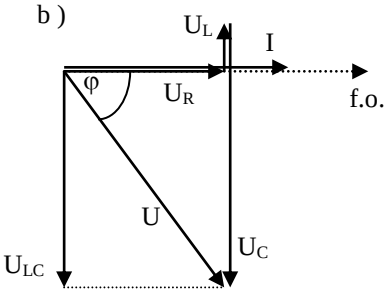
$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 4{,}95[\Omega] \rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4{,}95}{314} = 15{,}76[\text{mH}].$$

4.1.40. -----

a) $Z = R/\cos\varphi = 10$ [kΩ]; $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = 8[\text{k}\Omega]$;

$|X| = |X_L - X_C| = 8$ kΩ. Kako je $X_L = 2$ kΩ, a apsolutna vrednost ukupne reaktanse iznosi 8 kΩ, sledi da je $X_C > X_L \Rightarrow X = X_L - X_C = -8 \Rightarrow X_C = X_L + 8 = 10$ [kΩ].

b)



$\underline{U}_{LC} = 8\cdot e^{-j\pi/2}$ [V]; $I = U_{LC}/X = 8/8\cdot 10^3 = 10^{-3}$ [A] = 1 [mA];
U kompleksnom obliku struja je jednaka:
$\underline{I} = 1\cdot e^{j0}$ [mA], jer prevladava kapacitivno opterećenje.
Padovi napona na R L i C iznose:
$U_R = I\cdot R = 6$ V; $U_L = I\cdot X_L = 2$ V; $U_C = I\cdot X_C = 10$ V.
Iz faktora snage $\cos\varphi = 0{,}6 \Rightarrow \varphi = -53{,}13°$ ($X_L < X_C$).
Ukupni napon iznosi:
$U = I\cdot Z = 10$ V, a u kompleksnom obliku: $\underline{U} = 10\cdot e^{-j53{,}13°}$ [V].

c) $u = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 53{,}13°)$ [V] ;

4.1.41. ----- $\varphi = \psi_u - \psi_i = 55° - 10° = 45° \Rightarrow \text{tg}\,\varphi = X/R = 1$

$Z = U/I = U_m/I_m = 28{,}28 = 20\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow R = X = 20[\Omega] \Rightarrow$

Iz uslova $X = \omega L - 1/\omega C = 20 \Rightarrow 3000\cdot 0{,}01 = 20 + 1/3000\cdot C$

$10 = 1/3000\cdot C \Rightarrow C = 1/3000\cdot 10 = 33{,}33[\mu\text{F}]$.

4.1.42. ----- $E_m = 255{,}9$ V, $E = 182{,}12$ V; **4.1.43.** ----- $L = 55$ mH;

4.1.44. ----- $Z_2 = 2\,Z_1$

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 2\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \Rightarrow R^2 + \omega^2 L^2 = 4\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) \Rightarrow$$

$$R^2 + 314^2\cdot 0{,}01 = 4R^2 + \frac{1}{314^2\cdot\left(500\cdot 10^{-6}\right)^2} \Rightarrow 985{,}96 - 40{,}57 = 3R^2 \Rightarrow R = 17{,}75[\Omega].$$

4.1.45. ----- a) $U_C = U_{Cm}/\sqrt{2} = 851{,}1[\text{V}]$ $I = \dfrac{U_C}{\dfrac{1}{\omega C}} = U_C\cdot\omega C = 851{,}1\cdot 500\cdot 50\cdot 10^{-6} = 21{,}28[\text{A}]$;

b) $Z = \dfrac{E}{I} = \dfrac{100}{21{,}28} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow \omega L - \dfrac{1}{\omega C} = \sqrt{\dfrac{100^2}{21{,}28^2} - R^2} = \sqrt{4{,}7^2 - 3^2} = 3{,}62$

$500L_1 = 43{,}62 \Rightarrow L_1 = 0{,}08724$ [H] , što je nemoguće jer je $L_{max} = 0{,}08$ [H]. Zbog toga se za reaktansu uzima negativno rešenje ($X_C > X_L$), pa sledi:

$500L_2 - 40 = -3{,}62 \Rightarrow 500\,L_2 = 36{,}38 \Rightarrow L_2 = 0{,}07276$ [H] = 72,76 [mH].

4.1.46. ----- $I = 0{,}7$ A (samo kalem), $I' = 45$ A (sa kondenzatorom); **4.1.47.** ----- $U_{mc} = 785$ mV;

4.1.48. ----- $Z = \omega L - 1/\omega C$; $Z_o = \omega_o L - 1/\omega_o C$; $\omega = 2\omega_o$. Da bi napon bio u fazi sa strujom ($\varphi_o = 0$) mora doći do pojave rezonanse, tj: $\omega_o L = 1/\omega_o C = 0 \Rightarrow \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{10\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-6}}} = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4\left[\text{rad}/\text{s}\right]$.

$\omega = 2\cdot 10^4$ [rad/s] $\Rightarrow Z = 2\cdot 10^4\cdot 10\cdot 10^{-3} - 1/2\cdot 10^4\cdot 10^{-6} = 200 - 50 = 150$ [Ω].

4.1.49. ----- $f_1 = 1{,}3$ KHz, $f_2 = 260$ Hz; **4.1.50.** ----- $\varphi = \pi/3$ rad; **4.1.51.** ----- $R = 14{,}14\ \Omega$;

4.1.52. ----- $U_R = 3U_L \Rightarrow IR = 3I\omega L \Rightarrow R = 3\omega L \Rightarrow \omega L = R/3 = 500/3 \Rightarrow \omega = 500/3\cdot L = 333{,}33$ [rad/s]
$f = \omega/2\pi = 53{,}08$ [Hz], $tg\varphi = \omega L/R = 0{,}33 \Rightarrow \varphi = 18{,}43° = 0{,}319$ [rad].

$$U_m = I_m\cdot Z = 0{,}5\cdot\sqrt{500^2+\left(\frac{500}{3}\right)^2} = 263{,}52\ ;$$

$u = 263{,}52 \sin(333{,}33\cdot 0{,}6123 + 0{,}319) = 263{,}52\cdot(-0{,}214) = -56{,}34$ [V].

4.1.53. ----- $Z_1 = Z_3 = U/I = 10\ [\Omega]$; $Z_2 = U/I_2 = 100/20 = 5\ [\Omega]$

$$\sqrt{R^2+\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{R^2+\left(\omega_3 L-\frac{1}{\omega_3 C}\right)} = 10 \Rightarrow \omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C} = \omega_3 L-\frac{1}{\omega_3 C}$$

Ovaj obrazac važi samo u apsolutnom iznosu (jedna reaktansa je pozitivna a druga negativna).

Kako je porastom frekvencije došlo do porasta induktivnog otpora a smenjenja kapacitivnog, sledi da je kod impedanse Z_1 pravladavao kapacitivni otpor, a kod impedanse Z_3 je prevladavao induktivni otpor ($\omega_3 > \omega_1$). To u kompleksnom obliku iznosi: $\underline{Z}_1 = R - jX_1$, odnosno $\underline{Z}_3 = R + jX_3$. Iz navedenog razloga predhodni izraz je jednak:

$$-\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right) = \omega_3 L-\frac{1}{\omega_3 C} \Rightarrow \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_3}\right) = L(\omega_3+\omega_1) \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{\omega_3+\omega_1}{\omega_1\omega_3} = L(\omega_1+\omega_3) \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_1\omega_3 C} \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 2\cdot\pi\cdot 3{,}14\cdot 100\,C} = \frac{1}{197192\ C} \Rightarrow L\cdot C = 5{,}07\cdot 10^{-6}\ .$$

Kako je struja maksimalna pri rezonansi, na frekvenciji f_2 sledi: $R = Z_2 = 5\ [\Omega]$.

$$\omega_2 = \frac{!}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}07\cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2{,}25\cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{2{,}25} = 444{,}44 \Rightarrow f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 70{,}77[\text{Hz}].$$

$$X = \sqrt{Z_1^2 - R^2} = \sqrt{10^2-5^2} = 8{,}66[\Omega].$$

$$2\pi\cdot 50\cdot L-\frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot C} = -8{,}66 \Rightarrow 314\,L = \frac{1}{314\,C}-8{,}66 \Rightarrow L = \frac{1}{314^2\,C}-0{,}0276\,;$$

$$2\pi\cdot 100\cdot L-\frac{1}{2\pi\cdot 100\cdot C} = 8{,}66 \Rightarrow 200\,\pi\cdot\left(\frac{1}{314^2\,C}-0{,}0276\right)-\frac{1}{200\,\pi\cdot C} = 8{,}66 \Rightarrow \frac{0{,}0064}{C}-17{,}333-\frac{0{,}00159}{C} = 8{,}66 \Rightarrow$$

$$0{,}0054-17{,}333\,C-0{,}00159 = 8{,}66\,C \Rightarrow 0{,}00478 = 25{,}993\,C \Rightarrow C = 183{,}9\cdot 10^{-6}[\text{F}] = 183{,}9[\mu\text{F}];$$

$$L = \frac{1}{314^2\cdot 183{,}9\cdot 10^{-6}}-0{,}0276 = 0{,}0552-0{,}0276 = 0{,}0276[\text{H}] = 27{,}6[\text{mH}].$$

4.1.54. -----

$$Z = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{200^2+\frac{1}{\left(2\cdot\pi\cdot 60\cdot 10\cdot 10^{-6}\right)^2}} = 332{,}32[\Omega];\quad I = \frac{U}{Z} = 0{,}301[\text{A}];$$

$U' = 0{,}9\cdot U = 90$ [V]; $f' = 0{,}95\cdot f = 57$ [Hz];

$$Z' = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2\pi f'\cdot C}\right)^2} = \sqrt{200^2+\left(\frac{}{2\pi\cdot 57\cdot 10\cdot 10^{-6}}\right)^2} = \sqrt{200^2+279{,}36^2} = 343{,}57[\Omega]\ ;$$

$$I' = \frac{U'}{Z'} = \frac{90}{343{,}57} = 0{,}262[\text{A}];$$

$$\frac{I'}{I} = \frac{0{,}262}{0{,}301} = 0{,}87 \Rightarrow I' = 0{,}87\cdot I$$

Dakle, $I' = 0{,}87\cdot I$ (87% od struje I). To znači da je struja opala za 13 %.

4.1.55. ----- Pre uključenja prekidača P: $Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2}$, a posle uključenja: $Z_2 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

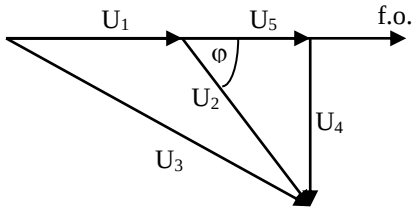
Kako je $I_1 = I_2 \Rightarrow |Z_1| = |Z_2| \Rightarrow |R^2 + X_L^2| = |R^2 + (X_L - X_C)^2| \Rightarrow X_L = -(X_L - X_C) \Rightarrow X_C = 2X_L$;

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 330 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 48{,}25[\Omega];$$

$$X_L = \frac{X_C}{2} = 24{,}13[\Omega] \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{24{,}13}{2 \cdot \pi \cdot 330} = 0{,}01164\,[H] = 11{,}64[mH];$$

$$Z_1 = \frac{U}{I} = \frac{120}{4} = 30[\Omega] \Rightarrow R = \sqrt{Z_1^2 - X_L^2} = \sqrt{30^2 - 24{,}13^2} = 17{,}83[\Omega].$$

4.1.56. ----- a)



b)

$\underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$; $\underline{U}_2 = \underline{U}_5 + \underline{U}_4$;

Iz kosinusne teoreme:

$U_3^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2 \cos(180 - \varphi) \Rightarrow$

$U_3^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos\varphi \Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{U_3^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} = 0{,}575 \Rightarrow \varphi = -54{,}9^o .$$

4.1.57. ----- a) $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$; Ako napon U_2 postavimo u faznu osu, sledi: $\underline{U}_2 = U_2 = 4{,}5$ V;

$\underline{U}_1 = 9 \cdot e^{-j90^\circ} = 9 \cdot [\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ) = -j9$ V; $\underline{U} = (4{,}5 - j9)$ V $\Rightarrow$ $U = \sqrt{4{,}5^2 + 9^2} \approx 10[V]$

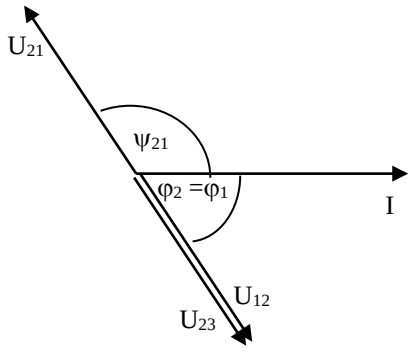
b)

$$U_{AB} = I \cdot \sqrt{R_2^2 + X_C^2};$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{R_1 - jX_C} = (72 - j54)[mA] \Rightarrow I = 90[mA]$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}} = (40 + j30)[\Omega] \Rightarrow R_2 = 40[\Omega] \Rightarrow U_{AB} = 90 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{40^2 + 80^2} \approx 8[V]$$

4.1.58. ----- $\underline{U}_{21} = -\underline{U}_{12}$



Iz fazorskog dijagrama se vidi da su naponi U_{12} i U_{23} međusobno u fazi. Kako su to naponi koji deluju na impedansama Z_1 i Z_2, koje su istih vrednosti, sledi da su i ovi naponi istih inteziteta. Oba napona fazno su pomerena unazad u odnosu na struj I (kasne) za ugao $\pi/3$. pa se impedanse mogu napisati kompleksno u obliku:

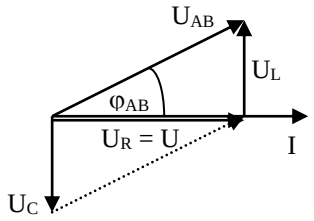
$Z_1 = Z_2 = 100 \cdot e^{-j60^\circ} = 100 \cdot [\cos(-60) + j\sin(-60)] \Rightarrow$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 100\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (50 - j50\sqrt{3})[\Omega] \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 2\underline{Z}_1 = (100 - j100\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$Z_e = Z_{13} = \sqrt{100^2 + (100\sqrt{3})^2} = \sqrt{10000 + 30000} = 200[\Omega].$$

4.1.59. ----- Da bi zadatak lakše rešili prvo nacrtamo fazorski dijagram (pod c).
Iz dijagrama se reše traženi podaci pod tačkama a i b



$U_R = U_{AB}\cdot\cos\varphi_{AB} = 80\cdot\cos 30° = 40\sqrt{3}$ V;
$U_L = U_{AB}\cdot\sin\varphi_{AB} = 80\cdot\sin 30° = 40$ V.
Kako je $U_L = U_C$, dolazi do rezonanse, tj ova dva pada napona se poništavaju, pa je ukupni napon U jednak naponu U_R, i on je u fazi sa strujom I.
Na osnovu fazorskog dijagrama, analitički izrazi za tražene napone iznose:
$u = u_R = 40\sqrt{6}\sin\omega t$ [V]; $u_L = 40\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^o)$ [V];
$u_C = 40\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^o)$[V].

4.1.60. ----- $R_1 = 11{,}7\ \Omega$;

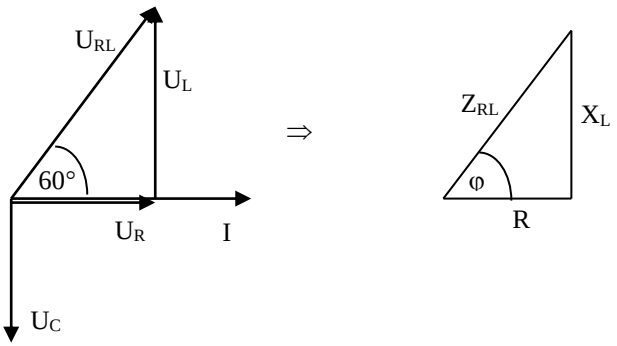
4.1.61. ----- $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi\cdot 800 = 1600\pi$ [rad/s]; $\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi\cdot 400 = 800\pi$ [rad/s]
$Z_1 = U/I_1 = 200$ [Ω]; $Z_2 = U/I_2 = 250$ [Ω]
$Z_1^2 = R^2 + X_{C1}^2 \Rightarrow R^2 + (1/\omega_1 C)^2 = 40000$ ..... (1)
$Z_2^2 = R^2 + X_{C2}^2 \Rightarrow R^2 + (1/\omega_2 C)^2 = 62500$ .....(2

$$R^2 + \frac{1}{25266187{,}27\,C^2} = 40000$$

$$R^2 + \frac{1}{6316546{,}82\,C^2} = 62500$$

Rešenjem sistema dveju jednačina sa dve nepoznate dobiju se rešenja: C = 2,297 [μF] i R = 180 [Ω].

4.1.62. -----
a)

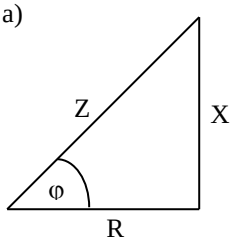


$I = U_C/X_C = 10/1000 = 10^{-2}$ [A] = 10 [mA]; $Z_{RL} = U_{RL}/I = 20/0{,}01 = 2$ [kΩ];
Iz trougla otpora sledi: $R = Z_{RL}\cdot\cos 60° = 1$ [kΩ]; $X_L = Z_{RL}\cdot\sin 60° \sqrt{3}[\text{k}\Omega]$;
$L = X_L/2\pi f = 1{,}73/866{,}64 = 2$ [mH]; $C = 1/\omega X_C = 1{,}15$ [nF].

b) $\underline{U} = \underline{U}_{RL} + \underline{U}_C = 20\,(\cos 60° + j\sin 60°) + 10\,[\cos(-90°) + j\sin(-90°)] = 20(0{,}5 + j0{,}866) - j10 \Rightarrow$
$\underline{U} = 10 + j\,7{,}3 \Rightarrow U = \sqrt{10^2 + 7{,}3^2} = 12{,}4[\text{V}]$

4.1.63. -----

a)



$\varphi = \pi/4$

$X = R = 100\ \Omega$; $X = X_L - X_C$; $X_L = \omega L = 1000\ [\Omega]$

$X_{C1} = 1/\omega C_1 = 1/10^5 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6} = 100\ [\Omega]$

$X_C = X_L - X = 900\ [\Omega]$;

$X_C = X_{C1} + X_{C2} \Rightarrow X_{C2} = X_C - X_{C1} = 900 - 100 = 800\ [\Omega]$.

$X_{C2} = 1/\omega C_2 \Rightarrow C_2 = 1/\omega X_{C2} = 12{,}5 \cdot 10^{-9}\ F = 12{,}5\ [nF]$.

b) Za $\varphi = -\pi/4$, trougao je isti kao pod a) ali je oboren prema dole ($X_C > X_L$).
U ovom slučaju je: $X = -R = -100\ [\Omega] \Rightarrow X_L - X_C = -100 \Rightarrow X_C = X_L + 100 = 1100\ [\Omega]$.
$X_C = X_{C1} + X_{C2} \Rightarrow X_{C2} = X_C - X_{C1} = 1100 - 100 = 1000\ [\Omega] \Rightarrow$
$C_2 = 1/\omega X_{C2} = 1/10^5 \cdot 10^3 = 10^{-8} = 10 \cdot 10^{-9}\ [F] = 10\ [nF]$.

c) struja je maksimalna pri pojavi rezonanse ($\varphi = 0$). Ovo nastaje pri uslovu: $X_L = X_C = 1000\ [\Omega] \Rightarrow$
$X_{C1} + X_{C2} = 1000 \Rightarrow X_{C2} = 1000 - 100 = 900\ [\Omega]$
$C_2 = 1/\omega \cdot X_{C2} = 1/10^5 \cdot 900 = 11{,}11 \cdot 10^{-9}\ [F] = 11{,}11\ [nF]$.

4.1.64. ----- a) $\varphi = 60°$ (RL prij.), b) $Z = 4\ \Omega$, $R = 2\ \Omega$, $X_L = 3{,}46\ \Omega$,

4.1.65. ----- a) $\underline{Z} = 30{,}6 \cdot e^{-j\,60°40'}\ \Omega$, $\underline{Y} = 32{,}7\ e^{j\,60°40'}$ mS, b) faz dijagram crtati u razmeri: 1 cm = 10 V.
c) $u_R = 30\sqrt{2} \sin (500t + \pi/2)$ V, $u_L = 80\sqrt{2} \sin (500t + \pi)$ V, $u_C = 133{,}4\sqrt{2} \sin 500t$ V,
$u = 61{,}2\sqrt{2} \sin (500t + 29°20')$ V ;

4.1.66. ----- $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH;

4.67. ----- $Z^2 = \left(\frac{U}{I}\right)^2 = 2116 \qquad Z_1{}^2 = \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 = 3306{,}25$

$Z^2 = R^2 + (\omega L)^2 = \Rightarrow R^2 + 314^2 L^2 = 2116$ .....(2) ;

$\underline{Z_1{}^2 = (R + R_1)^2 + (\omega L)^2 \Rightarrow (20 + R)^2 + 314^2 L^2 = 3306{,}25 \ldots (1)}$

$-R^2 \qquad - 314^2 L^2 = -2116$ .....(1)

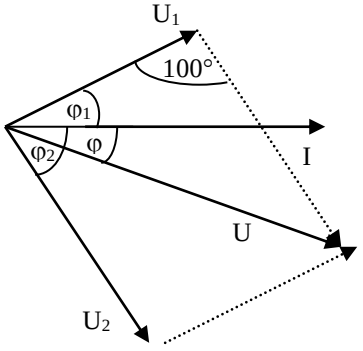
$\underline{R^2 + 40\,R + 400 + 314^2 L^2 = 3306{,}25 \ldots (2)}$

$40R + 400 = 1190{,}25 \Rightarrow R = 19{,}76\ \Omega$; $\omega L = \sqrt{2116 - 19{,}76^2} = 41{,}54 \Rightarrow L = 132{,}3$ mH;

4.1.68. ----- $R = U/I = 250\ [\Omega]$; $Z = \sqrt{R^2 + X_C{}^2} = \frac{U_1}{I} = 550[\Omega] \Rightarrow X_C = \sqrt{550^2 - 250^2} = 489{,}9[\Omega]$;

$$C = \frac{1}{2\pi f \cdot X_C} = \frac{1}{314 \cdot 489{,}9} = 6{,}5 \cdot 10^{-6}[F] = 6{,}5[\mu F].$$

4.1.69. -----



a)

Primenom kosinusne teoreme ukupni napon iznosi:

$U^2 = U_1{}^2 + U_2{}^2 - 2U_1U_2 \cos 100^o \Rightarrow$

$U^2 = 150^2 + 180^2 - 2 \cdot 150 \cdot 180 \cdot \cos 100^o = 22500 + 32400 + 9377$

$U = 213{,}36[V]$.

Ukupni napon se može rešiti i razlaganjem pojedinačnih napona na komponente (kompleksnom metodom)

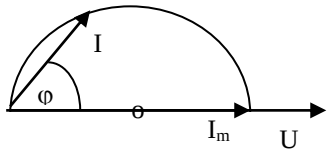
b)

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -20°$.

4.1.70. ----- $\underline{Z}_2 = (5 + j\,9{,}3)\ \Omega$;

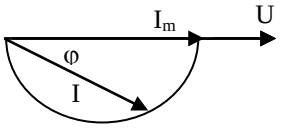
4.1.71. ---- Za C = 0 $\Rightarrow$ $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \infty \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = X_C = \infty \Rightarrow I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{100}{\infty} = 0[\mathrm{A}] \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.
U ovom slučaju struja je najmanja (jednaka nuli) jer je impedansa u kolu najveća (beskonačna). Kako je impedansa kapacitivna struja prednjači naponu za $\pi/2$ (teoretsko objašnjenje).

Sa povećenjem kapaciteta C, kapacitivni otpor se smanjuje, pa se smanjuje i impedansa kola, što dovodi do porasta struje I. Struja je maksimalna kada je impedansa najmanja, a to se događa kada je $C = \infty \Rightarrow X_C = 0$. U ovom slučaju impedansa je : $Z = R = 10\ \Omega$, a struja $I_m = U/Z = 10$ A, i ona je u fazi sa naponom ($\varphi = 0$). Na osnovu ovih podataka, kao i mnogih drugih proizvoljno uzetih može se konstruisati fazorski (kružni) dijagram. Spajanjem svih tih vrednosti (vrhova fazora struje I) nastaje jedan polukrug. Tačke koje se nalaze na polukrugu istovremeno određuju vrednost struje, kao i ugla φ koji odgovaraju za tu poziciju. Umesto spajanja beskonačnih tačaka za različite vrednosti kapaciteta dovoljno je odrediti maksimalnu vrednost struje i karakter opterećenja.



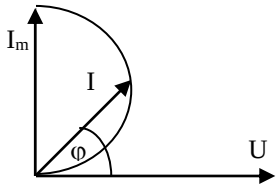
Na osnovu navedenih podataka jednostavno se nacrta kružni dijagram, kao na slici.
Koristeći predloženu razmeru dužina fazora U iznosi 5 cm, a poluprečnik polukruga je 2 cm.

4.1.72. ---

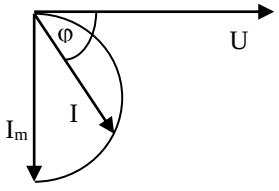


Porastom L od nule do beskonačnosti struja pada sa I_m ($X_L = \omega L$) na nulu. Ona fazno kasni u odnosu na napon U za ugao φ.
Za L = 0 $\Rightarrow$ Z = R, pa je struja u fazi sa naponom i ona je maksimalna ($I = I_m$).
Za $X_L = \infty \Rightarrow Z = X_L = \infty \Rightarrow I = 0$, pa je $\varphi = \pi/2$.
To dovodi do kružnog dijagrama prikazanog na slici.

4.1.73. ---- Porastom otpora od nule do beskonačnosti struja pada sa I_m na nulu. Kada je struja jednaka nuli ona je u fazi sa naponom (savršeno R kolo). Kada je struja najveća, tj iznosi I_m , (R = 0), tada ona prednjači naponu za $\pi/2$ ($Z = X_C$). Na osnovu navedenog nastaje sledeći kružni dijagram:



4.1.74. ----



Struja opada sa I_m na nulu i ona u početku fazno kasni u odnosu na napon za 90°. Padom struje (povećava se otpornost R) smanjuje se i fazni pomak φ (ka nuli).
Na osnovu ovog zaključka sledi kružni (fazorski) dijagram.

4.1.75. ----- $i' = 37{,}8 \sin (1\,000t - 41°)$; **4.1.76.** ----- $\underline{Z} = -j\,200\ \Omega$, C = 0,8 μF (kondenzator);

4.1.77. ----- $C = 1/2\omega^2 L$;

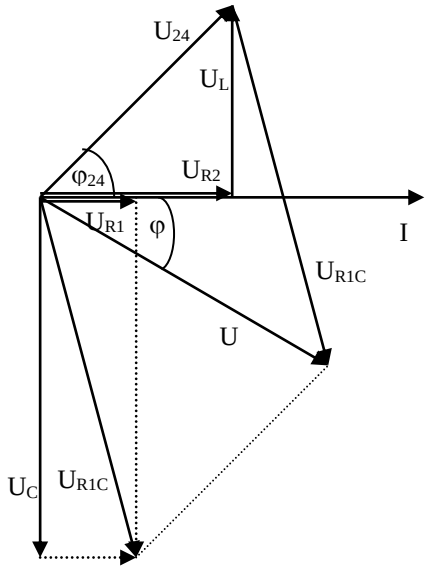
4.1.78. -----

$$\underline{U} = \frac{\underline{Q}_C}{C} = \frac{(0{,}2 + j0{,}6)\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-6}} = (100 + j300)[V];$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\cdot 2\cdot 10^{-6}} = 5000[\Omega] \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{100 + j300}{-j5000} = (-0{,}06 + j0{,}02)[A] = (-60 + j20)[mA]$$

$$\underline{U} = \underline{Z}\cdot\underline{I} = (10000 - j5000)\cdot(-0{,}06 + j0{,}02) = (-500 + j500)[V].$$

4.1.79. ----- $\underline{U} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_L + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_C \Rightarrow \underline{U} = \underline{U}_{24} + \underline{U}_{R1} + \underline{U}_C = \underline{U}_{24} + \underline{U}_{R1C}$



$\underline{U}_{R1C} = \underline{I}\cdot(R_1 - jX_C) = 2{,}8 - j16{,}8)$ [V];

$U_{R2} = U_{24}\cdot\cos 45° = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}[V]$;

$U_L = U_{24}\cdot\sin 45° = 4\sqrt{2}[V]$.

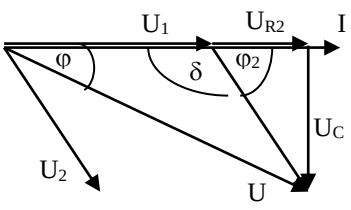
$U =$

$2{,}8 - j16{,}8 + 4\sqrt{2} + j4\sqrt{2} = 8{,}46 - j11{,}14[V] \Rightarrow$

$U = \sqrt{8{,}46^2 + 11{,}14^2} = 14[V]$

4.1.80. ----- $U_C = 30$ V, $\varphi = \pm 37°$;

4.1.81. -----



Iz kosinusne teoreme: $U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos\delta \Rightarrow$

$$\cos\delta = \frac{U_1^2 + U_2^2 - U^2}{2U_1U_2} = \frac{25 + 36 - 100}{2\cdot 5\cdot 6} = -0{,}65 \Rightarrow \delta = 130{,}54^o.$$

$$\varphi_2 = 180^o - 130{,}54^o = 49{,}46^o$$

$\varphi_2 = -49{,}46^o$, jer se radi o RC opterećenju.

$U_{R2} = U_2\cdot\cos\varphi_2 = 6\cdot 0{,}65 = 3{,}9$ [V]; $U_C = U_2\cdot\sin\varphi_2 = 6\cdot 0{,}76 = 4{,}56$ [V].

4.1.82. ----- Kako je otpor kondenzatora u kolu jednosmerne struje beskonačan (prekid kola) u kolu nema struje. Zbog toga na otporniku R nema napona (pada napona). Napon izvora je na ovaj način jednak naponu na kondenzatoru, jer su ploče kondenzatora na istom potencijalu na kojem se nalaze polovi izvora.
Dakle, $U_R = 0$ V, $U_C = 141$ V;

4.1.83. ----- $Z = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13[\Omega] \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{260}{13} = 20[A]$; $\omega = 1\,000$ rad/s;

$R_e = R_1 + R_2 = 12\ \Omega \Rightarrow R_2 = 7\ \Omega$.

$X_{Le} = X_{L1} + X_{L2} = 5\ \Omega \Rightarrow X_{L1} = 3\ \Omega$;

$X_{L1} = \omega L_1 \Rightarrow \omega = X_{L1}/L_1 = 3/3\cdot 10^{-3} = 1000$ [rad/s].

4.1.84. ---- Kako je u kolu jednosmerne struje induktivni otpor jednak nuli ($X_L = 2\pi f = 2\pi\cdot 0 = 0$) $\Rightarrow$ Z = R
I = U/R = 10 A, U_R = 100 V, U_L = 0 V;

4.1.85. ----- Ubacivanjem feromagnetnog jezgra povećava se magnetna permeabilnost (magnetna propustljivost) μ, što dovodi do povećanja induktivnosti kalema a samim tim povećeva se i induktivni otpor kalema. Navedene konstatacije su očite iz sledećih relacija: $L = N^2 \cdot \Lambda = N^2 \mu \frac{S}{l}[H]$; $X_L = \omega L$.

Povećenjem induktivnog otpora povećava se i ekvivalentna impedansa kola prema relaciji $Z = \sqrt{R^2 + X_L^{\ 2}}$
Da je kolo savršeno induktivno impedansa bi se srazmerno menjala promenom X_L. Kako impedansa pored X_L ima i otpornost R tada će porast ekvivalentne impedanse biti nešto manji od porasta induktivnog otpora. To se lako može dokazati brojčanim primerom.Povećena impedansa (nešto manjeg inteziteta od povećanja induktivnog otpora) dovodi do smanjenja struje u kolu. Struja se smanjuje obrnuto srazmerno sa impedansom kola (I = U/Z). Napon na kalemu iznosi $U_L = I\cdot X_L$. Usled većeg povećanja induktivnog otpora od smanjenja struje, napon na kalemu U_L raste.
Otpornik R je konstantan (ne zavisi od feromagnetne jezgre), pa će napon na njemu U_R da opada, jer je ubacivanjem jezgra struja u kolu opala ($U_R = IR$).

4.1.86. ---- U_R se smanji;

4.1.87. ----- $X_1 = X_2$, $X_1 = X_{L1} - X_{C1} = 8\ \Omega$, $X_2 = X_{L2} - X_{C2} = 8\ \Omega$, struje su iste, pa je $U_{AB1} = U_{AB2}$**;**

4.1.88. ----- Isključenjem jedne sijalice ukupna impedansa kola se povećava (dve paralelne sijalice imaju veću otpornost od tri). To dovodi do smanjuja struje, pa **U_L opada** ($U_L = IX_L$, jer je X_L = lonst.).
Iz relacije $U = \sqrt{U_R^{\ 2} + U_L^{\ 2}} \Rightarrow U_R = \sqrt{U^2 - U_L^{\ 2}}$, se vidi da će sa padom U_L, odnosno isključenjem sijalice, **porasti napon U_R**, jer je napon U konstantan.

4.1.89. ----- I = 14,1 A; **4.1.90.** ----- R = X;

4.1.91. ----- $R = U_R/I = 10\ \Omega$; $X_L = \omega L = U_L/I = 20\ \Omega \Rightarrow L = 20/314 = 63{,}69$ [mH];
$X_C = 1/\omega C = U_C/I = 12\ \Omega \Rightarrow C = 1/12\cdot 314 = 265{,}4$ [μF] ; $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 12{,}81[\Omega]$
$X_{L1} = \omega_1\cdot L = 628\cdot 63{,}69\cdot 10^{-3} = 40$ [Ω]; $X_{C1} = 1/\omega_1 C = 1/628\cdot 265{,}4\cdot 10^{-6} = 6$ [Ω];
$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{10^2 + 34^2} = 35{,}44[\Omega]$.
$U = I\cdot Z_1 = 5\cdot 35{,}44 = 177{,}2$ [V].

4.1.92.----- Uz pretpostavku da je početni ugao za struju jednak nuli, sledi: $i = I_m \sin \omega t = 0{,}1\sqrt{2} \sin 10^6 t \Rightarrow$
za t = 0 i trenutna vrednost struji i = 0 A. Kako je $e = u_L + u_R = u_L + iR = u_L + 0 = u_L \Rightarrow$
$e = U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2) = U_{Lm} \cos \omega t = U_{Lm} = \omega L\cdot I_m = 10^6\cdot 10\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}1\cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} = 1{,}414$ V.

4.1.93. ----- Iz podataka za trenutne vrednosti struje i napona se vidi da struja prednjači naponu (u trenutku t_1 struja je već opadala ka nuli, dok će napon od ovog trenutka, tj. nakon svog maksimuma, da opada ka nuli..)
Ako usvojimo da je početna faza struje jednaka 90° izrazi za struju i napon su:
$i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\cos\omega t$, odnosno $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$; $(-90^\circ \le \varphi \le 0^\circ)$
U trenutku t_2 ($t_2 = 0$) kada je struja maksimalna ($i = I_m$) napon iznosi 100 V, pa je :
$u(t_2) = U\sqrt{2}\cos\varphi \Rightarrow 100 = 100\sqrt{2}\cos\varphi \Rightarrow \varphi = -45^\circ$.
Kada je napon maksimalan [$100\sqrt{2} = 100\sqrt{2}\cos(\omega t_1 - 45^\circ)$] $\Rightarrow \omega t_1 = 45^\circ$, struja iznosi:
$i = I_m \cos\omega t_1 \Rightarrow 10 = Im \cos 45^\circ = I_m\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow I_m = \frac{10\cdot 2}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \Rightarrow I = 10$ mA.
Impedansa kola je: $Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{10\cdot 10^{-3}} = 10\cdot 10^3\ \Omega = 10$ KΩ.

Kako prevladava kapacitivno opterećenje ova impedansa se može predstaviti kompleksno:

$$\underline{Z} = \underline{Z} \cdot e^{-j\varphi} = 10 \cdot e^{-j45^\circ} = 10\left[\cos\left(-45^\circ\right) + j\sin\left(-45^\circ\right)\right] = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\left(\sqrt{2} - j\sqrt{2}\right)\ K\Omega.$$

4.1.94.----- a) $Z = U/I = \sqrt{R^2 + \left(\omega L^2\right)} \Rightarrow L \approx 0{,}2$ H.

b) Kako je $L = N^2\Lambda \Rightarrow L_1 = N_1{}^2\Lambda = (N/2)^2\Lambda = L/4$. Dakle induktivnost će se smanjiti 4 puta.

$Z_1 = \sqrt{10^2 + (314 \cdot 0{,}05)^2} \Rightarrow I_1 = U/Z_1 = 13{,}5$ A.

4.2.1. ----- a) $\underline{Z}_1 = 2\ \Omega,\ \underline{Z}_2 = j\,2\ \Omega,\ \underline{Z}_3 = -j\,1\ \Omega,$

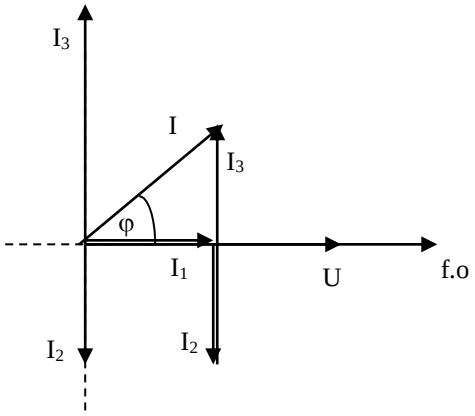
b) $\underline{Y}_1 = 1 / \underline{Z}_1 = 0{,}5\ S,\ \underline{Y}_2 = 1 / \underline{Z}_2 = -j\,0{,}5\ S,\ \underline{Y}_3 = 1 / \underline{Z}_3 = j\,1\ S;$

c) $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = (\,0{,}5 + j0{,}5\,)\ S \Rightarrow\ Y = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5\sqrt{2}\,[S];$

$\underline{Z} = 1 / \underline{Y} = (\,1 - j\,1\,)\ \Omega \quad Z = \sqrt{1^1 + 1^2} = \sqrt{2}\,[\Omega];\ \underline{Y} = 0{,}5 + j\,0{,}5\ S;$

d) $\underline{I}_1 = \underline{U}\,\underline{Y}_1 = 10\sqrt{2}\ A,\ \underline{I}_2 = \underline{U}\,\underline{Y}_2 = -j\,10\sqrt{2}\ A,\ \underline{I}_3 = \underline{U}\,\underline{Y}_3 = j\,20\sqrt{2}\ A,$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 10\sqrt{2} + j\,10\sqrt{2} \Rightarrow\ I = \sqrt{200 + 200} = 20\,[A]\ ;$



e) $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-1}{1} = -1 \ \Rightarrow\ \varphi = \mathrm{arctg}\,(-1) = -45°$ (kapacitivno)

4.2.2. ----- $\underline{Y} = (\,1 + j\,1)\ S$; **4.2.3.** ----- $\underline{Z} = (\,2 + j\,3\,)\ \Omega;$

4.2.4. ----- $R_1 = \dfrac{G_1}{Y_1^{\,2}} = \dfrac{0{,}09}{0{,}09^2 + 0{,}03^2} = 10\,[\Omega]\ ;\quad R_2 = \dfrac{G_2}{Y_2^2} = \dfrac{0{,}06}{0{,}06^2 + 0{,}02^2} = 15\,[\Omega];$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{B_{C1}}{Y_1^{\,2}} = \frac{0{,}03}{0{,}009} = \frac{10}{3}\,[\Omega] \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\omega X_{C1}} = \frac{1}{1000 \cdot 10/3} = 3 \cdot 10^{-4} = 300 \cdot 10^{-6}\,[F] = 300\,[\mu F];$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{B_{C2}}{Y_2^{\,2}} = \frac{0{,}02}{0{,}004} = 5\,[\Omega] \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\omega X_{C2}} = \frac{1}{1000 \cdot 5} = 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 200 \cdot 10^{-6}\,[F] = 200\,[\mu F];$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (0{,}15 + j0{,}05)\,[S] \Rightarrow Y = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}05^2} = \sqrt{0{,}025} = 0{,}158\,[S] \Rightarrow I = U \cdot Y = \sqrt{0{,}025} \cdot 100\sqrt{10} = 50\,[A];$$

$$I_1 = U \cdot Y_1 = 100\sqrt{10} \cdot \sqrt{0{,}009} = 30\,[A],$$

$$I_2 = U \cdot Y_2 = 100\sqrt{10} \cdot \sqrt{0{,}004} = 20\,[A].$$

4.2.5. ----- $\underline{Z}_2 = 7 + j\,17\ \Omega;$

4.2.6. ------ $\underline{Z}_1 = 20 + j\,10,\ \underline{Z}_2 = 15{,}12 + j\,3{,}9$ ($R_1 = 20\ \Omega,\ X_{L1} = 10\ \Omega,\ R_2 = 15{,}12\ \Omega,\ X_{L2} = 3{,}9\ \Omega$);

4.2.7. ----- $\underline{Z} = 0{,}5 + j\,0{,}5\ \Omega,\ Z = 0{,}5\sqrt{2}\ \Omega;$

4.2.8. -----

$$\underline{Z}=\frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\frac{(R_1-jX_1)\cdot(R_2-jX_2)}{R_1-jX_1+R_2-jX_2}=\frac{R_1R_2-jR_1X_2-jR_2X_1-X_1X_2}{R_1+R_2-j(X_1+X_2)}\Rightarrow$$

$$\underline{Z}=\frac{R_1R_2-X_1X_2-j(R_1X_2+R_2X_1)}{R_1+R_2-j(X_1+X_2)}=\frac{R\cdot(R+1)-(R+1)\cdot R-j(R\cdot R+(R+1)\cdot(R+1))}{R+(R+1)-j(R+1+R)}\Rightarrow$$

$$\underline{Z}=\frac{-j(R^2+R^2+2R+1)}{2R+1-j-j2R}=\frac{-j(2R^2+2R+1)}{(2R+1)-j(2R+1)}=\frac{-j(2R^2+2R+1)}{(2R+1)\cdot(1-j)}=\frac{-j(2R^2+2R+1)\cdot(1+j)}{(2R+1)\cdot(1-j)\cdot(1+j)}\Rightarrow$$

$$\underline{Z}=\frac{-j(2R^2+2R+1)+(2R^2+2R+1)}{(2R+1)\cdot(1^2+1^2)}=\frac{2R^2+2R+1}{4R+2}-j\frac{2R^2+2R+1}{4R+2}\Rightarrow$$

$$\underline{Z}=R_e-jX_e\Rightarrow R_e=X_e\Rightarrow R_e=X_e=\frac{2R^2+2R+1}{4R+2}$$

$$Z=\sqrt{R_e{}^2+X_e{}^2}=\sqrt{2R_e{}^2}=R_e\sqrt{2}\Rightarrow R_e=\frac{Z}{\sqrt{2}}=\frac{1{,}3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1{,}3\Rightarrow$$

$$\frac{2R^2+2R+1}{4R+2}=1{,}3\Rightarrow 2R^2+2R+1=1{,}3\cdot(4R+2)\Rightarrow 2R^2-3{,}2R-1{,}6=0$$

$$R_{1/2}=\frac{3{,}2\pm\sqrt{3{,}2^2-4\cdot2\cdot(-1{,}6)}}{2\cdot2}=\frac{3{,}2\pm4{,}8}{4}$$

Kako je otpornik R uvek veći od nule, sledi samo jedno rešenje, koje iznosi R = 2 [Ω] ⇒
$R_1 = X_2 = 2$ [Ω]; $R_2 = X_1 = 3$ [Ω]; $\underline{Z}_1 = (2 - j\,3)$ [Ω] ; $\underline{Z}_2 = (3 - j\,2)$ [Ω] ;

4.2.9. ----- R = 20 Ω, C = 50 μF; **4.2.10.** ----- I = 5 μA; **4.2.11.** ----- $\underline{Z}$ = 0,625 Ω;

4.2.12.----- I_1 = 15,4 A, I_2 = 14 A, I = 28 A, φ = 54°;

4.2.13. ----- I_1 = 5,7 A, I_2 = 6,41 A, I = 11,95 A, φ = – 49°;

4.2.14. ----- I_1 = 1,2 A, I_2 = 0,4 A, I = 1,4 A, φ = 21,7°;

4.2.15. ----- I_1 = 29 A, I_2 = 10,6 A, I_3 =13 A, I = 34,3 A, φ = 48°;

4.2.16. ----- $\underline{Z}$ = (2,35 + j 0,58) Ω, $\underline{Y}$ = (0,4 – j 0,1) S;

4.2.17. ----- a) $\underline{Y}$ = (0,1 – j 0,2) S, b) $\underline{I}$ = (4 – j 3) A, I_a = 2,23 A, I_r = 4,47 A;

4.2.18. ----- $\underline{Z}$ = (12,8 – j 129,2) Ω;

4.2.19. ----- a) Kod redne veze kondenzatora ekvivalentni kapacitet opada , prema relaciji,
$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\Rightarrow\frac{1+n}{C}$, pa će ekvivalentni kapacitivni otpor X_{Ce} da raste ($X_{Ce} = 1/\omega C_e$) ⇒
$X_{Ce} = (n + 1) X_C$,

b) Kod paralelne veze kondenzatora ekvivalentni kapacitet raste $C_e = C + C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ ⇒
$C_e = (n + 1)C$ te će ekvivalentna kapacitivna otpornost da opada, prema relaciji: $X_{Ce}=\frac{X_C}{n+1}$ X_{Ce} .

4.2.20. ----- I_R = 3 A, I_L = 4 A, I = 5 A, L = 79,6 mH;

4.2.21. ----- I = 25 A, I_R = 15 A, I_C = 20 A, G = 0,25 S, B_C = 0,333 S, Y = 0,417 S, φ = – 53,13°;

4.2.22. ----- $\underline{Z} = 8{,}7\cdot e^{j\,27°50'}$ Ω, $\underline{Y} = 0{,}115\cdot e^{-j\,27°50'}$ S;

4.2.23. ----- G = 0,03 S, B_L = 0,04 S, $\underline{I}_R = 6{,}6\cdot e^{j\,0°}$ A, $\underline{I}_L = 8{,}8\cdot e^{-j\,90°}$ A, $\underline{I} = 11\cdot e^{-j\,53°8'}$ A;

4.2.24. ----- $\underline{I}_L$ = – j 318 mA, $\underline{I}_C$ = j 251 mA, $\underline{I}$ = – j 67 mA, $\underline{Z}$ = j 2 985 Ω;

4.2.25. ----- i = 4,12 sin (5 000t + 90°) A;

4.2.26. ----- $\underline{I}_R$ = 15 A, $\underline{I}_L$ = – j 20 A, $\underline{I}_C$ = j 12 A, $\underline{I}$ = ((15 – j 8) A;

4.2.27. ----- i = 0,87 sin (1 000t + 67,3°) A, $\underline{Z} = 115 \cdot e^{-j\,67{,}3°}\ \Omega$; **4.2.28.** ----- $\underline{I} = 10{,}2 \cdot e^{j\,78°41'}$ A;

4.2.29. ----- $\underline{I} = 5{,}43 \cdot e^{j\,11°9'}$ A, $\underline{I}_1 = 1{,}69 \cdot e^{j\,38°8'}$ A; **4.2.30.** ----- I = 22,4 A;

4.2.31. ----- a) $\underline{I}_1$ = (3,3 – j 4,4) A, $\underline{I}_2$ = (3,52 – j 2,64) A, $\underline{I}_3$ = (2,46 – j 8,45) A
b) φ_1 53°8′, φ_2 = 36°52′, φ_3 = 73°44′; c) $\underline{I}$ = (9,28 – j 15,49) A, φ = 59°4′;

4.2.32. ----- $\underline{Z}$ = (2 + j 2√3) Ω (ind. karaktera); **4.2.33.** ----- $I_1 = \sqrt{2}\ I$;

4.2.34. ----- paralelna veza R i L ($Z_1 = R$, $Z_2 = X_L$);

4.2.35. ----- a) $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + jB_1 + G_2 - jB_2 = 0{,}2 + j1 + 0{,}6 - j0{,}4 = 0{,}8 + j0{,}6$) [mS] $\Rightarrow$

$$Y = \sqrt{G_e^{\,2} + B_e^{\,2}} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} = 1\,[\text{mS}]$$ Y = 1 mS,

b) $$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{B_e}{G_e} = -\operatorname{arctg}\frac{0{,}6}{0{,}8} = -37^{o}\,.$$

4.2.36. ----- i = 20,6 sin (1 000t + 35,95°) A, φ = – 14,05°;

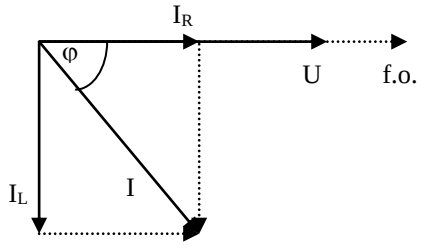
4.2.37. ----- $Z = R + jX_L = R + j\omega L = 10 + j314 \cdot 0{,}1 = (\,10 + j31{,}4\,)\ [\Omega] \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + X_L^{\,2}} = 33\,[\Omega]$.

Admitansa kola je: $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{33} = 0{,}0303\,[\text{S}]$,

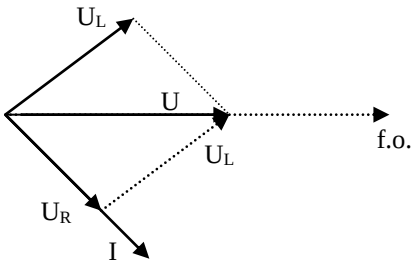
konduktansa: $G = \frac{R}{Z^2} = \frac{10}{33^2} = 0{,}009\,[\text{S}]$,

a susceptansa: $B_L = \frac{X_L}{Z^2} = \frac{31{,}4}{33^2} = 0{,}029\,[\text{S}]$.

4.2.38. ----- a) Kod paralelne veze ukupna admitansa iznosi: $\underline{Y} = G - jB_L = (\,0{,}05 - j0{,}08\,)\ [\text{S}] \Rightarrow$
G = 0,05 S; B_L = 0,08 S. Iz konduktanse G i susceptanse B_L se izračuna rezistansa R (aktivna otpornost) i induktivna reaktansa X_L. Rezistansa je: $R = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}05} = 20\,[\Omega]$, a reaktansa: $X_L = \frac{1}{B_L} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5\,[\Omega]$.



Sl.4.2.38. a)



Sl.4.2.38. b)

b) Kod redne veze je: $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0{,}05 - j0{,}08} = (5{,}62 + j8{,}99)\,[\Omega]$.

Sledi da je kod redne veze: R = 5,62 Ω, X_L = 8,99 Ω;

Na slici 4.2.38. a) je nacrtan fazorski dijagram kod paralelne veze, dok je na slici 4.2.38. b) fazorski dijagram kod redne veze.

4.2.39. ----- I = 22,4 A;

4.2.40. ---- $\underline{Z}_1 = (2 + j\,2)\ \Omega = 2\sqrt{}\, e^{j\,45^\circ}\ \Omega$;

4.2.41. ----- a) $\underline{Z}_a = (38{,}4 + j\,28{,}8)\ \Omega$, $Z_a = 48\Omega$, b) $\underline{Z}_b = -\,j\,240\ \Omega$, $Z_b = 240\ \Omega$;

4.2.42. ----- a) $\underline{Z} = -\,j\,1\,234\ \Omega$, b) $\underline{Z} = j\,28\ \Omega$;

4.2.43. ----- Prekidač **P otvoren:**

$$U = \sqrt{U_R{}^2 + U_C{}^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + X_C{}^2} \Rightarrow I = \frac{U}{Z};\quad U_R = IR;\ U_C = IX_C.$$

Prekidač **P zatvoren**:

$$R_e = \frac{R}{2} \Rightarrow Z' = \sqrt{R_e{}^2 + X_C{}^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} + X_C{}^2} \Rightarrow Z' < Z \Rightarrow I' = \frac{U}{Z'} \Rightarrow I' > I \Rightarrow U_C' = I' X_C \Rightarrow U_C' > U_C$$

$$U_R' = \sqrt{U^2 - U_C'^2} \Rightarrow U_R' < U_R$$

Uključenjem P ukupna impedansa se smanjuje, struja povećava, napon na kondenzatoru povećava, dok se napon na otporniku R smanjuje (jer se ovaj otpor više smanjio od povećanja struje).

4.2.44. -----

$$\underline{Z} = \frac{(R + jX_L)\cdot(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{(X_L - X_C - jRX_C)\cdot[R - j(X_L - X_C)]}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{RX_LX_C - jR^2X_C - jX_LX_C(X_L - X_C) - RX_C(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{RX_LX_C - RX_C(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)} - j\frac{R^2X_C + X_LX_C(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Kako je $\varphi = 0 \Rightarrow R^2X_C + X_LX_C(X_L - X_C) = 0 \Rightarrow R^2 + X_L{}^2 - X_LX_C = 0$

Umesto $R^2 + X_L{}^2$ uvrstimo Z^2, pa sledi: $Z^2 - X_LX_C = 0 \Rightarrow$

$$X_C = \frac{Z^2}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{\omega C} = \frac{Z^2}{\omega L} \Rightarrow C = \frac{L}{Z^2} = \frac{50\cdot10^{-3}}{22^2} = 103{,}3\cdot10^{-6}[\mathrm{F}] = 103{,}3[\mu\mathrm{F}],$$

$$\cos\varphi = 1.$$

Zadatak se mogao rešiti pomoću karakteristične impedanse (oscilatorna kola), koja je jednaka $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$

(što će biti rađeno u sledećim oblastima).

4.2.45. ----- a) $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_L}{jX_L} = \frac{U_L}{jX_L} = \frac{10}{j5} = -j2[\mathrm{A}] \Rightarrow I_2 = 2[\mathrm{A}].$

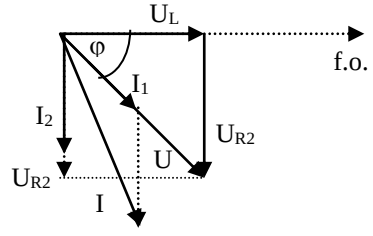
Iz uslova zadatka, U_L fazno prednjači naponu za $\pi/4$, sledi da će fazni pomak između napona U i struje I iznositi $\varphi = \pi/4$ (U_L fazno prednjači struji I za $\pi/2$). Na osnovu navedenog sledi da je $U_L = U_{R2} = 10$ V, odnosno $U =$

$$\sqrt{U_{R2}{}^2 + U_L{}^2} = 10\sqrt{2}[\mathrm{V}];$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}[\mathrm{A}] \rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1} = \frac{10\sqrt{2}\cdot e^{-j45^\circ}}{10} = \sqrt{2}\cdot e^{-j45^\circ} = \sqrt{2}[\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)] = (1 - j1)[\mathrm{A}].$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (1 - j3)[\mathrm{A}] \Rightarrow I = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}[\mathrm{A}].$$

b)



4.2.46. ----- $R_1 = 2\ \Omega$;

4.2.47. -----

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)\cdot(10 + j20)}{R_1 + jX_1 + 10 + j20} = \frac{(2X_1 + jX_1)\cdot(10 + j20)}{2X_1 + jX_1 + 10 + j20} = \frac{j50X_1[2X_1 + 10 - j(X_1 + 20)]}{(2X_1 + 10)^2 + (X_1 + 20)^2} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{50X_1^{\,2} + 1000X_1}{(2X_1 + 10)^2 + (X_1 + 20)^2} + j\frac{100X_1^{\,2} + 500X_1}{(2X_1 + 10)^2 + (X_1 + 20)^2}$$

Iz uslova $\varphi = \pi/4$ ($\operatorname{tg}\varphi = X_e/R_e = 1$), sledi da da su realni i imaginarni delovi kompleksne impedanse međusobno jednaki (rezistansa R_e = reaktansi X_e). To znači da je:

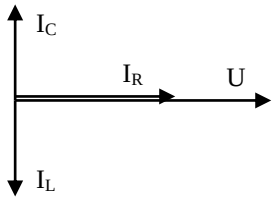
$50X_1^2 + 1000X_1 = 100X_1^2 + 500X_1 \Rightarrow 50X_1^2 = 500X_1 \Rightarrow X_1 = 10\ [\Omega];\ R_1 = 20\ [\Omega]$.

Kompleksna impedansa Z_1 je: $\underline{Z}_1 = (20 + j\,10)\ [\Omega]$. $\Rightarrow Z_1 = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}[\Omega]$.

4.2.48. ----- I = 28,95 A;

4.2.49. ----- a) $\underline{Z} = 40\, e^{-j\,22°50'}\ \Omega$, b) $u = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + 16{,}26°)$ V, $i_1 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 16{,}26°)$ A,
$i_2 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 90°)$ A, $i = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 39{,}1°)$ A;

4.2.50. -----



Ukupna struja je jednaka: $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$.
Struja I će biti u fazi sa naponom U samo onda kada se struje I_L i I_C međusobno izjednače. U tom slučaju sledi da je $\underline{I} = \underline{I}_R$ i ukupna struja će biti u fazi sa naponom, što se vidi na fazorskom dijagramu. Uslov pri kojem će doći do ove pojave (pojava antirezonanse) je:

$I_L = I_C \Rightarrow U_L/X_L = U_C/X_C \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow \omega L = 1/\omega C \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{314^2 \cdot 0{,}1} = 101{,}4\cdot 10^{-6}[F] = 101{,}4[\mu F].$$

4.2.51. ----- $\underline{Z}_3 = (4 + j\,3)\ \Omega$;

4.2.52. -----

$$\underline{Z} = \frac{R\cdot(-jX_C)}{R - jX_C} + \frac{R\cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{-jRX_C\cdot(R + jX_C)}{R^2 + X_C^{\,2}} + \frac{jRX_L\cdot(R - jX_L)}{R^2 + X_L^{\,2}} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{RX_C^{\,2} - jR^2X_C}{R^2 + X_C^{\,2}} + \frac{RX_L^{\,2} + jR^2X_L}{R^2 + X_L^{\,2}} = \left(\frac{RX_C^{\,2}}{R^2 + X_C^{\,2}} + \frac{RX_L^{\,2}}{R^2 + X_L^{\,2}}\right) + j\left(\frac{R^2X_L}{R^2 + X_L^{\,2}} - \frac{R^2X_C}{R^2 + X_C^{\,2}}\right)$$

Za f = 0 [HZ] ($\omega = 0$) $\Rightarrow \underline{Z} = R$, a za $f = \infty \Rightarrow \underline{Z} = R$

Ukupna impedansa je, uz navedeni uslov, na svim frekvencijama jednaka termogenom otporniku R . Ako je frekvencija f = 0, kalem je u kratkoj vezi ($X_L = 0$) , a kondenzator ima beskonačan otpor (prekid grane). Na beskonačnoj frekvenciji kondenzator je u kratkoj vezi ($X_C = 0$) a kalem ima beskonačan otpor). Ista otpornost mora biti i na drugim frekvencijama. Usled navedene činjenice, sledi da je imaginarni deo impedanse jednak nuli, te je:

$$\frac{R^2X_L}{R^2 + X_L^{\,2}} - \frac{R^2X_C}{R^2 + X_C^{\,2}} = 0 \Rightarrow (R^2 + X_L^{\,2})\cdot X_C = (R^2 + X_C^{\,2})\cdot X_L \Rightarrow R^2X_C + X_L^{\,2}X_C = R^2X_L + X_LX_C^{\,2} \Rightarrow$$

$$R^2(X_C - X_L) = X_LX_C(X_C - X_L) \Rightarrow R^2 = X_LX_C = \omega L\cdot\frac{1}{\omega C} = \frac{L}{C} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{L/C} = 59{,}161[\Omega].$$

Isto se rešenje dobije i realnim delom impedanse, gde je: $\underline{Z} = R = \frac{RX_C^{\,2}}{R^2 + X_C^{\,2}} + \frac{RX_L^{\,2}}{R^2 + X_L^{\,2}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50[\Omega]$.

Čitaocu se preporučuje da proveri tačnost zadatka na proizvoljno uzetim frekvencijama (npr. $\omega = 100$ rad/s).

4.2.53. ----- a) f = 312 Hz, b) $\underline{I}_L = (0{,}01 - j\ 0{,}049)$ A, $\underline{I}_C = j\ 0{,}049$ A, $\underline{I} = 0{,}01$ A;

4.2.54. ----- a) $\underline{Z} = (2{,}64 - j\ 0{,}3)\ \Omega$, $\underline{Y} = (0{,}4 + j\ 0{,}05)$ S, b) $\underline{Z} = (2 - j\ 2)\ \Omega$, $\underline{Y} = (0{,}25 + j\ 0{,}25)$ S,
c) $\underline{Z} = (0{,}154 - j\ 1{,}23)\ \Omega$, $\underline{Y} = (0{,}1 + j\ 0{,}8)$ S;

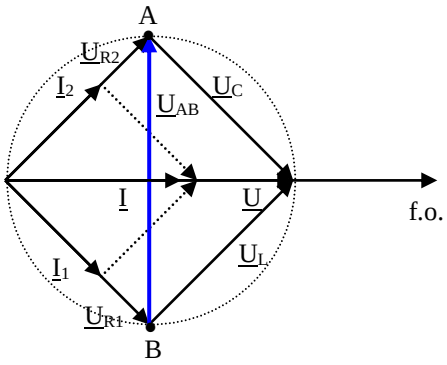
4.2.55. ----- $\underline{U}_{AB} + \underline{I}_1 R_1 - \underline{I}_2 R_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AB} = \underline{I}_2 R_2 - \underline{I}_1 R_1$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{10}{2 + j2} = (2{,}5 - j2{,}5)[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{10}{2 - j2} = (2{,}5 + j2{,}5)[\mathrm{A}] \Rightarrow$$

$$\underline{U}_{AB} = (2{,}5 + j2{,}5)\cdot 2 - (2{,}5 - j2{,}5)\cdot 2 = 5 + j5 - (5 - j5) = j10[\mathrm{V}].$$

Ukupna struja kola iznosi: $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2{,}5 - j2{,}5 + 2{,}5 + j2{,}5 = 5$ [A].



Čitaocu se preporučuje da fazorski dijagram nactra u razmeri 1 cm = 1 A = 1 V.

4.2.56. ----- a) $\underline{Z} = (1{,}73 - j\ 1)\ K\Omega$, b) $\underline{Y} = (0{,}43 + j\ 0{,}25)$ mS;

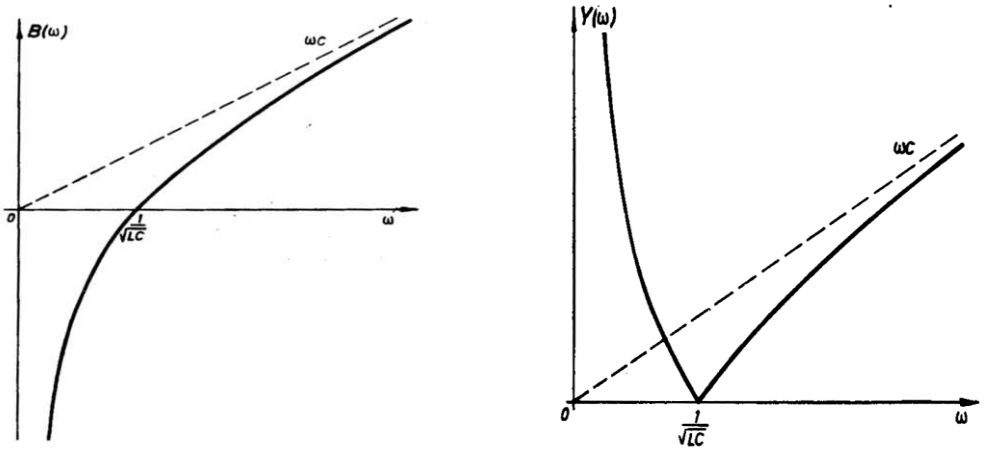
4.2.57. ----- a)

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}} = j\omega C = jB_C \Rightarrow B_C = \omega C[\mathrm{S}];$$

a) $$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L \Rightarrow B_L = \frac{1}{\omega L}[\mathrm{S}]$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = j(B_C - B_L) \Rightarrow Y = \left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right| = |B_C - B_L| = B$$

Grafički dijagram reaktivne provodnosti i admitanse dat je na slici 4.2.57. a.

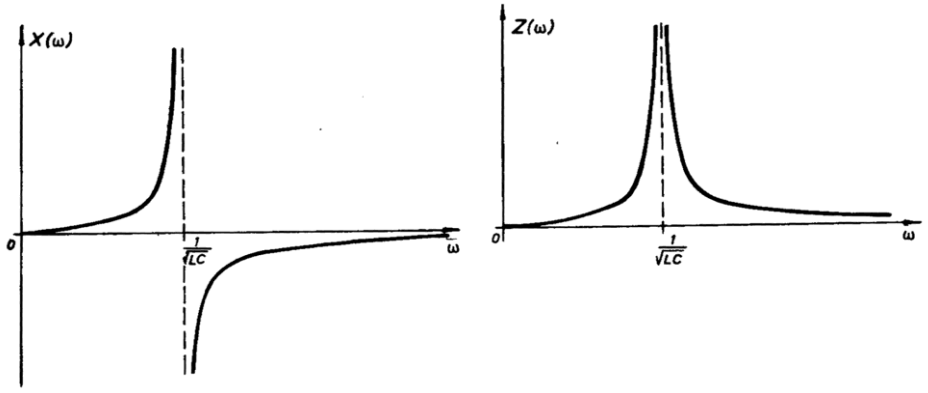


Sl.4.2.57.a)

b) Impedansa ove paralelne veze i njena ukupna reaktivna otpornost iznosi:

$$\underline{Z}=\frac{1}{\underline{Y}}=\frac{1}{j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}=\frac{1}{j\frac{\omega^2 LC-1}{\omega L}}=-j\frac{\omega L}{\omega^2 LC-1}=j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}=jX\Rightarrow X=\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\Rightarrow Z=X=\frac{\omega L}{\left|1-\omega^2 LC\right|}.$$

Grafički dijagram zavisnosti reaktivne otpornosti i mpedanse u funkciji sa kružnom učestanošću dat je na slici 4.2.57.b.



Sl.4.2.57.b)

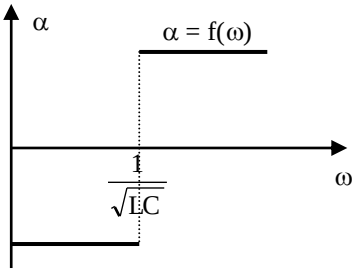
c) $\underline{I}=\underline{I}_L+\underline{I}_C\Rightarrow I=|I_L-I_C|$

Za $\omega L<1/\omega C\Rightarrow I_L>I_C$, pa je ukupna struja istog smera kao I_L (veća struja) . U ovom slučaju struja kasni za naponom za ugao $\pi/2$. Za $\omega L>1/\omega C\Rightarrow I_L<I_C$, pa je struja I istog smera kao i I_C, što znači da će struja I sada da prednjači naponu za $\pi/2$.

Sumirajući navedene konstatacije, sledi:

$$\alpha[\omega]=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}\rightarrow 0<\omega<\frac{1}{\sqrt{LC}}\\ \frac{\pi}{2}\rightarrow\omega>\frac{1}{\sqrt{LC}}\end{array}\right\rangle$$

Grafički dijagram je dat na slici 4.2.57.c.



Sl.4.2.57.c.

4.2.58. ----- Impedansa prve grane je: $Z=\sqrt{R_1^{\,2}+X_1^{\,2}}=\sqrt{400\ \ +300^{\,2}}=500[\Omega]$.

Efektivna vrednost ukupnog napona (napon na krajevima prve grane) je: $U=Z_1I_1=500\cdot10\cdot10^{-3}=5$ [V].

Impedansa druge grane je: $Z_2=\frac{U}{I_2}=\frac{5}{20\cdot10^{-3}}=250[\Omega]$.

Iz impedanse Z_1 sledi: $\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{X_1}{R_1}=\operatorname{arctg}\frac{-300}{400}=-36{,}87^{\circ}$.

Sledi, da će struja I_1 da prednjači naponu U za 36,87°. Ako pretpostavimo da je napon U u faznoj osi tada su njihovi kompleksni izrazi jednaki: $\underline{U}=5\cdot e^{j0^\circ}$ [V], odnosno

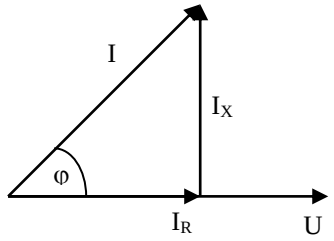
$\underline{I}_1=10\cdot e^{j36{,}87^\circ}=10\cdot(\cos 36{,}87+j36{,}87)=(8+j6)$ [mA].

Kako struja I_2 fazno zaostaje za strujom I_1 za 60°, njen početni ugao iznosi:
$\psi_{I2} = \psi_{I1} - 60° = 36,87° - 60° = -23,13°$.
Kompleksni izraz za struju I_2 je: $\underline{I}_2 = 20\cdot e^{-j23,13°} = 20\cdot[\cos(-23,13) + j\sin(-23,13)] = (18,39 - j7,86)$ [mA].
Očito je da struja u udnosu na napon (faznu osu) kasni za 23,13°, pa je impednasa Z_2 kompleksno jednaka:
$\underline{Z}_2 = Z_2\cdot e^{j\varphi_2} = 250\cdot e^{j23,13°} = 250\cdot(\cos 23,13° + j\sin 23,13°) = (230 + j98,2)$ [Ω] $\Rightarrow$ $R_2 = 230$ [Ω].

Prema drugom Kirhofovom zakonu, sledi jednačina:
$\underline{U}_{AB} - \underline{I}_1\cdot(-jX_1) + \underline{I}_2\underline{R}_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AB} = -\underline{I}_2R_2 - \underline{I}_1jX_1 \Rightarrow$
$\underline{U}_{AB} = -(18,39 - j7,86)\cdot10^{-3}\cdot230 - (8 + j6)\cdot10^{-3}\cdot j300 = -4,23 + j1,81 - j2,4 + 1,8 = (-2,43 - j0,59)$ [V].

Efektivna vrednost napona između tačaka A i B je: $U_{AB} = \sqrt{(-2,43)^2 + (-0,59)^2} = 2,5[\text{V}]$.

4.2.59. -----



Očito je, sa fazorskog dijagrama, da su struje u paralelnim granama međusobno jednake (jednakokraki pravougli trougao). Iz uslova zadatka sledi da je:

$$I = \sqrt{I_R{}^2 + I_X{}^2} = I_R\sqrt{2} \Rightarrow I_R = I_X = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{0,44}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 0,22[\text{A}]$$

$X_L = \omega\cdot L = 10^4\cdot20\cdot10^{-3} = 200$ [Ω].
$U_L = I_X\cdot X_L = 0,22\cdot200 = 44$ [V].

Kako je ukupnu napon na LC grani jednak: $U = |U_L - U_C| = U_X \Rightarrow U_C = 220 + U_L = 264$ [V] , jer u ovoj grani prevladava kapacitivno opterećenje ($X_C > X_L \Rightarrow U_C > U_L$).

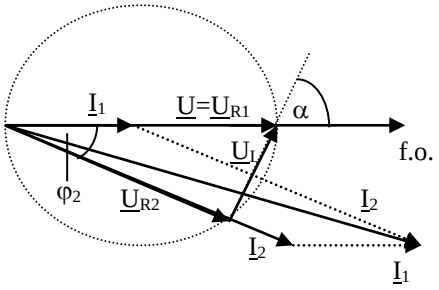
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_X} \Rightarrow C = \frac{I_X}{\omega\cdot U_C} = \frac{0,22}{10^4\cdot264} = 83,3\cdot10^{-9}[\text{F}] = 83,3[\text{nF}]$$

Termogeni otpornik u prvoj grani je jednak:

$$R = \frac{U}{I_R} = \frac{220}{0,22} = 1000[\Omega]$$

4.2.60. ----- $R_3 = 0$, $X_3' = 11\ \Omega$, $X_3'' = -24,3\ \Omega$;

4.2.61. ----- Za dati deo kola sledi: $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$; $\underline{U} = \underline{U}_{R1} = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_L$.
Ako pretpostavimo da je ukupni napon u faznoj osi ($\underline{U} = U\cdot e^{j0}$), tada se dobije sledeći fazorski dijagram napona i struja:



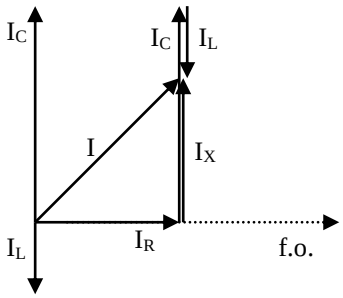
Iz dijagrama se vidi da je $\alpha + \varphi_2 = 90°$, pa je : $\varphi_2 = 90° - \alpha = 90° - 63°40' = 26°20'$.

Kako je, prema fazorskom dijagramu, $\sin\varphi_2 = U_L/U \Rightarrow U = \frac{U_L}{\sin\varphi_1} = \frac{4,5}{\sin 26°20'} = 10[\text{V}]$.

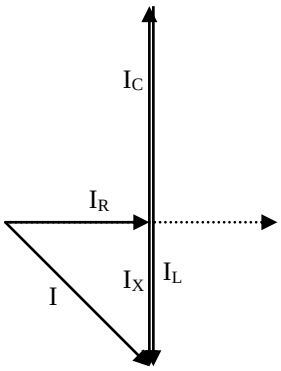
Efektivne vrednosti struja u paralelnim granama su:
$I_1 = U/R_1 = 10/10 = 1$ [A]; $I_2 = U/Z_2 = U_L/X_L = 4,5/2 = 2,25$ [A].

Primenom kosinusne teoreme, izračunamo ukupnu struju I
$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos\beta \Rightarrow I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi_2 \Rightarrow$
$I^2 = 1^2 + 2,25^2 + 2\cdot1\cdot2,25\cdot\cos26°20' = 1 + 5,0625 + 4,5\cdot0,896 = 10,096 \Rightarrow I = 3,177$ [A].

4.2.62. -----



a)



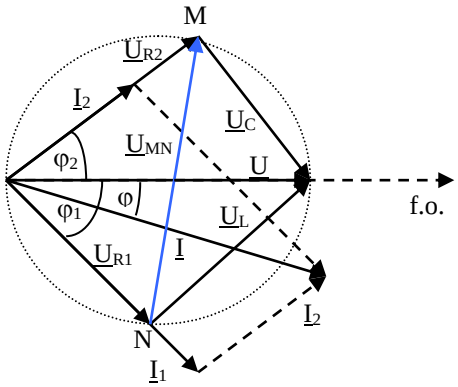
b)

Iz fazorskog dijagrama struja se vidi da imamo dva rešenja (slika a i slika b). Za oba rešenja je ukupna reaktivna vrednost struje I_X jednaka:

$$I_X = \sqrt{I^2 - I_R{}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8[\text{mA}].$$

Prvo rešenje, prema slici a, iznosi: $I_L = I_C - I_X = 17$ [mA],
a drugo rešenje, prema slici b, je: $I_L = I_X + I_C = 33$ [mA].

4.2.63. ----- Za kolo iz ovog zadatka odgovara fazorski dijagram napona i struja, dat na slici, gde je za napon U uzeto da je početni ugao jednak nuli (nalazi se u faznoj osi).



a) Impedansa grane sa kalemom je: $Z_1 = U/I_1 = 5$ [Ω],

pa je fazni pomak između napona U i struje I_1 jednak: $\varphi_1 = \arccos\dfrac{R_1}{Z_1} = \arccos 0{,}6 = 53{,}13^\circ$.

Primenom kosinusne teoreme ($I_2^2 = I_1^2 + I^2 - 2I_1 I\cos(\varphi_1 - \varphi)$) može se izračunati fazni pomak između struja I_1 i ukupne struje I. On je jednak:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{I_1{}^2 + I^2 - I_2{}^2}{2I_1 I} = \frac{20^2 + \left(10\sqrt{5}\right)^2 - 10^2}{2\cdot 20\cdot 10\sqrt{5}} = \frac{800}{400\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi = 26{,}57^\circ.$$

$\varphi = \varphi_1 - 26{,}57° = 53{,}13° - 26{,}57° = 26{,}56°$.

Identično tome ($I_1^2 = I^2 + I_2^2 - 2II_2\cos(\varphi_2 + \varphi)$), odredimo ugao $\varphi_2 + \varphi$, gde je:

$$\cos(\varphi_2 + \varphi) = \frac{I^2 + I_2{}^2 - I_1{}^2}{2II_2} = \frac{500 + 100 - 400}{2\cdot 10\sqrt{5}\cdot 10} = \frac{200}{200\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \varphi_2 + \varphi = 63{,}43^\circ.$$

$\varphi_2 = 63{,}43° - \varphi = 63{,}43° - 26{,}56° = 36{,}87°$ (kapacitivno).

Iz trougla napona sledi: $\cos\varphi_1 = U_{R1}/U \Rightarrow U_{R1} = U\cdot\cos\varphi_1 = 100\cdot 0{,}6 = 60$ [V],
Odnosno $\sin\varphi_1 = U_L/U \Rightarrow U_L = U\cdot\sin\varphi_1 = 100\cdot 0{,}8 = 80$ [V].

Na isti način iz drugog trougla napona (druga grana) odredimo napone U_{R2} i U_C, gde je:
$U_{R2} = U\cdot\cos\varphi_2 = 100\cdot 0{,}8 = 80$ [V], $U_C = U\cdot\sin\varphi_2 = 100\cdot 0{,}6 = 60$ [V].

Napon između tačaka M i N možemo odrediti iz trougla napona U_{R2}, U_{MN} i U_{R1}, koristeći kosinusnu teoremu.

$$U_{MN}{}^2 = U_{R1}{}^2 + U_{R2}{}^2 - 2U_{R1}U_{R2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 60^2 + 80^2 - 2\cdot 60\cdot 80\cdot\cos(53{,}13 + 36{,}87) = 3600 + 6400 \Rightarrow$$

$$U_{MN} = 100[\text{V}].$$

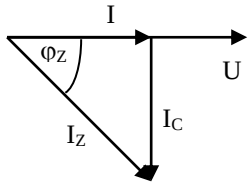
b) $R_2 = U_{R2}/I_2 = (0/10 = 8\ [\Omega]$; $X_C = U_C/I_2 = 60/10 = 6\ [\Omega]$; $X_L = U_L/I_1 = 80/20 = 4\ [\Omega]$.

c) $Z = U/I = 100/10\sqrt{5} = 2\sqrt{5}[\Omega]$.

Iz trougla otpora odredimo aktivnu i reaktivnu otpornost celog kola, koja iznosi:

$R = Z\cos\varphi = 2\sqrt{5}\cos 26{,}56° = 4\ [\Omega]$; $X = Z\cdot\sin\varphi = 2\sqrt{5}\ \sin 26{,}56 = 2\ [\Omega]$.

4.2.64. -----



Struja prijemnika (K isključeno) iznosi: $I_Z = U/Z$.

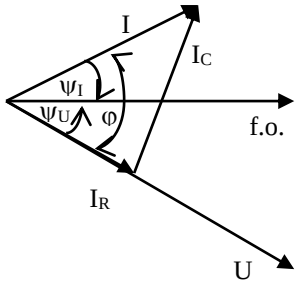
Iz uslova zadatka (I u fazi sa U), fazorski dijagram struja čine jedan pravougli trougao u kojem je ($\sin\varphi_Z = I_C/I_Z$):

$I_C = I_Z\cdot\sin\varphi_Z \Rightarrow$

$$\frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{Z}\cdot\frac{\omega L}{Z} \Rightarrow \omega C = \frac{\omega L}{Z} \Rightarrow C = \frac{L}{Z^2} = \frac{50\cdot 10^{-3}}{20^2} = 125\cdot 10^{-6}[\mathrm{F}] = 125[\mu\mathrm{F}].$$

Kako je $\varphi = 0 \Rightarrow \cos = 1$ ($\cos 0 = 1$).

4.2.65. -----



Fazni pomak između napona i struje iznosi:

$\varphi = \psi_U - \psi_I = -30° - 30° = -60°$ (kapac).

Iz fazorskog dijagrama (trougla struja), sledi:

$I = I_R + I_C$.

Kako je ovo pravougli trougao, struja kroz kalem iznosi:

$$I_R = I\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\cos 60^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}[\mathrm{A}],$$

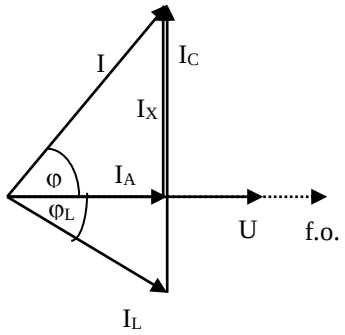
a kroz kondenyator: $I_C = I\sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{2}}\sin 60^\circ = \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}[\mathrm{A}]$.

Termogena otpornost je: $R = \frac{U}{I_R} = \frac{\frac{120}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{120\cdot 2}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 40[\Omega]$,

a kapacitivna otpornost: $X_C = \frac{U}{I_C} = \frac{\frac{120}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}} = \frac{120\cdot 2}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{80}{\sqrt{12}} = \frac{80}{2\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}[\Omega]$.

Kapacitet kondenzatora iznosi: $C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{4000\cdot\frac{40}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{16\cdot 10^4} = 0{,}1083\cdot 10^{-4} = 10{,}83\cdot 10^{-6}[\mathrm{F}] = 10{,}83[\mu\mathrm{F}]$.

4.2.66. -----



$\varphi_L = \arccos 0{,}8 = 36{,}87°$.

Struja kroz kalem je: $I_L = U/Z_L = 150/20 = 7{,}5$ [mA],

a kroz kondenzator . $I_C = U/X_C = 150/12 = 12{,}5$ [mA].

Kompleksni izraz ovih struja je:

$\underline{I}_L = 7{,}5\cdot e^{-j36{,}87} = 7{,}5[\cos(-36{,}87) + j\sin(-36{,}87)] = (6 - j4{,}5)$[mA];

$\underline{I}_C = 12{,}5\cdot e^{j90} = 12{,}5\cdot(\cos 90 + j\sin 90) = j12{,}5$ [mA].

Ukupna struja u kolu je:

$\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C = 6 - j4{,}5 + j12{,}5 = 6 + j8 \Rightarrow I = 10$ [mA].

Iz trougla struja ($\underline{I} = I_A + jI_X$) odredimo ugao φ, koji predstavlja fazni pomak između napona U i struje I:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{I_X}{I_A} = \mathrm{arctg}\frac{8}{6} = 53{,}13^\circ \quad (\text{kapacitivno}).$$

4.2.67. ----- $Z = 100\sqrt{10}\ \Omega$; **4.2.68.** ----- Paralelna veza R i C ($\underline{Z}_1 = -\mathrm{j}\,X_C$, $\underline{Z}_2 = R$);

4.2.69. ----- Kako prvi ampermetar pokazuje struju jednaku nuli, sledi: $\underline{I}_1 = I_2$, odnosno $\underline{U}_{ad} = \underline{U}_{bc} = \underline{I}_1\underline{Z}_2$.

Struja koju pokazuje drugi ampermetar iznosi: $\underline{I}_3 = \dfrac{\underline{U}_{bc}}{\mathrm{j}\omega L_3} = \dfrac{\underline{I}_1\underline{Z}_2}{\mathrm{j}\omega L_3}$,

gde je:

$$\underline{Z}_2 = \left(R_2 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}\right) = 50 - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 101{,}5\cdot 10^{-6}} = (50 - \mathrm{j}31{,}4)[\Omega],$$

$$\underline{Z}_1 = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) = 50 + \mathrm{j}2\pi\cdot 50\cdot 0{,}1 = (50 + \mathrm{j}31{,}4)[\Omega]$$

Struje I_1 i I_3 su jednake:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{100}{50 + \mathrm{j}31{,}4 + 50 - \mathrm{j}31{,}4} = 1[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_3 = \frac{(50 - \mathrm{j}31{,}4)\cdot 1}{\mathrm{j}2\pi\cdot 50\cdot 0{,}2} = (-0{,}5 - \mathrm{j}0{,}8)[\mathrm{A}].$$

Drugi ampermetar pokazuje struju koja je jednaka: $I_3 = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (-0{,}8)^2} = 0{,}943[\mathrm{A}]$.

4.2.70. ----- a) Ukupna impedansa kola iznosi:

$$\underline{Z} = R_1 + \mathrm{j}\omega L + \frac{R_2\cdot\left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}} = R_1 + \mathrm{j}\omega L + \frac{-\mathrm{j}\frac{R_2}{\omega C}}{\frac{R_2\omega C - \mathrm{j}1}{\omega C}} = R_1 + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{R_2}{R_2\omega C - \mathrm{j}1} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = R_1 + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{R_2(R_2\omega C + \mathrm{j}1)}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1} = R_1 + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{R_2^{\,2}\omega C}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1} + \frac{R_2}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \left(R_1 + \frac{R_2}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1}\right) + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{R_2^{\,2}\omega C}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1}\right).$$

Kako je u uslovu zadatka napon u fazi sa strujom, sledi da je impedansa kola jednaka samo realnom delu (imaginarni deo impedanse jednak je nuli). To će se ostvariti kada je:

$$\omega L = \frac{R_2^{\,2}\omega C}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1} \Rightarrow L = \frac{R_2^{\,2} C}{R_2\omega^2 C^2 + 1} \Rightarrow R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1 = \frac{R_2^{\,2} C}{L} \Rightarrow R_2^{\,2}\omega^2 C^2 = \frac{R_2^{\,2} C - L}{L} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{1}{R_2 C}\sqrt{\frac{R_2^{\,2} C - L}{L}} = \frac{1}{6\cdot 250\cdot 10^{-6}}\sqrt{\frac{6^2\cdot 250\cdot 10^{-6} - 300\cdot 10^{-6}}{300\cdot 10^{-6}}} = 666{,}67\sqrt{\frac{(9000 - 300)\cdot 10^{-6}}{300\cdot 10^{-6}}} = 666{,}67\cdot 5{,}385 \Rightarrow$$

$$\omega = 3590\left[\mathrm{rad}/\mathrm{s}\right] \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3590}{6{,}28} = 571{,}68[\mathrm{Hz}].$$

b) Ukupna impedansa, pri navedenom uslovu, jednaka je:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{R_2^{\,2}\omega^2 C^2 + 1} = 5 + \frac{6}{6^2\cdot 3590^{\,2}\cdot 250^{\,2}\cdot 10^{-12} + 1} = 5 + \frac{6}{28{,}999 + 1} = 5 + \frac{6}{29{,}999} \approx 5{,}2[\Omega].$$

Struja I u kolu je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{50}{5{,}2} = 9{,}615[\mathrm{A}].$$

4.2.71. ----- a) Iz uslova zadatka se vidi da je ukupna struja u faznoj osi (kasni za naponom za $\pi/4$). Kako se struje u kalemu i kondenzatoru međusobno oduzimaju (vektorski sabiraju), gde je $I_L = 3I_C$, ova njihova rezultanta mora biti po intezitetu jednaka sa strujom otpornika R_1 I_{R1} kako bi ukupna struja načinila jednakokraki pravougli trougao (I_{R1} je normalno na I_X, a $\underline{I} = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_X$, gde je $I_X = I_L - I_C$).

Početni uglovi za struje u kolu su:

- za I_{R1}: $\pi/4$ 8 u fazi sa U); - za I_L: $-\pi/4$ (kasni za U za $\pi/2$); - za I_C: $3\pi/4$ (prednjači U za $\pi/2$);
- za I: 0 (kasni za U za $\pi/4$)

Efektivne vrednosti navedenih struja su:

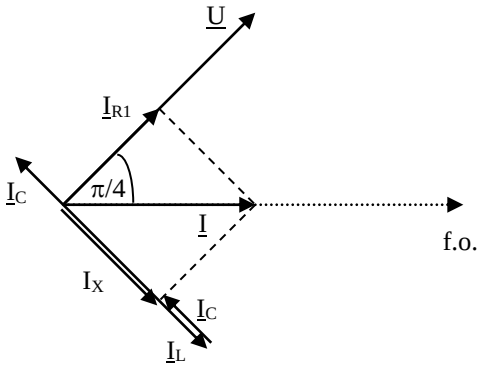
$I_{R1} = U/R_1 = 100/20 = 5$ [A],

$I_X \perp I_{R1}$ i $I_X = I_{R1} = 5$ [A] (kako bi struja I bila u faznoj osi),

$I = I_{R1}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\,[\mathrm{A}]$,

$I_L - I_C = I_X = 5$ [A] $\Rightarrow 3I_C - I_C = 5 \Rightarrow I_C = 2{,}5$ [A], $I_L = 7{,}5$ [A].

Ukupna struja I u kompleksnom obliku jednaka je: $\underline{I} = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_L + \underline{I}_C = 5$ [A].



b)

$$X_L = \omega L = \frac{U}{I_L} \Rightarrow L = \frac{U}{\omega I_L} = \frac{100}{1000 \cdot 7{,}5} = 0{,}013333\,[\mathrm{H}] = 13{,}333\,[\mathrm{mH}];$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I_C} \Rightarrow \omega C = \frac{I_C}{U} \Rightarrow C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{2{,}5}{1000 \cdot 100} = 25 \cdot 10^{-6}\,[\mathrm{F}] = 25\,[\mu\mathrm{F}].$$

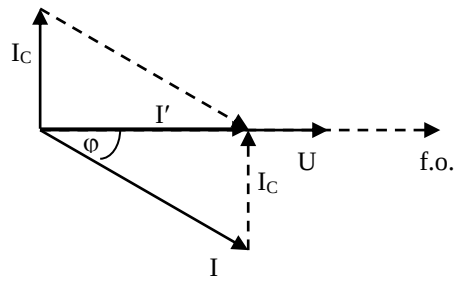
c) Zatvaranjem prekidača P smanjuje se termogena otpornost R (povećava aktivna provodnost G). Dakle, sada otpori R_1 i R_2 čine rezultantni otpor R ($R = R_1 \cdot R_2/(R_1+R_2)$ kroz koji će proteći veća struja I_R. Ova nova struja I_R, koja je u fazi sa naponom U, pomera rezultantnu struju iznad fazne ose (videti fazorski dijagram). To znači da fazni pomak između struje I i napona U nije više $\pi/4$, nego je on sada manji od ove vrednosti.

Zaključak je, **uključenjem prekidača P doći će do smanjenja faznog ugla φ**.

4.2.72. ----- b) $\varphi_2 = 30°$, c) I = 2,328 A; **4.2.73.** ----- i = 20 sin (314t – 45°);

4.2.74. ----- $I_1 = 10$ A, $I_2 = 7{,}07$ A, $I_3 = 7{,}07$ A; **4.2.75.** ----- $X_4 = 20\ \Omega$;

4.2.76. -----



Pre uključivanja prekidača struja kola I fazno kasni za naponom za ugao φ. Nakon uključenja prekidača struja I′ će biti u fazi sa naponom U kada se struja kondenzatora I_C poništi (izjednači) sa reaktivnom komponentom struje I ($I_X = I\sin\varphi$). Dakle,

$\underline{I}' = \underline{I} + \underline{I}_C = I[\cos(-30°) + j\sin(-30°)] + j\,I_C \Rightarrow$

$\underline{I}' = 24 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}) + jI_C = 12\sqrt{3} - j12 + jI_C \Rightarrow$

$I_C = 12$ A, jer I′ ima samo realnu vrednost ($\varphi' = 0$).

$$X_C = \frac{U}{I_C} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{12}{2\pi \cdot 50 \cdot 380} = 100{,}57 \cdot 10^{-6}\,[\mathrm{F}] = 100{,}57\,[\mu\mathrm{F}].$$

4.2.77. ----- Prema drugom Kirhofovom zakonu je: $\underline{U} + \underline{U}_5 - \underline{U}_C = 0 \Rightarrow \underline{U} = \underline{U}_C - \underline{U}_5$ (gde je plus pol za U_C u tački A) . U praksi je plus pol i za napon U_5 sa leve strane, jer se napon kalema suprostavlja naponu izvora, pa će mo u zadatku umesto napona U_5 računati sa naponom $-U_5$.

Da bi zadatak lakše rešili predhodno se nacrta fazorski dijagram. Iz datih podataka se vidi da ukupna struja fazno kasni za naponom $-U_5$ za $\pi/2$ (to su podaci vezani za savršeni kalem induktivne otpornosti X_{L1}). Ako ovu ukupnu struju I postavimo u faznu osu tada će napon $-U_5$ imati početni ugao $\pi/2$ (napon U_5 $-\pi/2$). Početni ugao za napon U_4 je $\pi/6$ (napon U_4 prednjači naponu U_5 za $2\pi/3$). Struja I_1 koja prolazi kroz kalem induktivne otpornosti X_{L2} kasni za naponom U_4 za $\pi/2$, te ona ima početni ugao od $-\pi/3$. Grana RX_{L2} ima dva pada napona (U_R i U_4) čiji je vektorski (kompleksni) zbir jednak naponu na paralelnoj vezi U_{AB}. Obaj napon na paralelnoj vezi je ujedno I napon na kondenzatoru, pa sledi:

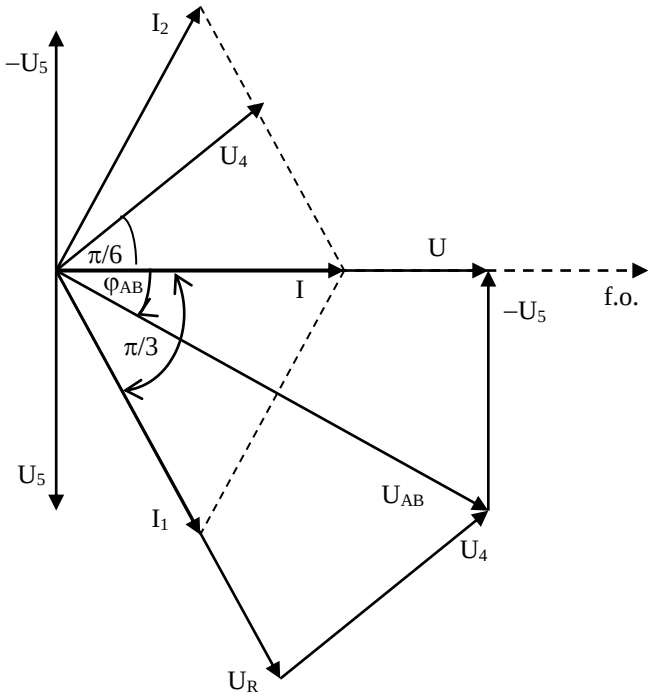
$$\underline{U}_C = \underline{U}_{AB} = \underline{U}_R + \underline{U}_4 \quad \text{(tačka A na većem potencijalu od tačke B)}$$

Kako je U_R u fazi sa I_1 a U_4 fazno prednjači za $\pi/2$, napon U_{AB} ima početni ugao φ_{AB} koji ujedno predstavlja fazni pomak između struje I i napona U_{AB}. Ugao φ_{AB} može da bude i pozitivan i negativan, jer se u paralelnom delu kola nalaze svi pasivni elementi (R;L i C). Pretpostavimo da je ugao φ_{AB} negativan (I prednjači naponu U_{AB}), pa će u tom slučaju napon U_{AB} imati početni ugao koji iznosi: $-\pi/3 < \varphi_{AB} < 0$.

Struja I_2 (struja kondenzatora) će fazno prednjačiti u odnosu na napon U_C za $\pi/2$, pa će i početni ugao za struju I_2 biti jednak: $\varphi_{AB} + \pi/2$.

Koristeći navedene činjenice nastaje fazorski dijagram napona i struja, prikazan na slici:

c) Sledeći vektori su međusobno normalni: $U_5 \perp I$; $U_4 \perp I_1$; $U_{AB} \perp I_2$.



a) Impedansa i napon između tačaka A i B za dato kolo je:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\left(3\sqrt{3} + ja\right)\cdot\left(-j2a\right)}{3\sqrt{3} + ja - j2a} = \frac{2a^2 - j6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3} - ja}$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = \left(3\sqrt{3} + ja\right)\cdot \underline{I}_1$$

Kompleksni izraz za struju I_1 je:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j\pi/3}.$$

Ukupna struja u kolu jednaka je:

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}=\frac{\left(3\sqrt{3}+ja\right)\cdot\underline{I}_1}{\dfrac{2a^2-j6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}-ja}}=\frac{\left(3\sqrt{3}+ja\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-ja\right)}{2a^2-j6\sqrt{3}a}\underline{I}_1=\frac{\left(27+a^2\right)\cdot\left(2a^2+j6\sqrt{3}a\right)}{4a^4+36\cdot3a^2}\underline{I}_1\Rightarrow$$

$$\underline{I}=\frac{54a^2+j162\sqrt{3}a+2a^4+j6\sqrt{3}a^3}{4a^2\cdot\left(a^2+27\right)}\underline{I}_1=\left[\frac{2a^2\left(a^2+27\right)}{4a^2\cdot\left(a^2+27\right)}+j6\sqrt{3}a\,\frac{a^2+27}{4a^2\cdot\left(a^2+27\right)}\right]\cdot\underline{I}_1\Rightarrow$$

$$\underline{I}=\left(\frac{1}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2a}\right)\cdot I_1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(\frac{1}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot I_1=\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}+j\frac{3\sqrt{3}}{4a}+\frac{9}{4a}\right)I_1\Rightarrow$$

$$\underline{I}=\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4a}\right)I_1+j\left(\frac{3\sqrt{3}}{4a}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)I$$

Kako je početni ugao za struju $\underline{I}$ jednak nuli, sledi da ona ima samo realnu vrednost. Dakle, imaginarna vrednost struje $\underline{I}$ je jednaka nuli, a to će se dogoditi kada je ispunjen sledeći uslov:

$$\frac{3\sqrt{3}}{4a}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0\,/\cdot4a\Rightarrow3\sqrt{3}=\sqrt{3}a\Rightarrow a=3.$$

Konstanta **a** ima vrednost od 3 Ω (a = 3 [Ω]).

b) Ako umesto konstante a uvrstimo 3 Ω, dobije se ukupna impedansa celog kola, koja iznosi:

$$\underline{Z}=j3+\frac{2\cdot3^2-j6\sqrt{3}\cdot3}{3\sqrt{3}-j3}=j3+\frac{18-j18\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-j3}=j3+\frac{\left(18-j18\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}+j3\right)}{3^2\cdot3+3^2}=j3+\frac{54\sqrt{3}+j54-j54\cdot3+54\sqrt{3}}{36}\Rightarrow$$

$$\underline{Z}=j3+\frac{108\sqrt{3}+j(54-162)}{36}=j3+3\sqrt{3}-j3=3\sqrt{3}.$$

Kako ukupna impedansa ima samo realnu vrednost ($\underline{Z}=3\sqrt{3}$ [Ω]), sledi da je ukupni napon U u fazi sa strujom. Fazni ugao φ = 0 .

4.2.78. ----- $\underline{I}$ = 1,23 $e^{j\,74°21'}$ A, $\underline{I}_1$ = 1,71 $e^{j\,4°54'}$ A, $\underline{I}_2$ = 1,72 $e^{j142°46'}$ A,
$\underline{U}_{AB}=\underline{U}_1=\underline{U}_2$ = (30 + j 45,6) V = 54,77 $e^{j\,56°22'}$ V, $\underline{U}_3$ = (189,6 – j 45,6) V;

4.2.79. ----- R_2 = 0,93 Ω , φ = 25,84° (kap.);

4.2.80. ----- a) $\underline{I}$ = (0,6 – j 1,2) A, $\underline{I}_R$ = – j 1,2 A, $\underline{I}_C$ = 0,6 A, $\underline{U}_{BC}$ = – j 120 V, b) φ = 63,43° (ind.);

4.2.81. ----- a) $\underline{U}_{BC}$ = (6 + j 8) V, $\underline{U}_{AB}$ = (10 – j 2) V, $\underline{U}$ = (16 + j 6) V, $\underline{U}_{DE}$ = (6 – j 8) V,
b) $\underline{I}_2$ = j 2 A, $\underline{I}$ = (2 + j 2) A,

4.2.82. ----- a) Impedansa trećeg prijemnika je: $Z_3=\sqrt{R_3^2+X_3^2}=\sqrt{2}\,[k\Omega]$,

pa je efektivna vrednost napona između tačaka 2 i 3 jednaka: $U_{23}=I_3Z_3=5\sqrt{2}\,[V]$.

Aktivna i reaktivna provodnost trećeg prijemnika (konduktansa i susceptansa) je:
$G_3=R_3/Z_3^2=0{,}5$ [mS] i $B_3=X_3/Z_3^2=0{,}5$ [mS].

Aktivna i reaktivna provodnost paralelne veze iznosi:
$G_{23}=G_2+G_3=0{,}6$ [mS] I $B_{23}=B_2+B_3=0{,}2$ [mS].

Admitansa paralelno vezanih grana je: $Y_{23}=\sqrt{G_{23}^2+B_{23}^2}=0{,}2\sqrt{10}\,[mS]$.

Efektivna vrednost struje prvog i četvrtog prijemnika (ukupne struje) je:
$I=I_{12}=I_{34}=U_{23}/Z_{23}=U_{23}\cdot Y_{23}=2\sqrt{5}\,[mA]$.

Aktivnu i reaktivnu otpornost možemo izračunati iz izraza:

$$G_1=\frac{R_1}{R_1^2+X_1^2}\Rightarrow R_1^2+X_1^2=\frac{R_1}{G_1},$$

$$B_1=\frac{X_1}{R_1^2+X_1^2}\Rightarrow R_1^2+X_1^2=\frac{X_1}{B_1}$$

$$\frac{R_1}{G_1}=\frac{X_1}{B_1}\Rightarrow X_1=\frac{B_1}{G_1}R_1\Rightarrow$$

$$R_1{}^2+\frac{B_1{}^2}{G_1{}^2}R_1{}^2=\frac{R_1}{G_1}\Rightarrow R_1\left(1+\frac{B_1{}^2}{G_1{}^2}\right)=\frac{1}{G_1}\Rightarrow\frac{G_1{}^2+B_1{}^2}{G_1{}^2}R_1=\frac{1}{G_1}\Rightarrow R_1=\frac{G_1}{G_1{}^2+B_1{}^2}=\frac{0{,}2}{\left(0{,}2^2+0{,}1^2\right)\cdot10^{-3}}=4[\mathrm{k\Omega}]$$

$$X_2=\frac{B_1}{G_1}R_1=\frac{B_1}{G_1{}^2+B_1{}^2}=2[\mathrm{k\Omega}].$$

Aktivna I reaktivna otpornost celog kola je:

$R = R_1 + R_{23} + R_4 = 11{,}5$ [kΩ] i $X = X_1 + X_{23} + X_4 = -1{,}5$ [kΩ].

Impedansa kola je:

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}=11{,}6[\mathrm{k\Omega}].$$

Efektivna vrednost ukupnog napona (napon između tačaka 1 i 4) je: $U = I\cdot Z = 52$ [V].

b) Fazna razlika između napona U i struje I je:

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{X}{R}=-7^\circ26'.$$

4.2.83. ----- Napon između tačaka 2 i 3 (na paralelnoj vezi) je:

$$U_{23}=I_2Z_2=50\cdot10^{-3}\cdot\sqrt{400^2+400^2}=20\sqrt{2}[\mathrm{V}].$$

Struja kondenzatora čija je otporanost X_1 iznosi: $I_1=\frac{U_{23}}{X_1}=\frac{20\sqrt{2}}{400}=50\sqrt{2}[\mathrm{mA}].$

Ako je početni ugao za napon U_{23} $\psi_{23}=0\Rightarrow \underline{U}_{23}=20\sqrt{2}\cdot e^{j0}[\mathrm{V}]$; $\underline{I}_1=50\sqrt{2}\ e^{j90^\circ}$ [mA] ; $\underline{I}_2=I_2\cdot e^{-j\varphi_{23}}$ [mA].

$$\varphi_{23}=\operatorname{arctg}\frac{400}{400}=45^\circ\Rightarrow\underline{I}_2=50\cdot e^{-j45^\circ}[\mathrm{mA}].$$

Ukupna struja kola je:

$$\underline{I}=\underline{I}_1+\underline{I}_2=50\sqrt{2}\cdot\left(\cos90^\circ+j\sin90^\circ\right)+50\cdot\left[\cos\left(-45^\circ\right)+j\sin\left(-45^\circ\right)\right]=j50\sqrt{2}+25\sqrt{2}-j25\sqrt{2}=25\sqrt{2}+j25\sqrt{2}$$

$$\underline{I}=\left(25\sqrt{2}+j25\sqrt{2}\right)[\mathrm{mA}]\Rightarrow I=50[\mathrm{mA}]$$

Kapacitivni otpor kondenzatora C iznosi: $X_C=\frac{U_{12}}{I}=\frac{10}{50\cdot10^{-3}}=200[\Omega].$

Kružna učestanost je: $\omega=\frac{1}{X_C\cdot C}=\frac{1}{200\cdot0{,}5\cdot10^{-6}}=10^4\left[\mathrm{rad/s}\right].$

Induktivni otpor kalema je: $X_L = \omega L = 300$ [Ω].

Kompleksni izrazi za napone na L i C iznose:

$$\underline{U}_{12}=\underline{U}_C=\underline{I}\cdot(-jX_C)=\left(25\sqrt{2}+j25\sqrt{2}\right)\cdot10^{-3}\cdot\left(-j200\right)=\left(5\sqrt{2}-j5\sqrt{2}\right)[\mathrm{V}]\ \text{ i}$$

$$\underline{U}_{34}=\underline{U}_L=\underline{I}\cdot jX_L=\left(25\sqrt{2}+j25\sqrt{2}\right)\cdot10^{-3}\cdot j300=\left(7{,}5\sqrt{2}+j7{,}5\sqrt{2}\right)[\mathrm{V}].$$

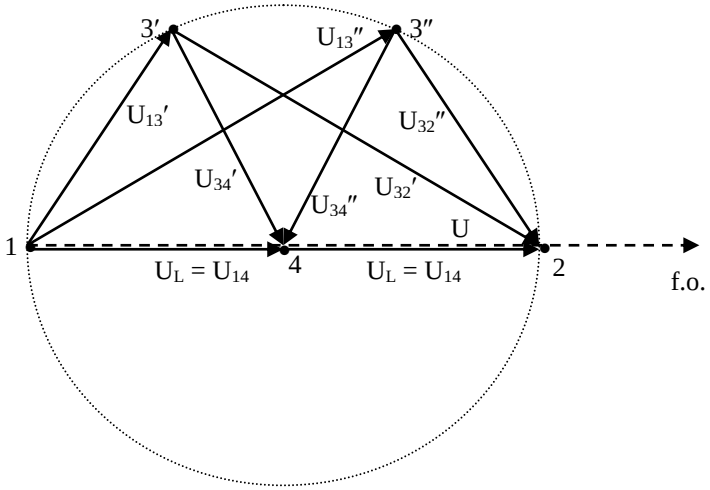
Ukupni napon kola (napon između tačaka 1 i 4) jednak je zbiru svih padova napona, pa je:

$$\underline{U}=\underline{U}_{14}=\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{34}=5\sqrt{2}-j5\sqrt{2}+20\sqrt{2}+7{,}5\sqrt{2}+j7{,}5\sqrt{2}=\left(17{,}5\sqrt{2}+j2{,}5\sqrt{2}\right)[\mathrm{V}].$$

Efektivna vrednost ukupnog napona je: $U=\sqrt{\left(17{,}5\sqrt{2}\right)^2+\left(2{,}5\sqrt{2}\right)^2}=25[\mathrm{V}].$

4.2.84. ----- $\Delta I_1 = -3{,}78$ A;

4.2.85. ----- Rešenje zadatka leži u analizi fazorskog dijagrama, koji je prikazan na slici:



Pošto su oba kalema u rednoj vezi kroz njih protiče ista jačina struje, pa će na njima da bude isti napon U_L koji iznosi: $U_L = U/2$, jer je $\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_L = 2\underline{U}_L \Rightarrow U = 2U_L$.

Kroz kranu 12 (RC) protiče struja I_{12} koja na otporniku R i kondenzatoru C stvara padove napona U_R i U_C. Ukupni napon je jednak: $\underline{U} = \underline{U}_{13} + \underline{U}_{32}$.

Napon U_{13} je u fazi sa strujom I_{12}, dok napon U_{32} kasni u odnosu na struju I_{12} za 90°. Promenom kondenzatora C menja se impedansa grane 12 što menja i struju I_{12}. To dovodi i do promene napona U_{13}, odnosno U_{32}. Ukupni napon je stalan i on je uvek jednak: $\underline{U} = \underline{U}_{13} + \underline{U}_{32}$. Za C = C′ tačka 3 će doći u poziciju 3′, a za C = C″ tačka 3 dolazi u poziciju 3″. Ova tačka 3 će u svim varijantama biti na krugu, jer je samo u tom slučaju $U_{13} \perp U_{32}$.

Napon U_{34} je jednak poluprečniku kruga, jer on spaja tačke 3 i 4. Kako je ovaj poluprečnik isti za sve vrednosti kondenzatora (i za tačku 3′ i za tačku 3″, kao i za sve ostale), očito je da je ovaj napon jednak:

$U_{34} = U/2 = U_L$.

Dakle, efektivna vrednost napona U_{34} ne zavisi od kapacitivnosti kondenzatora, pa priraštaj efektivne vrednosti napona U_{34} iznosi:

$$\Delta U_{34} = U_{34}' - U_{34} = 0 \Rightarrow \Delta U_{34} = U_{34}'' - U_{34} = 0.$$

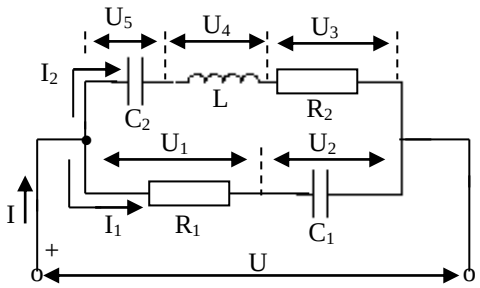
4.2.86. ----- Kako je $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ kolo sadrži dve paralelno vezane impedanse Z_1 i Z_2. Kroz impedansu Z_1 protiče struja I_1 koja stvara dva pada napona U_1 I U_2. Napon U_1 je u fazi sa I_1, što znači da se radi o otporniku R_1, dok U_2 kasni za I_1 za 90°, pa on vlada na savršenom kondenzatoru. Impedansa Z_1 kompleksno jednaka je:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} \quad \text{(redna veza } R_1 \text{ i } C_1 \text{)}.$$

Struja I_2 prolazeći kroz impedansu Z_2 stvara tri pada napona, i to:
U_3 koji je u fazi sa I_2 (otpor R_2), U_4 koji prednjači struji I_2 za 90° (kalem L) i U_5 koji kasni u odnosu na struju I_2 za 90° (kondenzator C_2). Sledi, impedansa Z_2 sadrži rednu vezu R_2 L i C_2 . Njen kompleksni izraz je:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_L - X_{C2}).$$

Električna šema za dato kolo prikazana je na slici:



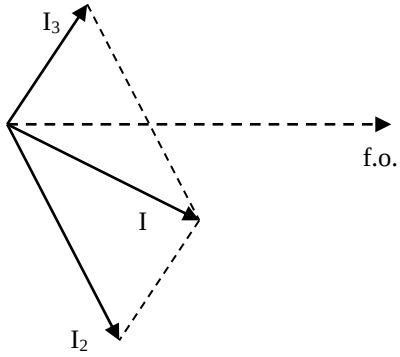
4.2.87. ----- $\underline{I}_1 = 5\cdot e^{-j36°52'} = 5[\cos(-36°52') + j\sin(-36°52')] = (4 - j3)$ [A].

$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_L = (6 + j8)$ [Ω]; $\underline{Z}_3 = R_3 - jX_C = (4 - j18)$ [Ω].

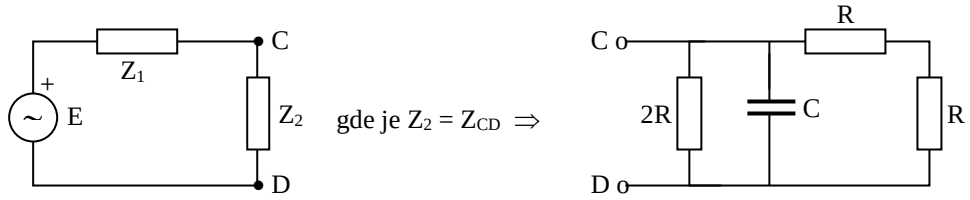
$$\underline{U}_{BC} = \underline{I}\cdot\underline{Z}_{23} = (4-j3)\cdot\frac{(6+j8)\cdot(4-j18)}{6+j8+4-j18} = (4-j3)\cdot\frac{24-j108+j32+144}{10-j10} = (62{,}6-j18{,}2)[\text{V}].$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{62{,}6-j18{,}2}{6+j8} = (2{,}3-j6{,}1)[\text{A}] \Rightarrow \underline{I}_2 = 6{,}52[\text{A}], \theta_2 = \text{arctg}\frac{-6{,}1}{2{,}3} = -69{,}34^o \Rightarrow \underline{I}_2 = 6{,}52\cdot e^{-j69{,}34^o}[\text{A}],$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = \frac{62{,}6-j18{,}2}{4-j18} = (1{,}7+j3{,}1)[\text{A}] \Rightarrow I_3 = 3{,}54[\text{A}], \theta_2 = \text{arctg}\frac{3{,}1}{1{,}7} = 61{,}26^o \Rightarrow \underline{I}_3 = 3{,}54\cdot e^{j61{,}26^o}[\text{A}],$$



4.2.88. ----- Celo kolo se može predstaviti ekvivalentnim kolom prema slici:



gde je:

$$\underline{Z}_1 = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R\cdot\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{R-j\frac{1}{\omega C}} = \frac{-j\frac{R}{\omega C}}{\frac{R\omega C - j1}{\omega C}} = \frac{-jR}{R\omega C - j1} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

(Otpornik 2R i redna veza R + R su paralelno vezani pa daju ukupni aktivni otpor između tačaka CD $R_{CD} = R$.)

Napon između tačaka A i B je:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_{AB}R = \frac{\underline{U}_{CD}}{2R}\cdot R = \frac{\underline{U}_{CD}}{2},$$

Napon između tačaka C i D je:

$$\underline{U}_{CD} = 2\underline{U}_{AB} = \underline{I}\cdot\underline{Z}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\cdot\underline{Z}_2 = \frac{\underline{E}}{R-j\frac{1}{\omega C}+\frac{R}{1+jR\omega C}}\cdot\frac{R}{1+jR\omega C} = \frac{\underline{E}R}{R+jR^2\omega C-j\frac{1}{\omega C}+1+R+R} \Rightarrow$$

$$2\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{E}R}{3R+j\left(R^2\omega C-\frac{1}{\omega C}\right)} \Rightarrow 2\cdot(1+j1) = \frac{6\cdot(1+j1)\cdot R}{3R+j\left(\omega R^2 C-\frac{1}{\omega C}\right)} \Rightarrow 2\cdot\left[3R+j\left(\omega R^2 C-\frac{1}{\omega C}\right)\right] = 6R \Rightarrow$$

$$j2\left(\omega R^2 C-\frac{1}{\omega C}\right) = 0 \Rightarrow \omega R^2 C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{R^2C^2} \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{1}{RC} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\cdot 10^3\cdot 10^{-9}} = 159{,}23\cdot 10^3[\text{Hz}] = 159{,}23[\text{kHz}].$$

4.2.89. -----

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \cdot \left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right)}{R_1 - j\frac{1}{\omega C_1}} = \frac{-j\frac{R_1}{\omega C_1}}{\frac{R_1\omega C_1 - j1}{\omega C_1}} = \frac{-jR_1}{R_1\omega C_1 - j1} = \frac{R_1}{1 + jR_1\omega C_1};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2\omega C_2}$$

Kako su naponi: $\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\cdot\underline{I}$; $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\,\underline{I}$, sledi:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_2} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}}{\underline{Z}_2\,\underline{I}} = 5 \Rightarrow \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 5\underline{Z}_2 \Rightarrow \underline{Z}_1 = 4\underline{Z}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{R_1}{1 + jR_1\omega C_1} = 4\frac{R_2}{1 + jR_2\omega C_2} \Rightarrow R_1 + jR_1R_2\omega C_2 = 4R_2 + j4R_1R_2\omega C_1$$

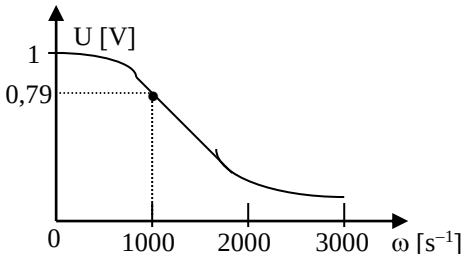
Izjednačavajući realne delove kompleksne jednačine sa leve I desne strane jednačine sledi: $R_1 = 4R_2$

Iz uslova zadatka $R_1 + R_2 = 1\ M\Omega \Rightarrow 4R_2 + R_2 = 1\ M\Omega \Rightarrow R_2 = 200\ k\Omega;\ R_1 = 800\ k\Omega.$

Na isti način se izjednače imaginarni delovi jednačine, pa je: $R_1R_2\omega C_2 = 4R_1R_2\omega C_1 \Rightarrow C_2 = 4C_1 \Rightarrow$

$$C_1 = \frac{C_2}{4} = 2{,}5[\mathrm{pF}].$$

4.2.90. -----



Za $\omega = 0 \Rightarrow X_C = \infty \Rightarrow Z = 2R \Rightarrow$

$E = U + U \Rightarrow U = E/2 = 1$ V.

Za $\omega = \infty \Rightarrow X_C = 0$ (kratka veza) pa je i napon U = 0 V.

Za $\omega = 1000\ s^{-1} \Rightarrow X_C = 10^6/1000\cdot 1 = 10^3\ \Omega = 1\ K\Omega$

$$\underline{Z} = 2 + \frac{2\cdot(-j1)}{2 - j1} = 2 + \frac{-j2(2 + j1)}{2^2 + 1^2} = 2 + \frac{2 - j4}{5} = 2{,}4 - j0{,}8$$

$$Z = \sqrt{2{,}4^2 + 0{,}8^2} = 2{,}53K\Omega \Rightarrow I = E/Z = 0{,}79\ \mathrm{mA} \Rightarrow$$

$$\underline{U} = \underline{I}\cdot\frac{2 - j4}{5}\cdot 10^3 = \underline{I}\cdot(0{,}4 - j0{,}8)\cdot 10^3 \Rightarrow U = 0{,}79\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}8^2}\cdot 10^3 = 0{,}79\ \mathrm{V}.$$

4.2.91. ----- Kako su napon kalema U_L i struja strujnog generatora I_g u fazi, sledi da će struja kalema I_L fazno zaostajati za strujom I_g za 90° (jer toliko zaostaje za U_L), pa je: $\psi_{I_L} = \psi_{I_g} - \frac{\pi}{2}$

Ako struju strujnog generatora I_g postavimo u faznu osu, tada će ona u kompleksnom obliku imati samo realni deo. U tom slučaju struja I_L u kompleksnom obliku ima imaginarni deo, i to negativno rešenje, jer kasni za I_g za 90° .

Dakle, $\underline{I}_g = 2\cdot 10^{-3}$ A, a $\underline{I}_L = \dfrac{\underline{U}}{R + jX_2} = \dfrac{\underline{I}_g\cdot\dfrac{-jX_1\cdot(R + jX_2)}{-jX_1 + R + jX_2}}{R + jX_2} = \dfrac{-jX_1}{R + j(X_2 - X_1)}\underline{I}_g$

$\underline{I}_L = \dfrac{-jX_1}{R + j(X_2 - X_1)}\cdot 2\cdot 10^{-3}$. Da bi struja I_L kompleksno bila šavršeno (samo) imaginarna, tada otpori X_1 i X_2 moraju biti međusobno jednaki (suprotnih predznaka). To znači da je $X_1 = X_2 = 100\ \Omega$. U ovom slučaju struja I_L iznosi:

$$\underline{I}_L = \frac{-j100}{200 + j(100 - 100)}\cdot 2\cdot 10^{-3} = \frac{-j0{,}2}{200} = -j0{,}001 = -j10^{-3},$$ što potvrđuje tačnost rešenja.

Rešenje zadatka je $X_1 = 100\ \Omega$. (Kompleksno $-j\,100$).

4.2.92. -----

$$U_R = U_L = I_R \cdot R = \frac{20\sqrt{6}\cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \cdot 100\sqrt{3} = 6 \text{ V}.$$

I_R i U_R (odnosno U_L, jer je $U_R = U_L$) su u fazi, dok će I_L da kasni za navedenim naponima za $\pi/2$.

Kako je $I_L = U_L / \omega L = 6 / 300 = 0{,}02$ A = 20 mA, sledi izraz za trenutnu vrednost struje I_L, koji glasi:

$$i_L = I_{Lm} \cos (\omega t + \pi/3 - \pi/2) = 20\sqrt{2} \cos (\omega t - \pi/6) \text{ [mA]}.$$

Ako izraze za trenutne vrednosti struja I_R i I_L prenesemo na sinusnu funkciju, tada oni imaju sledeći oblik:

$i_R = 20\sqrt{6} \sin (\omega t + 150°)$, odnosno $i_L = 20\sqrt{2} \sin (\omega t + 60°)$.

U kompleksnom obliku ove struje su jednake:

$$\underline{I}_R = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j150°} = 20\sqrt{3} \cdot e^{j150°} = 20\sqrt{3} \cdot (\cos 150° + j \sin 150°) = -30 + j10\sqrt{3}$$

$$\underline{I}_L = 20 \cdot e^{j60°} = 20 \cdot (\cos 60° + j \sin 60°) = 20 \cdot \left(0{,}5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 + j10\sqrt{3}\,.$$

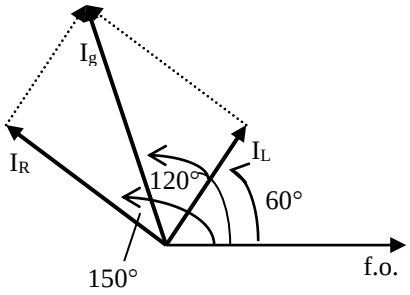
Ukupna struja, tj. struja idealnog strujnog generatora iznosi:

$$\underline{I}_g = \underline{I}_R + \underline{I}_L = -30 + j10\sqrt{3} + 10 + j10\sqrt{3} = -20 + j20\sqrt{3} \Rightarrow I_g = \sqrt{400 + 400 \cdot 3} = 40$$

Početna faza (početni ugao) struje i_g je:

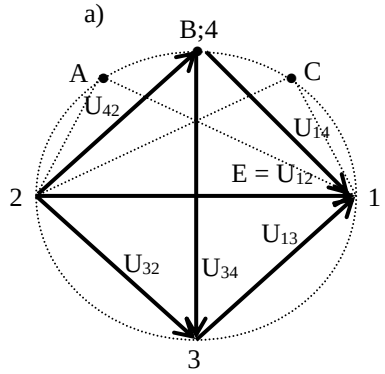
$\text{tg}\psi_g = \frac{20\sqrt{3}}{-20} = -\sqrt{3} \Rightarrow \psi_g = 60°$. Kako je ovo ugao u drugom kvadrantu, tada je struje I_g u odnosu na faznu osu pomerena za ugao $\psi_{Ig} = 180° - 60° = 120°$, pa je izraz za trenutnu vrednost struje i_g jednak:

$$i_g = 40\sqrt{2} \sin (\omega t + 120°) \text{ mA}.$$



4.2.93. -----

a)



Fazori $\underline{U}_{32}$ i $\underline{U}_{13}$ su istog inteziteta, jer su oni jednaki: $U_{32} = I_{RL}R = U_{13} = I_{RL}Z_L = E/\sqrt{2}$, i oni čine sa elektromotornom silom E jednakokraki pravougli trougao. Ako oko elektromotorne sile opišemo jedan krug, čiji je prečnik jednak intezitetu ems E, tada će pravci koje povučemo sa bilo koje tačke sa kruga na krajeve prečnika E zatvarati pravi ugao.

Kako nije poznat kapacitet C, samim tim nepoznata je kapacitivna otpornost, pa se zbog toga fazori $\underline{U}_{14}$ i $\underline{U}_{42}$ ne mogu nacrtati (ovi naponi nisu poznati). Jedino se zna ta tačka 4 mora biti na površini opisanog kruga (u tačkama A, B, C ... itd.).

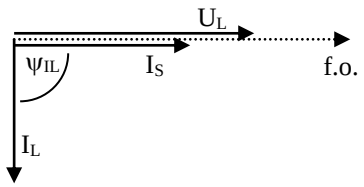
b) Tačka 4, koja se nalazi na površini opisanog kruga, nalazi se u tački B, jer će samo u tom slučaju rastojanje između tačaka 3 i 4 biti najveće, i ono će biti jednako prečniku kruga. Usled toga sledi da je:

$U_{24} = U_{14} = I_{RC}R = I_{RC}X_C \Rightarrow X_C = R = 200\ \Omega$.

c) Kako je U_{34} prečnik kruga, sledi da je: $U_{34} = E = 100$ V.

d) Fazna razlika između U_{34} i U_{12} iznosi $-\pi/2$, što se vidi sa fazorskog dijagrama.

4.2.94. ----



Struja I_L fazno kasni za naponom U_L (odnosno strujom I_S), što znači da će ova struja predstavljena kompleksno imati samo imaginarnu komponentu (početni ugao $\psi_{IL} = \pi/2$).

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{R_2 + jX_2} = \frac{\dfrac{jX_1 \cdot (R_2 + jX_2)}{jX_1 + R_2 + jX_2} \cdot \underline{I}_S}{R_2 + jX_2} = \frac{jX_1}{R_2 + jX_1 + jX_2} \cdot \underline{I}_S$$

Da bi struja I_L imala samo imaginarnu vrednost mora biti ispunjen uslov: $X_1 + X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = -X_2 = -100\ \Omega$.

$$\underline{I}_L = \frac{-j100}{200 + j100 - j100} \cdot 2 = -j1[\text{mA}] \Rightarrow I_L = 1\ [\text{mA}].$$

5.1. ----- Kolo se sastoji od paralelne veze G i B_L gde je: G = 0,2 S, B_L = 0,1 S. Čitaocu nije problem da tu vezu i nacrta. Admitanse paralelne veze kompleksno možemo napisati: $\underline{Y}_1 = G = 0{,}2$ S i $\underline{Y}_2 = -jB_L = -j1$ S. Kako su impedanse paralelne veze: $\underline{Z}_1 = R = 1/\underline{Y}_1 = 1/G$ i $\underline{Z}_2 = jX_L = 1/\underline{Y}_2 = 1/B_L \Rightarrow$
$R = 1/0{,}2 = 5\ \Omega$ I $X_L = 1/0{,}1 = 10\ \Omega$.

Ovu paralelnu vezu možemo pretvoriti u rednu. Ukupna impedansa kola je ujedno i impedansa transformisane redne veze koja iznosi:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0{,}2 - j0{,}1} = \frac{0{,}2 + j0{,}1}{0{,}2^2 + 0{,}1^2} = (4 + j2)[\Omega] \Rightarrow R' = 4[\Omega] \rightarrow X_L' = 2[\Omega].$$

Pretvaranjem paralelne veze RL ($R = 5\ \Omega$ i $X_L = 10\ \Omega$) u rednu R′L′ vezu dobije se: $R' = 4\ \Omega$ i $X_L' = 2\ \Omega$.

5.2. ----- $R_1 = 5\ \Omega$, $C_1 = 31{,}8$ nF;

5.3. ----- $\underline{Z} = R + jX_L = (6 + j8)\ \Omega \Rightarrow \underline{Y} = 1/\underline{Z} = (0{,}06 - j\,0{,}08)$ S $\Rightarrow G' = 0{,}06$ S, $B_L' = 0{,}08$ S, $R' = 1/G' = 1/0{,}06 = 16{,}7\ \Omega$, $X_L' = 1/B_L' = 1/0{,}08 = 12{,}5\ \Omega$;

5.4. ----- a) $R = Z\cos\varphi = 6\ \Omega$, $X_L = Z\sin\varphi = 29{,}39\ \Omega \Rightarrow \underline{Y} = 1/\underline{Z} \Rightarrow$

$$G = \frac{R}{Z^2} = \frac{6}{900} = 0{,}00667[S] \Rightarrow R' = 1/G = 150[\Omega]$$

$$B_L = \frac{X_L}{Z^2} = \frac{29{,}39}{900} = 0{,}0327[S] \Rightarrow X_L' = 1/B_L = 30{,}62[\Omega].$$

b) Ako impedanse $\underline{Z}_1 = R = 6\ \Omega$ i $\underline{Z}_2 = jX_L = j29{,}39$ vežemo paralelno dobiju se admitanse koje iznose: $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 1/6 = 0{,}167$ S i $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = -j0{,}034$ S.

Ukupna admitansa je: $Y_p = Y_1 + Y_2 = (0{,}167 - j0{,}034)$ S $\Rightarrow G_p = 0{,}167$ S, $B_{Lp} = 0{,}034$ S.

Za $\cos\varphi = 0{,}8 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 0{,}75$ ($\varphi = 36{,}87°$)

Kako je $\operatorname{tg}(-\varphi) = B/G \Rightarrow B = G\operatorname{tg}(-\varphi) \Rightarrow$

$B_p' = G_p \cdot \operatorname{tg}(-\varphi') = 0{,}167 \cdot (-0{,}75) = -0{,}125$ S $\Rightarrow B_p' = B'_x + B_{Lp}$

Kako je $|B_p'| > |B_{Lp}|$ a oba su negativna, tj induktivna, pa sledi da se induktivna provodnost treba povećati. To će se postići samo dodavanjem jednog kalema paralelno celoj vezi čija je admitansa jednaka:

$B_{xL}' = 0{,}125 - 0{,}034 = -0{,}091$ S. Induktivni otpor dodate admitanse je: $X_L' = 1/B_{xL}' = 10{,}99\ \Omega$.

Navedeni uslov ($\cos\varphi = 0{,}8$) se može ostvariti i dodavanjem kondenzatora. U ovom slučaju kondenzator se veže redno sa postojećim kalemom. Ukupni reaktivni otpor treba da je isti, a on iznosi:

$X' = 1/B_p' = 1/0{,}125 = 8\ \Omega$. Kako je $X_L = 29{,}39\ \Omega \Rightarrow X_L - X_C = 8 \Rightarrow X_C = X_L - 8 = 21{,}39\ \Omega$.

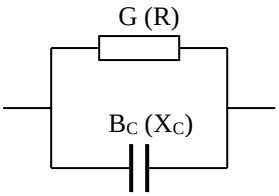
Čitaocu se preporučuje da proveri tačnost ovog rešenja.

5.5. ----- $R_p = 0{,}357$ MΩ, $C_p = 197$ pF;

5.6. ----- a)

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\frac{12{,}3 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60}}{\frac{123}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0}} = 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j60} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}(\cos 60° + j\sin 60°) = 0{,}1\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[mS] \Rightarrow$$

$$G = \frac{0{,}1}{2} \cdot 10^{-3}[S] = \frac{0{,}1}{2}[mS]; B_C = \frac{0{,}1\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-3}[S] = \frac{0{,}1\sqrt{3}}{2}[S].$$



$R = 1/G = 1/0{,}05 \cdot 10^{-3} = 10^3/0{,}05 = 20 \cdot 10^3\ [\Omega] = 20\ [k\Omega]$;
$X_C = 1/B_C = 1/0{,}0866 \cdot 10^{-3} = 11{,}547 \cdot 10^3\ [\Omega] = 11{,}547\ [k\Omega]$.

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{5000 \cdot 11{,}547 \cdot 10^3} = 17{,}32 \cdot 10^{-9}[F] = 17{,}32[nF].$$

b)

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{\frac{123}{\sqrt{2}}\cdot e^{j0}}{\frac{12,3}{\sqrt{2}}\cdot 10^{-3}\cdot e^{j60}}=10^{4}\cdot e^{-j60}[\Omega]=10^{4}\cdot[\cos(-60)+j\sin(-60)]=(5-j5\sqrt{3})[k\Omega]=(5-5\sqrt{3})\cdot 10^{3}[\Omega]\Rightarrow$$

$$R=5[k\Omega];\ X_C=5\sqrt{3}[k\Omega]\Rightarrow C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{5\cdot 10^{3}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 10^{3}}=23,09\cdot 10^{-9}[F]=23,09[nF].$$

Čitaocu nije problem da nacrta rednu vezu RC.

c) Da bi struja pod tačkom b bila u fazi sa naponom rednoj vezi RC treba dodati na red kalem čija je otpornost jednaka otpornosti kondenzatora ($X_L = X_C \Rightarrow \underline{Z} = R$).

Dakle, $X_L = 5\sqrt{3}$ [kΩ] $\Rightarrow$ $L = X_L/\omega = 5\sqrt{3}\cdot 10^3/5\cdot 10^3 = \sqrt{3}$ [H].

d) Da bi struja bila u fazi sa naponom kod paralelne veze RC (pod tačkom a), tada se na tu vezu mora dodati paralelno jedan kalem kroz koji će proticati ista struja kao i kroz kondenzator. U tom slučaju je ukupna struja jednaka struji kroz aktivni otpor ($\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L = \underline{I}_R$).

$$I_C = I_L \Rightarrow X_C = X_L = 11,547\cdot 10^3\ [\Omega] \Rightarrow L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{11,547\cdot 10^{3}}{5\cdot 10^{3}}=2,3094[H].$$

Čitaocu nije problem da nacrta ovu vezu, kao i da proveri tačnost rešenja zadatka.

5.7. ----- a) $I_R = 3$ A, $I_L = 4$ A, $I = 5$ A, b) $\underline{Z} = (7,2 + j\,9,6)\ \Omega$, $R' = 7,2\ \Omega$, $X_L' = 9,6\ \Omega$;

5.8. ----- impedanse u trouglu su jednake: $\underline{Z}_{12} = j\,100\ \Omega$, $\underline{Z}_{23} = -j\,83,3\ \Omega$, $\underline{Z}_{31} = -j\,83,3\ \Omega$,

Pretvaranjem trougla impedansi u zvezdu, sledi:

$$\underline{Z}_1=\frac{\underline{Z}_{12}\cdot\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\frac{j100\cdot(-j83,3)}{j100-j83,3-j83,3}=\frac{8330}{-j66,6}=j125,1[\Omega]=j\omega L_1\Rightarrow L_1=\frac{125,1}{\omega}=\frac{125,1}{5000}=0,025[H]=25[mH],$$

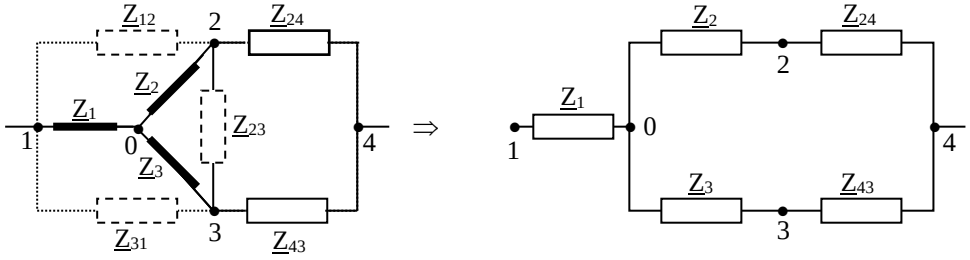
$$\underline{Z}_2=\frac{\underline{Z}_{12}\cdot\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\frac{j100\cdot(-j83,3)}{-j66,6}=j125,1=j\omega L_2\Rightarrow L_2=\frac{125,1}{\omega}=25[mH],$$

$$\underline{Z}_3=\frac{\underline{Z}_{23}\cdot\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\frac{(-j83,3)\cdot(-j83,3)}{-j66,6}=-j104,2[\Omega]=-j\frac{1}{\omega C}\Rightarrow C=\frac{1}{\omega\cdot 104,2}=1,919\cdot 10^{-6}[F]=1,919[\mu F].$$

Crtanje veze za impedanse Z_1, Z_2 i Z_3 je prepušteno čitaocu.

5.9. ----- $\underline{Z}_y = (5 - j\,5)\ \Omega$;

5.10. -----



Pretvarajući impedanse $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$ i $\underline{Z}_{31}$, koje su vezane u trougao u mpedanse $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_3$ sa vezom u zvezdu, sledi:

$$\underline{Z}_1=\frac{\underline{Z}_{12}\cdot\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\frac{(5+j3)\cdot(3+j2)}{5+j3+2+j2+3+j2}=\frac{(5+j3)\cdot(3+j2)}{10+j7}=(1,503+j0,856)[\Omega];$$

$$\underline{Z}_2=\frac{\underline{Z}_{12}\cdot\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\frac{(5+j3)\cdot(2+j2)}{10+j7}=(1,02+j0,885)[\Omega];$$

$$\underline{Z}_3=\frac{\underline{Z}_{23}\cdot\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\frac{(2+j2)\cdot(3+j2)}{10+j7}=(0,606+j0,58)[\Omega].$$

Ukupna impedansa kola je:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{04} = \underline{Z}_1 + \frac{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{24})\cdot(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{43})}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{24} + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{43}} = 1{,}503 + \text{j}0{,}865 + \frac{(11{,}02 + \text{j}6{,}885)\cdot(6{,}606 + \text{j}4{,}58)}{17{,}626 + \text{j}11{,}465} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = (5{,}636 + \text{j}3{,}611)[\Omega] \Rightarrow Z = 6{,}694 \Rightarrow \varphi = \text{arctg}\frac{3{,}611}{5{,}636} = 32{,}65^{\text{o}} \Rightarrow \underline{Z} = 6{,}694\cdot e^{\text{j}32{,}65^{\text{o}}}\,[\Omega].$$

5.11. ----- a) $\underline{Z}_{AB} = (\,2{,}7 + \text{j}\,4{,}82\,)\,\Omega$, $\underline{Z}_{CD} = (\,5 + \text{j}\,9\,)\,\Omega$; **5.12.** ----- a) $L_3 = 0{,}2$ mH, b) $I_5 = 5{,}782$ A;

5.13. ----- Vitstonov most će biti u ravnoteži kada su tačke C i D na istom potencijalu ($U_{CD} = 0 \Rightarrow I_5 = 0$).
Kako je prema drugom Kirhofovom zakonu: $\underline{U}_{CD} + \underline{I}_1\underline{Z}_1 - \underline{I}_2\underline{Z}_2 = 0 \Rightarrow 0 + \underline{I}_1\underline{Z}_1 - \underline{I}_2\underline{Z}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{I}_2\underline{Z}_2$.
Na isti način se dobije da je: $\underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{I}_4\underline{Z}_4$.
Prema tome, most će biti u ravnoteži kada je: $\underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{I}_2\underline{Z}_2$ i $\underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{I}_4\underline{Z}_4$.
Istovremeno su i struje: $\underline{I}_1 = \underline{I}_3$, odnosno $\underline{I}_2 = \underline{I}_4$, jer je struja $\underline{I}_5 = 0$.
Deobom navedenih jednačina dobije se opšti uslov ravnoteže Vitstonovog mosta:

$$\frac{\underline{I}_1\underline{Z}_1}{\underline{I}_3\underline{Z}_3} = \frac{\underline{I}_2\underline{Z}_2}{\underline{I}_4\underline{Z}_4} \Rightarrow \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4} \Rightarrow \underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3$$

$$\boxed{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4} \Rightarrow \underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3} \quad \text{….. uslov ravnoteže mosta.}$$

Iz uslova ravnoteže mosta sledi:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}\underline{Z}_3 = \frac{2\cdot 5}{-\text{j}40} = \text{j}0{,}25[\Omega].$$

5.14. ----- a) $R_4 = 10\ \Omega$, $L_4 = 1$ H, b) $\underline{I} = (\,1{,}66 - \text{j}\,0{,}265\,)$ A;

5.15. ----- Iz uslova ravnoteže:
$\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3 \Rightarrow R_1\cdot[\,R_4 + \text{j}(\,\omega L - 1/\omega C\,)] = R_2R_3 \Rightarrow R_1R_4 + \text{j}R_4(\,\omega L - 1/\omega C\,) = R_2R_3$,
dobiju se dve jednačine:

$R_1R_4 = R_2R_3$ ..... (1) i $\omega L = 1/\omega C$ ..... (2)

Ove dve jednačine (nastale zbog izjednačavanja realnih delova kao i imaginarnih kompleksne jednačine) čine uslov ravnoteže Vitstonovog mosta za naizmeničnu struju:
Iz prve jednačine je:

$$R_4 = R_2R_3/R_1 = 150\cdot 10/30 = 5\ [\Omega],$$

a iz druge:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} = 2^2\pi^2 f^2 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}025\cdot 400\cdot 10^{-12}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10}\cdot 10^{-6}} = 50{,}355\cdot 10^3[\text{Hz}] = 50{,}355[\text{kHz}].$$

5.16. ----- a)

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 2R_2\ ;\ \underline{Z}_2 = R_2\ ;\ R_3 = R_4 = R;\ C_3 = C_4 = C;\ \underline{Z}_3 = R_3 - \text{j}\frac{1}{\omega C_3} = R\ - \text{j}\frac{1}{\omega C};$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{R_4\cdot\left(-\text{j}\frac{1}{\omega C_4}\right)}{R_4 - \text{j}\frac{1}{\omega C_4}} = \frac{-\text{j}\frac{R}{\omega C}}{\frac{R\omega C - \text{j}1}{\omega C}} = \frac{-\text{j}R}{R\omega C - \text{j}1} = \frac{R}{1 + \text{j}R\omega C}.$$

$$\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3 \Rightarrow 2R_2\cdot\frac{R}{1+\text{j}R\omega C} = R_2\left(R - \text{j}\frac{1}{\omega C}\right) \Rightarrow 2R = \left(R - \text{j}\frac{1}{\omega C}\right)\cdot(1 + \text{j}R\omega C) \Rightarrow$$

$$2R = R - \text{j}\frac{1}{\omega C} + \text{j}R^2\omega C + R \Rightarrow \text{j}\frac{1}{\omega C} = \text{j}R^2\omega C \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{R^2C^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC} = 2\pi f \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{6{,}28\cdot 80\cdot 4\cdot 10^{-6}} = 497{,}6[\text{Hz}].$$

b)

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_1 + R_2} = \frac{240}{160 + 80} = 1[\text{A}].$$

Zbog ravnoteže mosta, mora biti zadovoljen uslov:
$\underline{Z}_1\underline{I}_1 = \underline{Z}_3\underline{I}_3$, pa je:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\underline{I}_1 = \frac{160}{80 - \text{j}\dfrac{1}{\omega C}} \cdot 1 = \frac{160}{80 - \text{j}\dfrac{1}{6{,}28 \cdot 497{,}6 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{160}{80 - \text{j}80} = (1 + \text{j}1)[\text{A}].$$

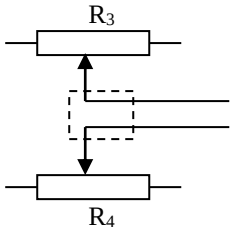
Ukupna struja kola je:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = 1 + 1 + \text{j}1 = (2 + \text{j}1)\ [\text{A}].$$

c) Kako je, pri datim podacima ($R_1 = 2R_2$; $R_3 = R_4 = R$; $C_3 = C_4 = C$), uslov ravnoteže:

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad (\text{ samo jedna jednačina })$$

most se dovodi u ravnotežu promenom otpora R ili promenom kondenzatora C. Pošto je $R_3 = R_4 = R$, treba istovremeno menjati oba otpora kako bi njihovi otpori u svakom trenutku bili jednaki. Isti je slučaj ako se most dovodi u ravnotežu promenom kondenzatora C (C_3 i C_4 se istovremeno menjaju). Kako je to ostvareno kod otpornika vidi se iz same slike. Na sličan način se to radi i sa promenom kapaciteta kondenzatora.



5.17. ----- $\underline{Z}_1 = (1{,}7 - \text{j}\,2{,}7)\ \Omega$, $R_1 = 1{,}7\ \Omega$, $C_1 = 1{,}175$ mF, $\underline{I} = (27 - \text{j}\,8)$ A, $I = 28{,}3$ A;

5.18. ----- a) Iz uslova ravnoteže mosta sledi:

$$\underline{Z}_4 = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} = \frac{40 \cdot 40}{10 + \text{j}80} = (2{,}462 - \text{j}19{,}692)[\Omega].$$

Kako je pri ravnoteži mosta struja u impedansi Z_5 jednaka nuli, tada se impedansa Z_5 može isključiti iz kola (beskonačan otpor) ili umesto nje uspostavimo kratku vezu (otpor jednak nuli). Uzima se ona varijanta koja jednostavnije rešava zadatak. Ako Z_5 isključimo iz kola, ukupna impedansa kola je:

$$\underline{Z}_e = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\cdot(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} + \underline{Z} = \frac{(10 + \text{j}80 + 40)\cdot(40 + 2{,}462 - \text{j}19{,}692)}{50 + \text{j}80 + 42{,}462 - \text{j}19{,}692} + 50 + \text{j}60 = \frac{3698{,}46 + \text{j}2412{,}36}{92{,}462 + \text{j}60{,}308} + 50 + \text{j}60 \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_e = (90 + \text{j}60)[\Omega].$$

a) Struje u kolu iznose:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_e} = \frac{154}{90 + \text{j}60} = (1{,}185 - \text{j}0{,}79)[\text{A}];$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E} - \underline{I}\cdot\underline{Z}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{154 - (1{,}185 - \text{j}0{,}79)\cdot(50 + \text{j}60)}{10 + \text{j}80 + 40} = \frac{47{,}385 - \text{j}31{,},59}{50 + \text{j}80} = (-0{,}018 - \text{j}0{,}603)[\text{A}];$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{47{,}385 - \text{j}31{,}59}{40 + 2{,}462 - \text{j}19{,}692} = (1{,}202 - \text{j}0{,}186)[\text{A}];$$

$$\underline{I}_5 = 0[\text{A}].$$

c) Fazorski dijagram napona i struja se ostavlja čitaocu da sam nacrta, čime će proveriti tačnost rešenja zadatka (Preporučuje se razmera: 1 cm = 5 A = 10 V).

6.1. ----- P = 41,6 W, Q = 515 VAR, S = 520 VA;

6.2. ----- $\varphi = \theta_U - \theta_I = 60° - 0° = 60°$; $\cos\varphi = R/Z \Rightarrow Z = R/\cos\varphi = 40\sqrt{3}/0{,}5 = 80\sqrt{3}$ [Ω] ;

$I = U/Z = 200/80\sqrt{3} = 2{,}5\sqrt{3}/3$ [A]; $P = I^2R = \left(\frac{2{,}5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot 40\sqrt{3} = \frac{6{,}25\cdot 3}{9}\cdot 40\sqrt{3} = \frac{250\sqrt{3}}{3}$ [W];

$S = UI = 200\cdot 2{,}5\sqrt{3}/3 = \frac{500\sqrt{3}}{3}$ [VA];

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\left(\frac{500\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{250\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{250000\cdot 3 - 62500\cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{562500}{9}} = 250\,[\text{VAr}]$$

$$Q = \omega L\cdot I^2 \Rightarrow L = \frac{Q}{\omega I^2} = \frac{250}{1000\cdot\left(\frac{2{,}5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{250}{1000\cdot\frac{6{,}25\cdot 3}{9}} = \frac{250\cdot 3}{6250} = 0{,}12\,[\text{H}] = 120\,[\text{mH}]$$

6.3. ----- P = 500 W, $\cos\varphi = 0{,}384$;

6.4. ----- I = 10 A, R = 4 Ω;

6.5. ----- C = 125 μF, I = 4 A, P = 480 W, Q = 640 VAR, S = 800 VA, $\cos\varphi = 0{,}6$;

6.6. ----- P = 1 500 W, Q = 2 000 VAR, S = 2 5000 VA;

6.7. ----- I = 10 A, P = 0 W, Q = 5 200 VAR, S = 5 200 VA, $\cos\varphi = 0$;

6.8. ----- P = 0 W, Q = 8 000 VAR, S = 8 000 VA; **6.9.** ----- P = 2 000 W, $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$;

6.10. ----- P = 0 W, Q = 2 200 √2 VAR, S = 2 200 √2 VA;

6.11. ----- P = 250 W, Q = 250 √3 VAR, S = 500 VA;

6.12. ----- $\eta = \frac{P_K}{P_U} = \frac{UI\cos\varphi}{P_U} \Rightarrow P_U = \frac{UI\cos\varphi}{\eta} = \frac{220\cdot 10\cdot 0{,}9}{0{,}8} = 2475\,[\text{W}]$

6.13. ----- I = 2 A;

6.14. ----- P = 2 000 W, Q = 1 500 VAR, S = 2 500 VA, R = 4 Ω, X_C = 5 Ω; **6.15.** ----- U = 62,5 V;

6.16. -----

$$\text{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{Q\cdot t}{P\cdot t} = \frac{W_L}{W_J} = \frac{84500}{86000} = 0{,}9826 \Rightarrow \varphi = 44{,}5^o \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}713;$$

$$Q = \frac{W_L}{t} = \frac{84500}{280} = 301{,}786\,[\text{KVAr}];\ P = \frac{W_J}{t} = \frac{86000}{280} = 307{,}143\,[\text{KW}];$$

$$\cos\varphi' = 0{,}9 \Rightarrow \varphi' = 25{,}84 \Rightarrow \text{tg}\varphi' = 0{,}484 \rightarrow \text{tg}\varphi' = \frac{Q'}{P} \Rightarrow Q' = P\text{tg}\varphi' = 307{,}143\cdot 0{,}484 = 148{,}756\,[\text{KVAr}]$$

Da bi se kompenzirala reaktivna snaga od 301,786 KVAr (kalem), ovom kolu se dodaje kondenzator na kojem će se javiti ukupna reaktivna snaga od: $Q_C = Q - Q' = 301{,}786 - 148{,}756 = 153{,}03$ [KVAr].

Kompenzirana reaktivna energija (oduzeta kondenzatorom) iznosi:

$W_C = Q_C\cdot t = 153{,}03\cdot 280 = 42848{,}4$ [KVArh].

6.17. ----- Aktivna snaga drugog motora je: $P_2 = P - P_1 = 1,8 - 0,98 = 0,82$ [kW].
Ukupna reaktivna snaga se dobije iz izraza: $\text{tg}\,\varphi = Q/P \Rightarrow Q = P\cdot\text{tg}\,\varphi$.
$\varphi = \text{arc cos}\,0,8 = 36,87° \Rightarrow Q = 1,8\cdot\text{tg}\,36,87° = 1,35$ [kVAr].
Kako je faktor snage prvog motora $\cos\varphi_1 = 0,74 \Rightarrow \varphi_1 = 42,27° \Rightarrow \text{tg}\,\varphi_1 = 0,909$, pa je reaktivna snaga prvog motora: $Q_1 = P_1\cdot\text{tg}\varphi_1 = 0,98\cdot 0,909 = 0,891$ [kVAr].
Reaktivna snaga drugog motora je: $Q_2 = Q - Q_1 = 1,35 - 0,891 = 0,459$ [kVAr].
$\text{tg}\,\varphi_2 = Q_2/P_2 = 0,459/0,82 = 0,56 \Rightarrow \varphi_2 = 29,24° \Rightarrow \cos\varphi_2 = 0,873$.

6.18. ----- S = UI = 9 [VA], Q = S/2 = 4,5[VAr], $P = \sqrt{S^2 - Q^2} = \sqrt{81 - 20,25} = 7,79[\text{W}]$.
$P = RI^2 \Rightarrow$
Aktivni otpornik je :$R = P/I^2 = 7,79/0,05^2 = 3\,117,7$ [Ω],
Kapacitivni otpor kondenzatora iznosi: $X_C = 1/\omega C = U_C/I = 2400$ [Ω] , pa je
kapacitet kondenzatora : $C = 1/\omega X_C = 1/2\cdot 3,14\cdot 500\cdot 2400 = 133\cdot 10^{-9}$ [F] = 133 [nF].
Ukupni reaktivni otpor (reaktansa) je: $X = X_L - X_C = Q/I^2 = 4,5/0,05^2 = 1800$ [Ω].
Induktivni otpor kalema je: $X_L = \omega L = X + X_C = 1800 + 2400 = 4200$ [Ω], a
induktivnost kalema: $L = X_L/\omega = 1,34$ [H].

6.19. ----- Struja sijalice je $I_S = P_S/U_S = 25/24 = 1,042$ [A].
Ako sijalicu priključimo preko kondenzatora na napon U′ = 250 V, kroz sijalicu će proticati srednja vrednost naizmenične struje (koja se dobije iz količine naelektrisanja). Kako se kondenzator naizmenično puni, odnosno prazni preko sijalice, na njemu je prisutan napon od 250 V (kada je kondenzator potpuno pun $\Rightarrow I_C = 0$, pa na njemu vlada napon od 250 V). Kako će kroz sijalicu proticati srednja vrednost naizmenične struje koja iznosi $I_S = 1,042$ A , njena maksimalna i efektivna vrednost je:

$$I_S = \frac{2I_m}{\pi} \Rightarrow I_m = \frac{I_S\cdot\pi}{2} = 1,635[\text{A}] \Rightarrow I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 1,16[\text{A}].$$

U kolu je sada prisutan samo kapacitivni otpor kondenzatora, jer termogeni otpor sijalice čini samo kratku vezu (otpor sijalice je zanemarljiv u odnosu na otpor kondenzatora $\Rightarrow$ napon $U_C = U$), pa je kapacitet kondenzatora jednak:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I} \Rightarrow C = \frac{I}{U_C\omega} = \frac{1,16}{250\cdot 314} = 14,775\cdot 10^{-6}[\text{F}] = 14,775[\mu\text{F}].$$

6.20. ----- $\underline{Y} = (0,035 - j\,0,047)$ S;

6.21. ----- a) $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10[\Omega] \Rightarrow \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{6}{10} = 0,6.$ $\cos\varphi = 0,6$

b)

$$\underline{Z}_1 = \frac{(6+j8)\cdot(-jX_C)}{6+j8-jX_C} = \frac{(8X_C - j6X_C)}{6+j(8-X_C)}\cdot\frac{6-j(8-X_C)}{6-j(8-X_C)} = \frac{48X_C - j36X_C - j64X_C - 64X_C + j8X_C{}^2 + 6X_C{}^2}{6^2 + (8-X_C)^2} \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{6X_C{}^2 - 16X_C}{36 + (8-X_C)^2} + j\frac{8X_C{}^2 - 100X_C}{36 + (8-X_C)^2} \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} \Rightarrow \underline{Z}_1 = R_1$$

Kako kompleksna impedansa ima samo realnu komponentu, sledi:
$8X_C^2 - 100X_C = 0 \Rightarrow 8X_C^2 = 100X_C \Rightarrow X_C = 12,5$ [Ω].
Kapacitet kondenzatora je:

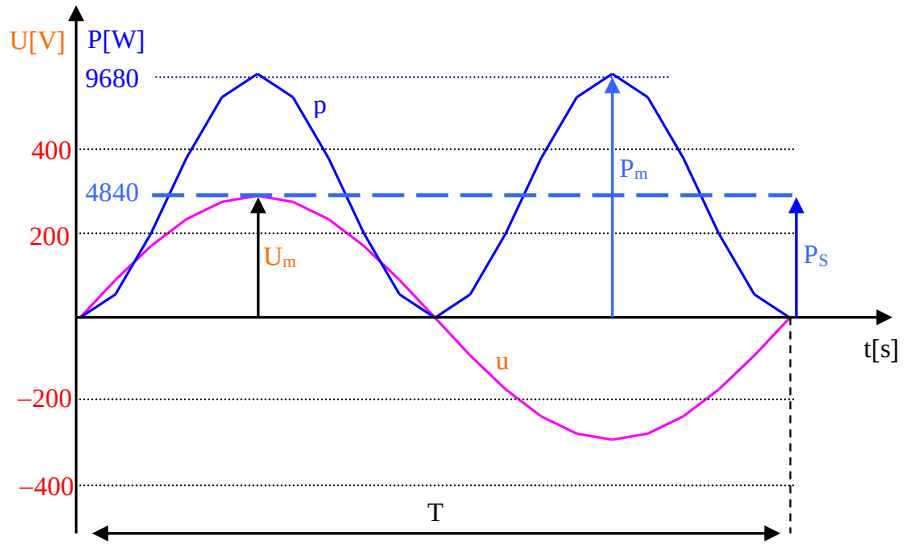
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314\cdot 12,5} = 254,78\cdot 10^{-6}[\text{F}] = 254,78[\mu\text{F}].$$

Čitaocu se preporučuje da proveri tačnost rešenja.

6.22. ----- $P = U\cdot I = U^2/R = 220^2/10 = 4\,840$ [W];
Sa vremenskog dijagrama, prema slici, vidimo da je srednja vrednost naizmenične snage jednaka polovini maksimalne snage. Ova srednja vrednost naizmenične snage predstavlja aktivnu snagu u kolu naizmenične struje, jer se u ovom kolu i nalazi samo aktivni otpornik R.
Dakle, srednja vrednost naizmenične snage, kod savršenog kola, je:

$$P = P_m/2 = U_mI_m/2 = U\sqrt{2}\cdot I\sqrt{2}/2 = UI = 4\,840\ [\text{W}].$$

Ova snaga je uvek veća od nule, zbog I^2R (u pojedinim trenutcima P = 0) i ona se naziva aktivnom snagom.



6.23. ----- P = 141,4 W;

6.24. ----- cos φ = 0,316, P = 1 000 W, Q = 3 000 VAR, U = 315,9 V;

6.25. ----- cos φ = P/S $\Rightarrow$ P = S·cosφ = 100·0,75 = 75 [kW]; Q = S·sin φ = 100·0,6614 = 66,14 [kVAr];
S′ = U·I′ = U·I = S = 100 [kVA], jer su napon i struja jednaki za oba slučaja.
P′ = S′·cos φ′ = 100·0,9 = 90 [kW]; Q′ = S′·sin φ′ = 100·0,4359 = 43,59 [kVAr]; ΔQ_L = Q – Q′ = 22,55 [kVAr].

6.26. ----- S = P/cos φ = 25/0,64 = 34,375 [kVA]; I = S/U = 34375/220 = 156,25 [A];
$P_V = I^2R_V = 156{,}25^2 \cdot 0{,}1 = 2\,441{,}4$ [kW].
S′ = P/cos φ′ = 22/0,8 = 27,5 [kVA], jer je P′=P. I′ = S′/U = 125 [A]; $P_V' = I'^2R_V = 125^2 \cdot 0{,}1 = 1\,561$ [W].

6.27. ----- Ukupna reaktivna snaga prigušnica je: $Q = Q_1 + Q_2 = 12$ [VAr];
Pojedinačne prividne snage prigušnice su: $S_1 = U_1 \cdot I = 3{,}7$ [VA]; $S_2 = U_2 \cdot I = 15$ [VA].
Aktivne snage prigušnice iznse:

$$P_1 = \sqrt{S_1^{\,2} - Q_1^{\,2}} = \sqrt{3{,}7^2 - 3^3} = 2{,}166\,[\mathrm{W}];$$

$$P_2 = \sqrt{S_2^{\,2} - Q_2^{\,2}} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,[\mathrm{W}].$$

Ukupna aktivna snaga je: $P = P_1 + P_2 = 14{,}166$ [W].

Ukupna prividna snaga prigušnica je: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{14{,}166^{\,2} + 12^{\,2}} = 18{,}565\,[\mathrm{VA}]$.

Faktor snage kola (obeju prigušnica) je: cos φ = P/S = 14,166/18,565 = 0,763.

Induktivne otpore prigušnica odredimo iz izraza za reaktivnu snagu ($Q = I^2 \cdot X$), i oni iznose.

$X_{L1} = Q_1/I^2 = 3$ [Ω] i $X_{L2} = Q_2/I^2 = 9$ [Ω].

Napon izvora je: U = S/I = 18,565/1 = 18,565 [V].

6.28. ----- Kako je snaga mreže jednaka: $P_m = P_1 + P_2 = 5$ [MW],
aktivna snaga drugog paralelno vezanog generatora je: $P_2 = P_m - P_1 = 5 - 3 = 2$ [MW].
Reaktivna snaga prvog generatora je (tg φ = Q/P) je: $Q_1 = P_1 \cdot \mathrm{tg}\,\varphi_1 = 3 \cdot \mathrm{tg}\,45° = 3$ [kVAr].
Ukupna reaktivna snaga kola je: $Q = P \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = 5 \cdot \mathrm{tg}\,36{,}87° = 3{,}75$ [kVAr],
Reaktivna snaga drugog generatora je: $Q_2 = Q - Q_1 = 3{,}75 - 3 = 0{,}75$ [kVAr].
Fazni pomak između napona i struje kod drugog generatora je: $\varphi_2 = \mathrm{arc\ tg}\,Q_2/P_2 = \mathrm{arc\ tg}\,0{,}75/2 = 20{,}56°$.
Faktor snage (cos φ_2) drugog generatora iznosi: cos $\varphi_2 = 0{,}936$ (induktivno).

6.29. ----- a) $\cos\varphi = P/S \Rightarrow S_1 = P_1/\cos\varphi_1 = 4{,}6$ [kVA] $\Rightarrow$ $\underline{S}_1 = P_1 = 4{,}6$ [kVA],
$\underline{S}_2 = S_2\cdot(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_2) = 11{,}5\cdot(0{,}62 + j0{,}784) = (7{,}13 + j\,9{,}02)$ [kVA],
$\underline{S}_3 = S_3\cdot(\cos\varphi_3 - j\sin\varphi_3) = 6{,}9\cdot(0{,}8 - j0{,}6) = (5{,}52 - j\,4.14)$ [kVA],
b) $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = (17{,}25 + j4{,}88)$ [kVA] $\Rightarrow$ P = 17,25 [kW]; Q = 4,88 [kVAr],

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{17{,}25^2 + 4{,}88^2} = 17{,}927\,[\text{kVA}].$$

6.30. ----- P = 400 W, Q = 0 VAR, S = 400 VA;

6.31. ----- $I_m = U_m/\omega L = \sqrt{2}\,U/\omega L = 282/314\cdot 0{,}1 = 8{,}98$ [A]; $W_{Lm} = LI_m^2/2$ $W_{Lmax} = 0{,}1\cdot 8{,}98^2/2 = 4{,}033$ [J].

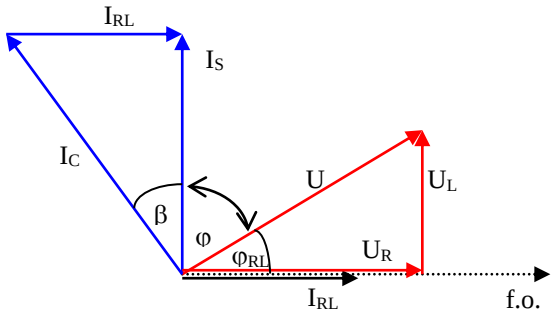
6.32. ----- $X_C = 1/\omega C = 40$ [Ω]; $X_L = \omega L = 30$ [Ω], $\underline{Z}_1 = R_L + jX_L = (40 + j30)$ [Ω], $\underline{Z}_2 = -jX_C = -j40$ [Ω].

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(40 + j30)\cdot(-j40)}{40 + j30 - j40} = (37{,}65 - j30{,}59)\,[\text{A}] \Rightarrow Z = 48{,}51\,[\Omega]$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{\sqrt{100^2 + 100^2}}{48{,}51} = 2{,}92\,[\text{A}].$$

Aktivna snaga kola je: $P = I^2R_e = 2{,}92^2\cdot 37{,}65 = 319{,}99$ [W];

6.33. ----- Zadatak se najjednostavnije može rešiti koristeći fazorski dijagram. Pri crtanju fazorskog dijagrama pretpostavimo da je struja koja prolazi kroz rednu vezu RL u faznoj osi. U tom slučaju je sa strujom I_{RL} napon U_R u fazi, a napon U_L fazno prednjači struji I_{RL} za 90°. Struja I_S je u fazi sa U_L, pa su ovi vektori paralelni (početni ogao im iznosi 90°). Struja kondenzatora I_C fazno prednjači svom naponu U (napon na paralelnoj vezi) za 90°.



Napon U će fazno da prednjači struji I_{RL} za ugao φ_{RL}, koji iznosi:

$$\varphi_{RL} = \arccos\frac{R}{Z_{RL}} = \arccos\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \arccos\frac{200}{\sqrt{200^2 + 100^2}} = \arccos 0{,}894 = 29{,}57^\circ.$$

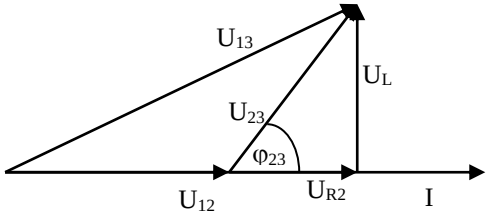
Pošto je $I_S \perp I_{RL} \Rightarrow \varphi + \varphi_{RL} = 90° \Rightarrow \varphi = 90° - \varphi_{RL} = 60{,}43°$, gde je φ fazni pomak između I_S i U.
Zbog toga što je $I_C \perp U \Rightarrow \varphi + \beta = 90° \Rightarrow \beta = \varphi_{RL} = 29{,}57°$.
Iz pravouglog trougla struja I_S, I_{RL} i I_C ($\underline{I}_S = \underline{I}_{RL} + \underline{I}_C$), odredimo struje I_C i I_{RL}, gde je:

$$\cos\beta = \frac{I_S}{I_C} \Rightarrow I_C = \frac{I_S}{\cos\beta} = \frac{2\cdot 10^{-3}}{0{,}894} = 2{,}24\cdot 10^{-3}\,[\text{A}] = 2{,}24\,[\text{mA}],$$

$$\sin\beta = \frac{I_{RL}}{I_C} \Rightarrow I_{RL} = I_C\cdot\sin\beta = 2{,}24\cdot 10^{-3}\cdot\sin 29{,}57^\circ = 10^{-3}\,[\text{A}] = 1\,[\text{mA}]$$

Napon na paralelnoj vezi kondenzatora i RL je: $U = I_{RL}\cdot Z_{RL} = 10^{-3}\sqrt{200^2 + 100^2} = 223{,}61\cdot 10^{-3}\,[\text{V}]$.
Kapacitivna otpornost kondenzatora je: $X_C = U/I_C = 223{,}61\cdot 10^{-3}/2{,}24\cdot 10^{-3} \approx 100$ [Ω].
Kompleksna snaga strujnog generatora je: $\underline{S}_{Sg} = \underline{U}\cdot\underline{I}_S^*$;
gde je:
$\underline{U} = 223{,}61\cdot(\cos 29{,}57° + j\sin 29{,}57°)\cdot 10^{-3} = (200 + j110{,}35)\cdot 10^{-3}$ [V];
$\underline{I}_S = j2\cdot 10^{-3}$ [A] $\Rightarrow$ $\underline{I}_S^* = -j2\cdot 10^{-3}$ [A].
$\underline{S}_{Sg} = (200 + j110{,}35)\cdot 10^{-3}\,(-j2\cdot 10^{-3}) = (0{,}22 - j\,0{,}4)\cdot 10^{-3}$ [VA] = (0,22 – j0,4) [mVA].

6.34. -----



Pri crtanju fazorskog dijagrama postavimo struju I u faznu osu. Napon U_{12} je u fazi sa strujom I, dok će napon U_{23} prednjačiti struji I za ugao φ_{23}. Ako ovaj napon U_{23} razložimo na njegove komponente U_{R2} i U_L (kateta pravouglog trougla), nastaju naponi U_{R2} i U_L. Napon U_{R2} je u fazi sa I, što će reći da se radi o naponu na termogenom otporniku R_2, dok U_L prednjači struji I za 90°, a to znači da je to napon na savršenom kalemu L.

a) Iz fazorskog dijagrama sledi:

$$U_{13}^2 = (U_{12} + U_{R2})^2 + U_L^2 = (U_{12} + U_{23}\cos\varphi_{23})^2 + U_{23}^2 \sin^2\varphi_{23} \Rightarrow$$

$$U_{13}^2 = U_{12}^2 + 2U_{12}U_{23}\cos\varphi_{23} + U_{23}^2\cos^2\varphi_{23} + U_{23}^2\sin^2\varphi_{23} \Rightarrow$$

$$U_{13}^2 = U_{12}^2 + 2U_{12}U_{23}\cos\varphi_{23} + U_{23}^2(\cos\varphi_{23} + \sin\varphi_{23}) = U_{12}^2 + U_{23}^2 + 2U_{12}U_{23}\cos\varphi_{23} \Rightarrow$$

$$\cos\varphi_{23} = \frac{U_{13}^2 - U_{12}^2 - U_{23}^2}{2U_{12}U_{23}} = \frac{145^2 - 100^2 - 100^2}{2\cdot 100\cdot 100} = 0{,}05125 \Rightarrow \varphi_{23} = 87{,}06^\circ$$

$$U_{R2} = U_{23}\cos\varphi_{23} = 100\cdot 0{,}05125 = 5{,}125\,[\mathrm{V}],$$

$$U_L = U_{23}\sin\varphi_{23} = 100\cdot 0{,}99869 = 99{,}869\,[\mathrm{V}].$$

b) $I = P_{R2}/U_{R2} = 5/5{,}125 = 0{,}976$ [A].

c) $R_2 = U_{R2}/I = 5{,}125/0{,}976 = 5{,}251$ [Ω];
$X_L = \omega L = U_L/I = 99{,}869/0{,}976 = 102{,}325$ [Ω] $\Rightarrow$ $L = X_L/\omega = 102{,}325/314 = 0{,}326$ [H] = 326 [mH].

6.35. ----- Impedansa pre zatvaranja prekidača je iznosila: $\underline{Z} = 4 + j3$, a posle zatvaranja $\underline{Z}' = 4 - j3$
Kako su moduli impadanse isti ista je i struja u kolu. Pored modula impedansi, isti su i moduli aktivne i reaktivne otpornosti. Usled toga, ostale su iste i aktivne snage, odnosno reaktivne. Dakle, P i Q je konstantno.

6.36. ----- W_C $Q\cdot U_m/2 = 2U^2C/2 = 380^2\cdot 80\cdot 10^{-6} = 11{,}5$ [J]
NAPOMENA: Kondenzator se puni sve dok napon izvora raste, tj. dok on ne dostigne maksimalnu vrednost. Zbog toga se kod energije kondenzatora za napon uzima U_m (količinu naelektrisanja na pločama kondenzatora stvara maksimalni napon).

6.37. ----- snage su ostale nepromenjene;

6.38. ----- a) $L = X_L/\omega = 40 / 314 = 0{,}127$ [H].
Primenom formule (videti Popravak faktora snage), po kojoj se računa kapacitet paralelno vezanog kondenzatora, kojim se maksimalno popravlja faktor snage ($\cos\varphi = 1$), kapacitet kondenzatora iznosi:

$$C = \frac{L}{Z_1^2} = \frac{L}{R^2 + X_L^2} = \frac{0{,}127}{64 + 1600} = 76{,}56\cdot 10^{-6}\,[\mathrm{F}] = 76{,}56\,[\mu\mathrm{F}].$$

b) Impedansa pre uključenja prekidača je iznosila: $Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 40{,}792\,[\Omega]$,
a posle zatvaranja prekidača ($X_C = 1/\omega C = 1/314\cdot 76{,}56\cdot 10^{-6} = 41{,}598$ [Ω]):

$$\underline{Z}_2 = \frac{(R + jX_L)\cdot(-jX_C)}{R + jX_L - jX_C} = \frac{(8 + j40)\cdot(-j41{,}598)}{8 + j40 - j41{,}598} = 208\,[\Omega].$$

Odnos između struja iznosi:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{Z_1}}{\frac{U}{Z_2}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{208}{40{,}792} = 5{,}1$$

6.39. -----

$$\frac{P}{Q}=\frac{I_R{}^2R}{I_L{}^2X_L}=\frac{\left(\frac{U}{R}\right)^2R}{\left(\frac{U}{X_L}\right)^2X_L}=\frac{\frac{U^2}{R}}{\frac{U^2}{X_L}}=\frac{X_L}{R}\Rightarrow\frac{R}{X_L}=\frac{Q}{P}=\frac{4}{3}$$

6.40. ----- C = 100 μF;

6.41. ----- Kako vatmetar meri aktivnu snagu P ($P = RI^2$) on će pokazati najveću snagu kada se u kolu ostvari najveća struja. T o će se dogoditi kod najmanje impedanse Z (I = U/Z), a ona je najmanja kod rezonanse, tj. kada je $\omega L = 1/\omega C \Rightarrow L = 1/\omega^2 C = 7{,}97$ mH.

Vatmetar će izmeriti snagu koja iznosi: $P=I^2R=\left(\frac{U}{Z}\right)^2R=\frac{U^2}{R^2}R=\frac{U^2}{R}=\frac{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2}{10}=\frac{100}{2\cdot10}=5[\mathrm{W}].$

6.42. ----- a) $\underline{Z} = -j(X_{C1} + X_{C2}) = -jX_C$; $P = I^2R_e = 0$ ($R_e = 0$);
I = U/Z ; Z = X. Kako je impedansa Z opala, struja u kolu će da raste. Dakle, $P_W = 0$ W, I_A raste;
b) Uz pretpostavku da je $X_{C2} = 0$ (kratka veza) impedansa će ponovo da opadne. To dovodi do porasta struje, koja povećava aktivnu snagu na otporniku R. Odgovor na dato pitanje je: P_W raste, I_A raste;
Ako nakon proboja kondenzatora dođe do prekida kola (što se u praksi takođe događa), tada je struja u kolu jednaka nuli, pa će i vatmetar i ampermetar sada pokazivati nulu.

6.43. ----- $\underline{S}=\underline{U}\underline{I}^*\Rightarrow\underline{I}^*=\frac{\underline{S}}{\underline{U}}=\frac{10-j20}{100}=(0{,}1-j0{,}2)[\mathrm{kA}]\Rightarrow\underline{I}=(0{,}1+j0{,}2)[\mathrm{kA}]=(100+j200)[\mathrm{A}].$

Očito je, iz kompleksnog izraza za napon i struju, da struja prednjači naponu. To znači da se kolo sastoji od redne veze RC. Da bi struja bila u fazi sa naponom njena reaktivna komponenta treba da se poništi. To će se dogoditi ako rednoj vezi RC paralelno dodamo kalem kroz koji će da protiče struja $I_L = 200$ A ($\underline{I}_L = -j200$ A).
Kako je $I_L = U/X_L \Rightarrow X_L = U/I_L = 100/200 = 0{,}5$ [Ω].

6.44. ----- $P_W = U_W I_W \cos\varphi_W$.

$$\underline{Z}=R_1+\frac{(R_2-jX_C)\cdot jX_L}{R_2-jX_C+jX_L}=10+\frac{(20-j20)\cdot j40}{20-j20+j40}=10+40=50[\Omega]\Rightarrow I=\frac{U}{Z}=\frac{100}{50}=2[\mathrm{A}].$$

Napon na kalemu (paralelnoj vezi kalema i R_2 i X_C je:

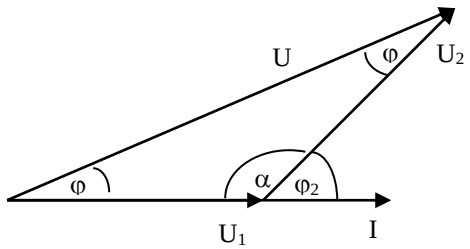
$$\underline{U}_L=\underline{I}\frac{(R_2-jX_C)\cdot jX_L}{R_2-jX_C+jX_L}=2\cdot40=80[\mathrm{V}].$$

Struja koja prolazi kroz vatmetar je ujedno i struja koja prolazi kroz otpore R_2 i X_C, pa je ona jednaka:

$$\underline{I}_W=\frac{\underline{U}_L}{R_2-jX_C}=\frac{80}{20-j20}=(2+j2)[\mathrm{A}]\Rightarrow I_W=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}[\mathrm{A}]\Rightarrow\underline{I}_W=2\sqrt{2}\cdot e^{j45^\circ}.$$

Napon na vatmetru (primenom II Kirhofovog zakona) je:
$\underline{U}_W = \underline{I}R_1 + \underline{I}_W R_2 = 2\cdot10 + (2 + j2)\cdot20 = 20 + 40 + j40 = (60 + j40)$ [V] $\Rightarrow U_W = 72{,}11$;
$\mathrm{tg}\,\psi_{Uw} = 40/60 \Rightarrow \psi_{Uw} = 33{,}69° \Rightarrow U_W = 72{,}11\cdot e^{j33{,}69°}$.
Fazni pomak između napona na vatmetru U_W i struje vatmetra I_W je jednak razlici njihovih početnih uglova:
$\varphi_W = \psi_{Uw} - \psi_{Iw} = 33{,}69° - 45° = -11{,}31°$.
Vatmetar će pokazivati aktivnu snagu, koja iznosi:
$P_W = U_W I_W \cos\varphi_W = 72{,}11\cdot2{,}82\cdot\cos(-11{,}31°) = 199{,}4$ [W].

6.45. -----



Primenom kosinusne teoreme, ili razlaganjem napona U_2 na njegove komponente, odredimo ugao φ_2. On je jednak:

$$\cos\varphi_2 = \frac{U^2 - U_1{}^2 - U_2{}^2}{2U_1U_2} = 0{,}5 \Rightarrow \varphi_2 = 60^o.$$

Struja u kolu iznosi: $I = U_1/R_1 = 10/2 = 5$ [A].
Vidimo iz fazorskog dijagrama da naponi čine jedan jednakokraki trougao u kojem su uglovi jednaki:
$\alpha = 180° - \varphi_2 = 120° \Rightarrow 2\varphi + \alpha = 180° \Rightarrow \varphi = 30°$.
Reaktivna snaga kola je:
$Q = UI\sin\varphi = 10\sqrt{3}\cdot 5\sin 30° = 25\sqrt{3}$ [VAr].

6.46. ----- a) $R = 694{,}2\ \Omega$, $C = 0{,}53\ \mu F$, b) $P = 87$ W, $Q = 50{,}4$ VAR;

6.47. ----- a) $i = 212/6 \sin(\omega t + 60°)$ A, b) $P = 1{,}87$ KW, $Q = 3{,}22$ KVAR, $S = 3{,}77$ KVA;

6.48. ----- a) Aktivna snaga koju daje generator potrošaču će biti maksimalna kada se javi rezonansa u celom kolu (struja je tada maksimalna), i kada se izjednače termogeni otpori generatora sa otporom potrošača.

Usled prvog uslova struja u kolu je maksimalna, pa je i aktivna snaga maksimalna. Drugi uslov je poznat iz OET_1, gde pri izjednačavanju otpora generatora sa otporom potrošača (prilagođavanje otpora maksimalnoj snazi generatora) generator daje maksimalnu snagu.

Prvi uslov će se postići kada je: $X_g = -X$, pa je $\underline{Z}_e = R_g + R$ (uslov rezonanse). Dakle, reaktivni otpori su međusobno jednaki, s tim da je jedan induktivan a drugi kapacitivan.

Drugi uslov je: $R_g = R$.

Oba ova uslova su sadržana u izjednačavanju impedansi u kompleksnom obliku na sledeći način:

$$\underline{\mathbf{Z}}_g = \underline{\mathbf{Z}}^*$$

Aktivna snaga koju maksimalno daje generator, pri navedenim uslovima iznositi:

$$P = I^2R = \left(\frac{E}{Z_e}\right)^2 R = \left(\frac{E}{R_g + R}\right)^2 R = \left(\frac{E}{2R}\right)^2 \cdot R = \frac{E^2}{4R}[W];$$

b) $\eta = P/P' = 0{,}5$ (50 %), jer je ukupna aktivna snaga koju proizvodi generator jednaka: $P' = P + P_g = 2P$.

6.49. -----

$$\underline{Z} = \frac{(3+j4)\cdot 10}{3+j4+10} = (2{,}973 + j2{,}162)[\Omega] \Rightarrow R_e = 2{,}973[\Omega];\ X_e = 2{,}162[\Omega];\ Z = \sqrt{2{,}973^2 + 2{,}162^2} = 3{,}676[\Omega].$$

Ukupna struja ($P = I^2R_e$) je : $I^2 = P/R_e = 1\,100/2{,}973 = 370 \Rightarrow I = 19{,}235$ [A].
Napon na celoj vezi iznosi: $U = I\cdot Z = 19{,}235\cdot 3{,}676 = 70{,}71$[V].
Struje po granama su: $I_1 = U/Z_1 = 70{,}71/5 = 14{,}14$[A] i $I_2 = U/Z_2 = 7{,}071$ [A].
Pojedinačne snage za svaki od otpornika iznose:
$P_3 = I_1^2\cdot 3 = 600$ [W]; $Q_L = I_1^2\cdot 4 = 800$ [VAr] i $P_{10} = I_2^2\cdot 10 = 500$ [W].

6.50. ----- $R = 3\ \Omega$, $L = 12{,}7$ mH;

6.51. ----- $R = 2{,}6\ \Omega$, $X_C = 2{,}6\ \Omega$ ($C = 64{,}1\ \mu F$);

6.52.----- $R_V = \rho l/S = 0{,}05$ [Ω]; $X_C = 1/\omega C = 10{,}616$ [Ω].

Pre zatvaranja prekidača:

$$\underline{Z} = R_V + R + jX = (1{,}75 + j1{,}4)[\Omega] \Rightarrow Z = 2{,}241[\Omega] \Rightarrow \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{1{,}75}{2{,}241} = 0{,}781$$

a posle zatvaranja:

$$\underline{Z}' = R_V + \frac{(R + jX)\cdot(-jX_C)}{R + jX - jX_C} = 0{,}05 + \frac{(1{,}7 + j1{,}4)\cdot(-j10{,}616)}{1{,}7 + j1{,}4 - j10{,}616} = 0{,}05 + \frac{14{,}862 - j18{,}047}{1{,}7 - j9{,}216} = (2{,}231 + j1{,}21)[\Omega] \Rightarrow$$

$$Z = 2{,}538[\Omega];\ R_e' = 2{,}231[\Omega];\ X_e' = 1{,}21[\Omega] \Rightarrow \cos\varphi' = \frac{2{,}231}{2{,}538} = 0{,}879.$$

Ukupna struja u prvom slučaju je: I = U/Z = 102,63 [A], a u drugom slučaju: I′ = U/Z′ = 90,62 [A].
Snaga gubitaka u napojnom vodu, kada je prekidač isključen je:

$$P_V = I^2 R_V = 526{,}67 \text{ [W]},$$

A kada je uključen je:

$$P_V' = I'^2 R_V = 90{,}62^2 \cdot 0{,}05 = 410{,}62.$$

Promena snage gubitaka u napojnom vodu je:

$$\Delta P_V = P_V - P_V' = 116{,}05 \text{ [W]}.$$

6.53.----- Admitanse po granama su:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{4 + j3} = (0{,}16 - j0{,}12)[S];$$

$$P_2 = I_2^{\,2} R_2 = \left(\frac{U}{R_2}\right)^2 \cdot R_2 = \frac{U^2}{R_2} = U^2 G_2 \Rightarrow \underline{Y}_2 = G_2 = \frac{P_2}{U^2} = \frac{15000}{120^2} = 1{,}042[S];$$

$$S_3 = UI_3 = U \cdot \frac{U}{Z_3} = U^2 Y_3 = \frac{P_3}{\cos\varphi_3} = \frac{60}{0{,}8} = 75[\text{kVA}] \Rightarrow Y_3 = \frac{S_3}{U^2} = \frac{75000}{120^2} = 5{,}208[S] \rightarrow \varphi_3 = 36{,}87^\circ \Rightarrow$$

$$\underline{Y}_3 = 5{,}208 \cdot e^{-j36{,}87^\circ} = 5{,}208\left[\cos(-36{,}87^\circ) + j\sin(-36{,}87^\circ)\right] = 5{,}208(0{,}8 - j0{,}6) = (4{,}167 - j3{,}125)[S].$$

Ukupna admitansa kola (pre uključenja kondenzatora) je:

$\underline{Y}_{123} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0{,}16 - j0{,}12 + 1{,}042 + 4{,}167 - j3{,}125 = (5{,}369 - j3{,}245)$ [S].

Ukupna admitansa nakon uključenja kondenzatora iznosi:

$\underline{Y} = \underline{Y}_{123} + \underline{Y}_C = 5{,}369 - j3{,}245 + jB_C = 5{,}369 + j(B_C - 3{,}245)$ [S].

Kako ukupna admitansa nakon uključenja kondenzatora ima samo realnu vrednost (cos φ = 1), sledi:

$$B_C = 1/X_C = \omega C = 3{,}245 \Rightarrow C = \frac{3{,}245}{\omega} = \frac{3{,}245}{314} = 10{,}33 \cdot 10^{-3}[F] = 10{,}33[mF].$$

6.54. ----- $Z = U/I = 120/2{,}4 = 50$ [Ω]; $P = I^2R \Rightarrow R = P/I^2 = 200/2{,}4^2 = 34{,}72$ [Ω]

$$Z = \sqrt{R^2 + (2X_C - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^{\,2}} \Rightarrow X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = 35{,}98[\Omega] \Rightarrow C = \frac{1}{X_C \omega} = 88{,}52 \cdot 10^{-6}[F] = 88{,}52[\mu F];$$

$X_L = 2X_C = 71{,}96$ [Ω] $\Rightarrow$ $L = X_L/\omega = 0{,}229$ [H] = 229 [mH].

6.55. ----- $P = 1{,}3Q \Rightarrow I^2R = 1{,}3\, I^2X \Rightarrow R = 1{,}3\, X \Rightarrow X = R/1{,}3 = 9{,}23$ [Ω] $\Rightarrow$ $Z = 15{,}14$ [Ω] $\Rightarrow$
$I = U/Z = 0{,}79$ [A]; $P = I^2 R = 7{,}54$ [W]. $X_L = \omega L = 13{,}527$ [Ω];
$X_L - X_C = |9{,}23| \Rightarrow X_{C1} = X_L - 9{,}23 = 4{,}297$ [Ω]; $X_{C2} = X_L + 9{,}23 = 22{,}757$ [Ω] $\Rightarrow$
$C_1 = 1/\omega X_{C1} = 61{,}762$ [μF] i drugo rešenje: $C_2 = 1/\omega X_{C2} = 11{,}662$[μF].

Napomena! Postoje dva rešenja zbog toga što ekvivalentna reaktivna otpornost može biti induktivnog i kapacitivnog karaktera. Prvo rešenje odgovara kada je $X_L > X_C$, a drugo kada je $X_L < X_C$.

6.56. ----- a) Pošto napon prednjači struji za 45° (φ = 45 °) aktivni i reaktivni otpor su jednaki, tj. $R = X = X_L - X_C$, gde je $X_L > X_C$. Impedansa kola je: $Z = U/I = 20$ [Ω] $\Rightarrow$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow R = X = 10\sqrt{2}[\Omega].$$

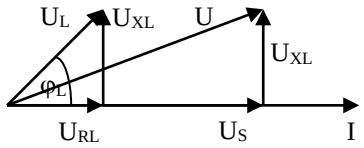
b) $$W = I^2Rt = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 60 = 6000\sqrt{2}[J] = 6\sqrt{2}[kJ].$$

6.57. ----- Maksimalna struja sijalice je: I = P/U = 20/120 = 0,167 [A], jer ona ima samo termogeni otpor.
Otpor sijalice (termogeni) je: R = U/I = 720 [Ω]
Ako sijalicu priključimo na napon U′ = 220 V, njena impedansa, pri maksimalnoj struji, iznosi:
Z = U′/I = 1 320 [Ω].

Kapacitivni otpor kondenzatora je: $X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = 1106,35[\Omega]$.

Kapacitet kondenzatora je: C = 1/ωX$_C$ = 2,879 μF.
Ako umesto kondenzatora ubacimo kalem, njgov induktivni otpor mora biti jednak otporu kondenzatora, pa je:
X$_L$ = ωL = X$_C$ = 1106,35 ⇒ L = 3,523 [H].

6.58. ----- a)



Napon na kalemu je:

$$U_L = I \cdot Z_L = I \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 4 \cdot \sqrt{2^2 + 31,4^2} = 125,85[V].$$

Iz fazorskog dijagrama se vidi da jefazni pomak između napona na kalemu U$_L$ i struje I jednak:

$$\varphi_L = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R_L} = 86,36^\circ$$

Ako napon na kalemu razložimo na njegove komponente, odnosno predstavimo ga kompleksno, sledi:
U$_L$ = U$_L$·e^{j86,36} = 125,86 (cos 86,36° + jsin 86,36°) = (7,99 + j125,61) [V] ⇒ U$_{RL}$ = 7,99 V; U$_{XL}$ = 125,61 V.
Naponi U$_{RL}$ + U$_S$, U$_{XL}$ I U čine pravougli trougao (vidi dijagram), pa je:

$$U_{RL} + U_S = \sqrt{U^2 - U_{XL}^2} = \sqrt{220^2 - 125,61^2} = 180,62 \Rightarrow U_S = 180,62 - 7,99 = 172,63[V].$$

b) Kada je bilo koja sijalica u kratkom spoju, otpor sijalica je jednak nuli (R$_S$ = 0), pa je snaga prigušnice:

$$P' = I'^2 R_L = \left(\frac{U}{Z_L}\right)^2 R_L = \left(\frac{220}{31,46}\right)^2 \cdot 2 = 97,78[W].$$

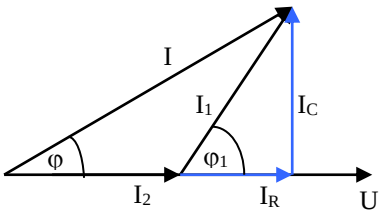
c) Sijalice će koristiti maksimalnu snagu kada se usaglase impedanse: $\underline{Z}_S = \underline{Z}_L^* = (2 - j31,4)$ [Ω].
Dakle, sijalice bi trebale da imaju termogenu otpornost od R = 2 [Ω] i kapacitivnu od X$_C$ = 31,4 [Ω]. To se postiže tako što se sijalicama na red dodaje kondenzator otpornosti 31,4 Ω i ukupnim termogenim otporom sijalica od 2 Ω.
Ukupna impedansa kola je, u ovom slučaju : $\underline{Z}_U = \underline{Z}_S + \underline{Z}_L = 2R_L = 4$ [Ω] (došlo je do rezonanse).
Ukupna aktivna snaga koju koriste sijalice, a toliki su i Džulovi gubici na prigušnici, iznosi:

$$P' = I'^2 R_S' = \left(\frac{U}{Z_U}\right)^2 R_S' = \left(\frac{220}{4}\right)^2 \cdot 2 = 6050[W].$$

Treba imati u vidu da će i na kalemu da se gubi snaga od 6050 W (zagrevanje kalema). Zbog toga presek kalema mora biti dovoljno velik da on nebi pregoreo (Treba da izdrži jačinu struje od I = U/Z$_U$ = 55 A).
Preporučuje se čitaocu da uporedi opterećenje prigušnice pod tačkama b i c i da na osnovu toga izvuče potreban odgovor, **da li je ovaj režim rada prihvatljiv**.

6.59. ----- P = 12 W, Q = 4√3 VAR, S = 13,86 VA; **6.60.** ----- I$_1$ = 10 A, I$_2$ = 10√2 A, I$_3$ = 10 A;

6.61. -----



Na osnovu fazorskog dijagrama sledi:

$$I_C^2 = I_1^2 - I_R^2 = I^2 - (I_2 + I_R)^2 \Rightarrow$$
$$I_1^2 - I_R^2 = I^2 - (I_2^2 + 2I_2I_R + I_R^2) \Rightarrow$$
$$I_1^2 - I_R^2 - I^2 + I_2^2 + I_R^2 = -2I_2I_R \Rightarrow$$
$$I_R = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_2} = \frac{10^2 - 6^2 - 5^2}{2 \cdot 5} = 3,9[mA].$$

Napon na paralelnoj vezi iznosi :

$$U = I_R \cdot R = 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^3 = 78 \text{ [V]}.$$

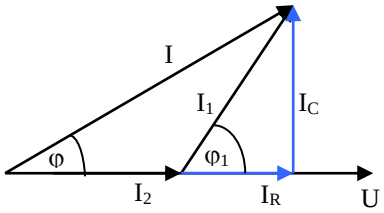
Otpornost otpornika R$_2$ je:

$$R_2 = U/I_2 = 78/5 \cdot 10^{-3} = 15\,600 \text{ [Ω]} = 15,6 \text{ [kΩ]}.$$

Aktivna snaga prijemnika otpornosti R$_2$ je:

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 15,6 \cdot 10^3 = 390 \cdot 10^{-3} \text{ [W]} = 390 \text{ [mW]}.$$

6.62. -----



Na osnovu fazorskog dijagrama, koji je isti kao i u predhodnom zadatku, sledi:

$R_2 = P_2/I_2^2 = 0{,}39/(5\cdot10^{-3})^2 = 15{,}6$ [kΩ].

Napon na paralelnoj vezi je:

$U = I_2R_2 = 15600\cdot5\cdot10^{-3} = 78$ [V].

Struja u otporniku otpornosti R je:

$I_R = U/R = 78/20\cdot10^3 = 3{,}9\cdot10^{-3}$ [A] = 3,9 [mA].

Struja kondenzatora $I_C = \sqrt{I_1^{\,2} - I_R^{\,2}} = \sqrt{6^2 - 3{,}9^2} = 4{,}56[\text{mA}]$.

Ukupna struja kola je:

$$I = \sqrt{(I_2 + I_R)^2 + I_C^{\,2}} = \sqrt{(5+3{,}9)^2 + 4{,}56^2} = 10[\text{mA}].$$

6.63. ----- a) Ukupni napon (napon izvora) je.

$\underline{U} = \underline{Z}\cdot\underline{I} + n\cdot R_S\cdot\underline{I}_2 = \underline{Z}\cdot(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + n\cdot R_S\cdot\underline{I}_2$ …. (1)

$nR_2\cdot\underline{I}_2 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = \dfrac{nR_s\underline{I}_2}{\underline{Z}_1}$ ..... .(2)

Uvrštavanjem druge jednačine u prvu, sledi:

$$\underline{U} = \underline{Z}\left(\frac{nR_s\underline{I}_2}{\underline{Z}_1} + \underline{I}_2\right) + nR_s\underline{I}_2 = \left(\frac{nR_s\underline{Z}}{\underline{Z}_1} + \underline{Z} + nR_s\right) \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\dfrac{nR_s\underline{Z}}{\underline{Z}_1} + \underline{Z} + nR_s}$$

Struja I_2 ne zavisi od broja sijalica samo ako je $\dfrac{nR_S\underline{Z}}{\underline{Z}_1} + nR_s = 0 \Rightarrow \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1} + 1 = 0 \Rightarrow \underline{Z} = -\underline{Z}_1$.

Vidimo da je pri ovom uslovu ($\underline{Z} = -\underline{Z}_1$), struja I_2 jednaka: $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}$,

gde je $\underline{Z}$ kalem a $\underline{Z}_1$ kondenzator (jednakih otpornosti)

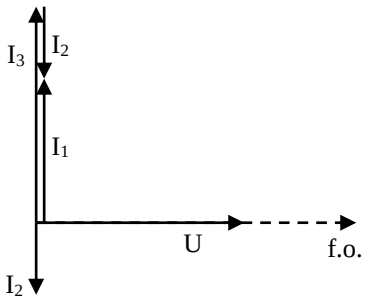
b) $P_S = U_SI_S \Rightarrow I_S = I_2 = P_S/U_S = 1$ [A].

Uz navedeni uslov:

$I_2 = U/Z \Rightarrow Z = \omega L = U/I_2 = 100$ [Ω], $Z_1 = 1/\omega C = 100$ [Ω] $\Rightarrow$ L = 318 mH, C = 31,8 μF;

Čitaocu se preporučuje da proveri tačnost rešenja za nekoliko primera (sijalica u kratkom spoju, jedna sijalica, tri sijalice...) i na osnovu dobijenog rešenja izvići određeni zaključak.

6.64. -----



Iz fazorskog dijagrama se vidi da je:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \Rightarrow I_1 = |I_3 - I_2| = 2$ [A].

Kako u celom kolu imamo od aktivnih otpora samo R_1, tada je ukupna aktivna snaga kola ujedno snaga na ovom otporniku, a ona iznosi:

$P = I_1^2R_1$.

Aktivna otpornost R_1 je : $R_1 = P/I_1^2 = 160/2^2 = 40$ [Ω].

Impedansa Z_1 je: $Z_1 = U_1/I_1 = 144/2 = 72$ [Ω].

Reaktivna otpornost X_1 je:

$X_1 = \pm\sqrt{Z_1^{\,2} - R_1^{\,2}} = \pm59{,}87[\Omega]$.

Postoje dva rešenja, zbog kvadratne jednačine.

Prvo rešenje je $X_{L1} = 59{,}87$ Ω, a drugo $X_{C1} = 59{,}87$ Ω.

6.65. ----- Ukupna aktivna snaga kloa je jednaka zbiru svih pojedinačnih snaga ($P = P_1 + P_2 + P_3$), pa je aktivna snaga prve impedanse jednaka:

$$P_1 = P - P_2 - P_3 = 400 \text{ [W]}.$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 36{,}87° \text{ (ind.)} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_3 = 0{,}75.$$

Kako je, iz trougla snaga, $\operatorname{tg}\varphi = Q/P \Rightarrow$

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = 400\cdot 140/20 = 2\,800 \text{ [VAr]};$$

$$Q_2 = P_2 \operatorname{tg}\varphi_2 = 600\cdot 0{,}75 = 450 \text{ [VAr]} \quad \text{i}$$

$$Q_3 = P_3 \operatorname{tg}\varphi_3 = 1\,000\cdot 0{,}75 = 750 \text{ [VAr]} \quad U = 1\,000 \text{ V};$$

Ukupna reaktivna snaga kola je (sve impedanse su induktivnog karaktera):

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4\,000 \text{ [VAr]}.$$

Ukupna prividna snaga kola je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2000^2 + 4000^2} = \sqrt{4\cdot 10^6 + 16\cdot 10^6} = \sqrt{20}\cdot 10^3 = 2\cdot 10^3\sqrt{5}\,[\text{VA}].$$

Kako je $P_1 = I_1^2 R_1$, pa je ukupna struja u kolu :

$$I = I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{400}{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,[\text{A}]$$

Efektivna vrednost ukupnog napona u kolu iznosi ($S = UI$):

$$U = \frac{S}{I} = \frac{2\cdot 10^3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1000\,[\text{V}]$$

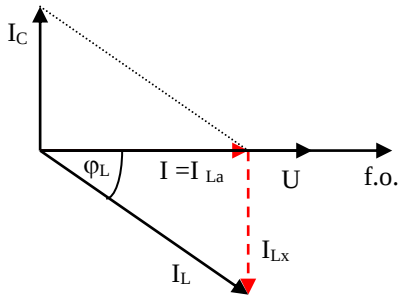
6.66. ----- a) $U = 120{,}86$ V, b) $\cos\varphi = 0{,}757$.

6.67. ----- a) $\underline{Z} = \underline{Z}_g^* = (2 - j\,4)\ \Omega \Rightarrow R = 2\ \Omega,\ X_C = 4\ \Omega,$

b) $P_{max} = I^2 R = \left(\frac{E}{Z}\right)^2 \cdot R = \left(\frac{E}{2R}\right)^2 \cdot R = \frac{E^2}{4R} = \frac{20^2}{4\cdot 2} = 50\,[\text{W}]$, jer je $\underline{Z} = \underline{Z}_g + \underline{Z} = 2R;$

$\cos\varphi = R/Z = 0{,}447;$

6.68. -----



Struja I će biti u fazi sa naponom U ($\cos\varphi = 1$) kada se reaktivna komponenta struje I_L (I_{Lx}) izjednači sa strijom kondenzatora.I_C.

$\varphi_L = \arccos 0{,}866 = 30°.$

U tom slučaju sledi:

$\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C = I_{La} - jI_{Lx} + jI_C$; za $I_{Lx} = I_C \Rightarrow \underline{I} = I_{1a} \Rightarrow \varphi = 0.$

Kako je $I_C = U/X_C = U\cdot\omega C$, a $I_X = I_L \sin\varphi_L \Rightarrow$

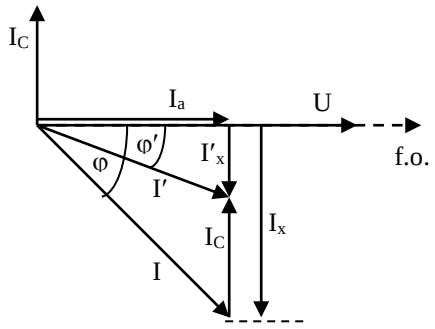
$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{I_L\cdot\sin\varphi_L}{\omega U} = \frac{5\cdot\sin 30^o}{2\pi\cdot 40\cdot 240} = 41{,}47\cdot 10^{-6}\,[\text{F}] = 41{,}47\,[\mu\text{F}]$$

Struja napojne grane (ukupna struja) nakon vezivanja kondenzatora je:

$$I = I_L\cos\varphi_L = 5\cdot 0{,}866 = 4{,}33 \text{ [A]}.$$

6.69. ----- a) $S = UI = 4\,000$ [VA] $\Rightarrow \cos\varphi = P/S = 2\,000/4\,000 = 0{,}5$.

b)



Iz fazorskog dijagrama odredimo aktivnu i reaktivnu komponentu struja I (I_a i I_x). One iznose:

$I_a = I\cos\varphi = 20\cdot 0{,}5 = 10$ [A],

$I_x = I\sin\varphi = 17{,}32$ [A].

Aktivna komponenta struje I_a je ista i za struju I kao i za ukupnu struju I′ nakon uključenja kondenzatora.

Ukupna struja kola nakon uključenja kondenzatora je:

$$I' = \frac{I_a}{\cos\varphi'} = \frac{10}{0{,}9} = 11{,}11\,[\mathrm{A}].$$

Reaktivna komponenta struje I′ (I'_x) je:

$I'_x = I'\sin\varphi' = 11{,}11\cdot 0{,}436 = 4{,}843$ [A].

Struja kondenzatora je:

$$I_C = I_x - I'_x = 17{,}32 - 4{,}843 = 12{,}477\ [\mathrm{A}].$$

Kako je $I_C = U/X_C = U\omega C$, sledi da je kapacitet paralelno vezanog kondenzatora (kojim se postiže faktor snage $\cos\varphi' = 0{,}9$) jednak:

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{12{,}477}{314\cdot 200} = 198{,}68\cdot 10^{-6}\,[\mathrm{F}] = 198{,}68\,[\mu\mathrm{F}].$$

Napomena! Zadatak se mogao rešiti direktnom primenom obrasca po kojem se računa kapacitet kondenzatora sa ciljem popravka faktora snage. Videti teoretski deo **Popravak faktora snage**.

6.70. ----- Zadatak se rešava isto kao i zadatak 6.68. Konačne rešenje je: $C = 19\ \mu$F ;

6.71. ----- Maksimalna snaga prijemnika se javlja kada je $\underline{Z} = \underline{Z}_g^{*} = (10 + j20)\ [\Omega] \Rightarrow \underline{Z}_e = 2R_i = 20[\Omega]$.

Kada bi prijemnik imao rednu vezu aktivnog i reaktivnog otpora ti otpori bi bili jednaki:

$R_p = 10\ \Omega$, $X_P = 20\ \Omega$ (ind. karaktera)

Maksimalna snaga prijemnika je: $P_{max} = I^2R_p = E^2/4R_i = 4/40 = 0{,}1$ W,);

Kako se impedansa prijemnika sastoji od paralelne veze otpornika otpornosti R i reaktanse otpornosti X, sledi:

$$\underline{Z} = \frac{R\cdot jX}{R+jX}\cdot\frac{R-jX}{R-jX} = \frac{jR^2X + RX^2}{R^2+X^2} = \frac{RX^2}{R^2+X^2} + j\frac{R^2X}{R^2+X^2} = (10 + j20) \Rightarrow$$

$$\frac{RX^2}{R^2+X^2} = 10 \Rightarrow RX^2 = 10(R^2+X^2) \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{R^2X}{R^2+X^2} = 20 \Rightarrow R^2X = 20(R^2+X^2) \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa (–2), sledi:

$-2RX^2 = -20\cdot(R^2 + X^2)$ …….. (1)

$R^2X = 20\cdot(R^2 + X^2)$ …….. (2)

$-2RX^2 + R^2X = 0 \Rightarrow R^2X = 2RX^2 \Rightarrow R = 2X \Rightarrow$

$4X^2\cdot X = 20\cdot(4X^2 + X^2) \Rightarrow 4X^3 = 100X^2 \Rightarrow X = 25\ [\Omega] \Rightarrow R = 50\ [\Omega]$.

Prijemnik se sastoji od paralelne veze otpornika $R = 50\ \Omega$ i kalema induktivnog otpora $X_L = 25\ \Omega$.

6.72. ----- Analitički izraz za struju i napon u kolu je:

$$i = 5\sqrt{2}\sin(800\pi t + \pi/6)\ [\mathrm{mA}]\quad i$$

$$U = IR = 10\ [\mathrm{V}] \Rightarrow u = 10\sqrt{2}\sin(800\pi + \pi/6)\ [\mathrm{V}].$$

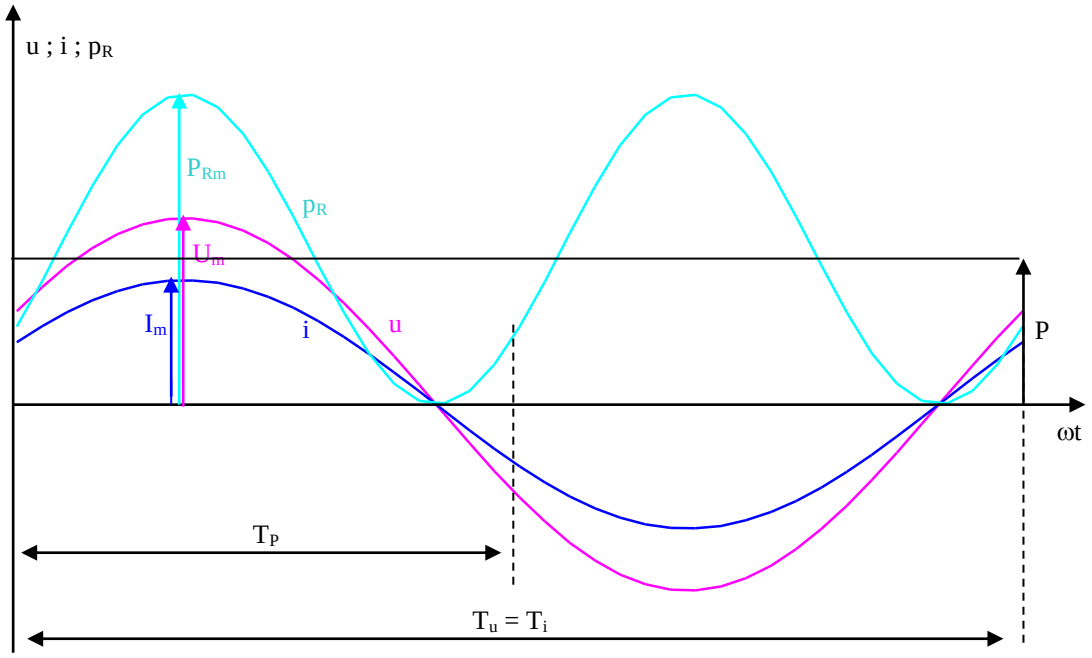
Analitički izraz za snagu u kolu je:

$p_R = ui = U_m\sin(\omega t + \theta)\cdot I_m\sin(\omega t + \theta) = U_m I_m \sin^2(\omega t + \theta) = U_mI_m\cdot\sin(2\omega t + \theta)/2 \Rightarrow$

$p_R = UI[1 - \cos 2(\omega t + \theta)] = 50[1 - \cos(1\,600\pi t + \pi/3)$ [mW].

Napomena! Pogledati teoretsko objašnjenje **Snaga u kolu naizmenične struje u R kolu**.

Na grafičkom dijagramu je predstavljena struja, napon i snaga.



Iz analitičkog izraza i grafičkog dijagrama za snagu može se izvući sledeći zaključak:

1) Snaga koju prima savršeni termogeni otpornik je uvek pozitivna ($P_R \geq 0$) i ona se menja od $P_{Rmin} = 0$ do $P_m = U_m \cdot I_m = 2UI = 100$ mW. Iz ovog proizlazi da se u termogenom otporniku električna energija nepovratno pretvara u toplotu. Ovo je nepovratni proces, jer energija odlazi iz kola.

2) Učestanost snage termogenog otpornika je dva puta veća od učestanosti napona i struje otpornika, pa je i period snage termogenog otpornika dva puta manji od perioda struje i napona:

$f_P = 2f = 2 \cdot 800\pi/2\pi = 800$ [Hz] i $T_p = T/2 = 1/f_p = 1/800$ [s].

Srednja vrednost snage termogenog otpornika u toku jedne periode struje otpornika (dve periode snage) jednaka je: $P_S = P_{max}/2 = U_m \cdot I_m/2 = UI = 50$ W.

Ova **srednja vrednost naizmenične snage P_S** , kod termogenog otpornika, **naziva se aktivnom snagom P**, i ona se može predstaviti i Džulovin zakonom: $P = P_S = RI^2 = R \cdot I \cdot I = U \cdot I$ [W].

6.73. ----- a) Analitički izraz za struju i napon je:

$i = I_m \sin (\omega t + \theta) = 10\sqrt{2} \sin (10^4 t + \pi/3)$ [mA] i

$u = U_m \sin (\omega t + \pi/3 + \pi/2) = I \cdot X_L \sqrt{2} \sin (\omega t + 5\pi/6) = \omega LI \sqrt{2} \sin (10^4 t + 5\pi/6) \Rightarrow$

$u = 2\sqrt{2} \sin (10^4 t + 5\pi/6) = 2\sqrt{2} \cos (10^4 t + \pi/3)$ [V].

Trenutna snaga, njen analitički izraz, je :

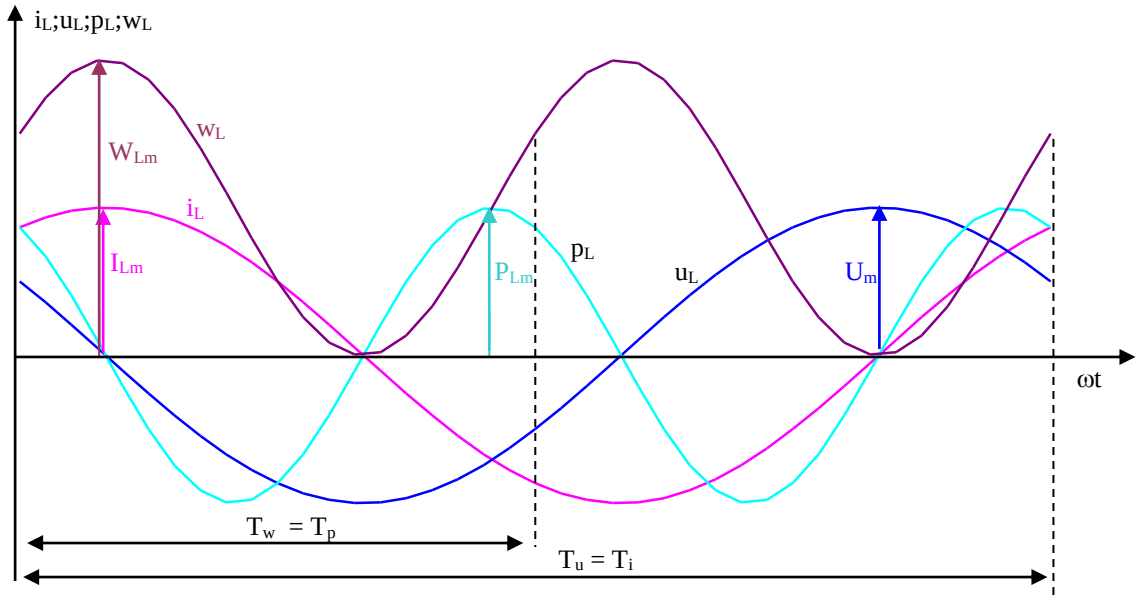
$p_L = ui = [U_m \sin (\omega t + \pi/3 + \pi/2)] \cdot [I_m \sin (\omega t + \pi/3)] = [U_m \cos (\omega t + \pi/3)] \cdot [I_m \sin (\omega t + \pi/3)] \Rightarrow$

$$p_L = U_m I_m \cdot \frac{1}{2} \sin 2\left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2}U\sqrt{2}I \cdot \frac{1}{2} \sin 2\left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = UI \sin 2\left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = 20 \sin\left(2 \cdot 10^4 t + \frac{2\pi}{3} \right) [\text{mW}]$$

Iz ovog analitičkog izraza za snagu u savršenom kalemu mogu se izvući sledeći zaključci:

1) Maksimalna vrednost snage je: $P_{Lmax} = UI = 20$ mW.
2) Kružna učestanost snage kalema je dva puta veća od učestanosti struje i napona kalema, pa je: $\omega_{pl} = 2\omega = 2 \cdot 10^4$ rad/s.
3) Srednja vrednost snage kalema je jednaka nuli, što se vidi sa grafičkog dijagrama. Ova srednja vrednost snage je ujedno i aktivna snaga, koja je kod savršenog kalema jednaka nuli: $P = P_S = 0$.

Navedene konstatacije se potvrđuju i na grafičkom (vremenskom) dijagramu, prikazanom na slici.



b) Energija magnetnog polja je:

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\cdot\left[I_m \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2}{2} = \frac{LI_m{}^2}{2}\sin^2\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{LI^2}{2}\left[1-\cos 2\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$w_L = 10^{-6}\cdot\left[1-\cos\left(2\cdot 10^4 t+\frac{2\pi}{3}\right)\right][\mathrm{J}].$$

Iz ovog izraza se vidi da magnetna energija kalema ima dva puta veću kružnu učestanost od učestanosti struje i napona, i da se enewrgija menja od $W_{min} = 0$ do $W_{max} = Li^2 = 2\cdot 10^{-6}$ [J].

Iz grafičkog dijagrama, kao i analitičkog izraza, se može zaključiti da energija kalemu dolazi kada struja raste u svom apsolutnom iznosu (bez obzira na smer). Kada struja raste od nule ka maksimalnoj vrednosti (apsolutni iznos), tada će izvor svoju električnu energiju pretvoriti u magnetnu energiju kalema. Energija dolazi kalemu kada je struja u porastu. U ovim intervalima, kada je energija u porastu, snaga koju prima kalem je uvek pozitivna, jer su napon i struja u ovim intrevalima istog smera. Pri tom će snaga promenuti sve svoje vrednosti (raste od nule do maksimalne vrednosti i pada do nule). Energija kalema je maksimalna u trenutcima u kojima je struja kalema maksimalna (po apsolutnoj vrednosti). Kada je energija kalema (struja) maksimalna napon kalema je jednak nuli. Kada struja po apsolutnoj vrednosti opada od maksimalne vrednosti do nule opada i magnetna energija kalema, što znači da će se predhodno primljena energija kalema trošiti, odnosno, ponovo se vraća izvoru (magnetna energija kalema se pretvara u električnu). U ovim intervalima napon raste od nule ka maksimalnoj vrednosti. Snaga koju kalem prima u ovim intervalima je negativna, jer su smerovi napona i struje suprotni. I u ovom intervalu snaga promeni sve svoje vrednosti (kao i kod pozitivnog poluperioda). Kada je struja kalema jednaka nuli, tada je i energija kalema jednaka nuli, dok je napon na krajevima kalema maksimalan po svojoj apsolutnoj vrednosti.

Iz navedenog se može zaključiti da pri prostoperiodičnoj naizmeničnoj struji, energija osciluje : iz izvora (električne) prelazi u magnetnu energiju, a zatim se sva iz magnetne (magnetnog polja) vraća u električnu (izvoru → ostatku kola). Kako se ovde radi o povratnom procesu, sledi da je ukupna aktivna snaga kalema jednaka nuli, što se vidi iz grafičkog dijagrama. Ova aktivna snaga se možće izračunati i matematički (viša matematika), gde je:

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T p_L\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin 2(\omega t+\psi)dt = 0$$

6.74. ----- a)

Analitički izrazi za napon i struju su:

$$u = 1{,}2\sqrt{2}\,\sin\left(10^5 t + \pi/4\right)\ [V];$$

$$I = U/X_C = \omega C \cdot U = 10^5 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}2 = 12 \cdot 10^{-3}\ [A] = 12\ [mA] \Rightarrow$$

$$i = 12\sqrt{2}\,\sin\left(10^5 t + \pi/4 + \pi/2\right) = 12\sqrt{2}\,\cos\left(10^5 t + \pi/4\right)\ [mA].$$

Trenutna snaga (analitički izraz) koju prima kondenzator je:

$$p_C = u \cdot i = [U_m \sin(\omega t + \psi)] \cdot [I_m \cos(\omega t + \psi)] = U \cdot I \sin 2(\omega t + \psi) \Rightarrow$$

$$p_C = 14{,}4 \sin 2\left(10^5 + \pi/4\right) = 14{,}4 \sin\left(2 \cdot 10^5 + \pi/2\right)\ [mW].$$

Maksimalna snaga koju prima kondenzator iznosi:

$$P_{Cm} = U \cdot I = 14.4\ [mW].$$

Kružna učestanost snage je dva puta veća od učestanosti napona, jer je:

$$\omega_{pc} = 2 \cdot \omega_u = 2 \cdot 10^5\ rad/s.$$

Aktivna snaga generatora je jednaka nulu, što se vidi iz grafičkog dijagrama. Aktivnu snagu možemo dobiti matemetičkim putem (viša matematika), gde je:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_C\,dt = 0$$

b) Energija električnog polja kondenzatora je:

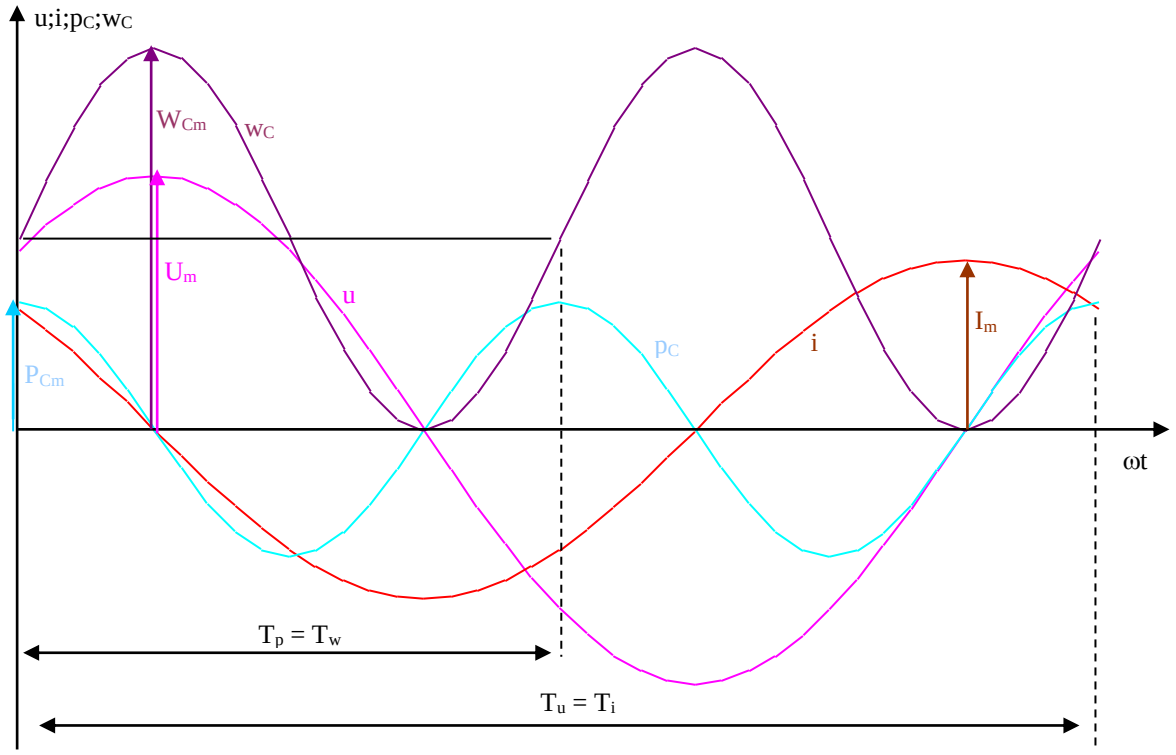
$$w_C = \frac{1}{2}C \cdot u^2 = \frac{1}{2}C\left[U_m \sin(\omega t + \psi)\right]^2 = \frac{1}{2}CU_m{}^2 \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{1}{2}C \cdot 2U^2 \cdot \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2(\omega t + \psi)\right] \Rightarrow$$

$$w_C = \frac{U^2 C}{2}\left[1 - \cos 2(\omega t + \psi)\right] = 7{,}2 \cdot 10^{-8}\left[1 - \cos\left(2 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\ [J].$$

Energija kondenzatora (električnog polja) se menja u granicama od:

$W_{Cmin} = 0$ do $W_{Cmax} = 14{,}4 \cdot 10^{-8}$ [J].

Na osnovu analitičkih izraza za napon, struju, snagu i energiju kondenzatora dobije se sledeći grafički (vremenski) dijagram:



Kondenzator prima energiju od izvora u onim intervalima u kojima napon po svojim apsolutnim vrednostima raste od nule do maksimalne vrednosti (struja opada po apsolutnoj vrednosti sa maksimalne vrednosti na nulu). Snaga koju prima kondenzator u ovin intervalima je pozitivna, jer su napon i struja istog predznaka.

Energija kondenzatora je maksimalna kada je napon na kondenzatoru postigao svoju maksimalnu vrednost (po apsolutnom iznosu). Struja kondenzatora je u tom trenutku jednaka nuli, jer je kondenzator dostigao maksimalno opterećenje (maksimalno napunjen).

Kada dođe do pada napona po svojoj apsolutnoj vrednosti (od maksimalne vrednosti ka nuli) energija kondenzatora (elektrostatička energija) se vraća nazad u električnu, tj kondenzator vraća energiju izvoru. Struja kondenzatora, u ovim intervalima, raste po apsolutnom iznosu od nule do maksimalne vrednosti (dolazi do pražnjenja kondenzatora – rasterećenja). U ovim intervalima je snaga kondenzatora negativna, jer su napon i struja suprotnih predznaka.

Energija kondenzatora opada sa maksimalne vrednosti na nulu kada i napon opada sa maksimalne vrednosti na nulu (u i w su u fazi).

Navedena analiza dovodi do zaključka da se, pri prostoperiodičnim naizmeničnim strujama odvija povratni proces (kao i kod L kola). **Energija oscilira: Iz izvora se prenosi (pretvara) u energiju kondenzatora, a zatim se sva iz kondenzatora vraća u energiju izvora (električnu).**

Aktivna snaga kondenzatora je srednja snaga kondenzatora nastala u vremenskom intervalu T (jednoj periodi). Ova snaga je jednaka nuli, što se vidi sa dijagrama.

Iz analitičkog izraza za energiju

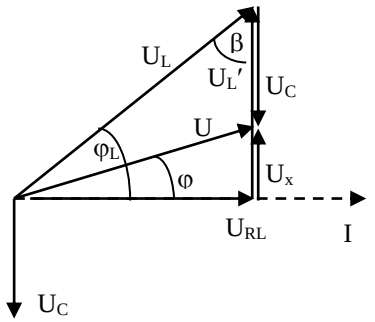
$$w_C = \frac{U^2 C}{2}\left[1-\cos 2(\omega t+\psi)\right] \Rightarrow$$

$$w_C = \frac{U^2 C}{2} - \frac{U^2 C}{2}\cos(2\omega t + 2\psi) \Rightarrow (2\omega t + 2\psi) = \pi \Rightarrow w_C = \frac{U^2 C}{2} + \frac{U^2 C}{2} = U^2 C = W_{Cm}$$

Iz ovog izraza se vidi da je maksimalna energija kondenzatora jednaka:

$$W_{Cm} = U^2 C$$

6.75. ----- Da bi se zadatak lakše rešio predhodno nacrtati fazorski dijagram, koji je predstavljen na slici.



Koristeći kosinusnu teoremu odredimo ugao β:

$U^2 = U_L^2 + U_C^2 - 2U_L U_C \cos\beta \Rightarrow$

$$\cos\beta = \frac{U_L^2 + U_C^2 - U^2}{2U_L U_C} = \frac{136^2 + 50^2 - 100^2}{2\cdot 136\cdot 50} = 0{,}809 \Rightarrow$$

$$\beta = 36^o \Rightarrow \varphi_L + \beta = 90^o \Rightarrow \varphi_L = 54^o$$

Napon na realnom kalemu sadrži aktivnu (termogenu) i reaktivnu (induktivnu) komponentu, koje iznose:

$U_R = U_L \cos\varphi_L = 80$ V i $U_L' = U_L \sin\varphi_L = 110$ V.

Traženi cos φ se odredi iz fazorskog dijagrama i on iznosi:

$$\cos\varphi = \frac{U_{RL}}{U} = 0{,}8$$

6.76. ----- $Q_1 = Q_2 = -2{,}5$ VAr (oba kap.) , jer je $Q = Q_1 + Q_2 = -5$ Var; $Q_1 = I^2 X_1$, $Q_2 = I^2 X_2$.

Očito je da su reaktivni otpori (kapacitivni) za oba prijemnika jednaki. Oni iznose:

$B_2 = X_C/Z_2^2 \Rightarrow X_C = X_1 = X_2 = B_2 \cdot Z_2^2 = 2$ [kΩ].

Aktivni otpor R_2 je:

$$R_2 = \sqrt{Z_2^2 - X_2^2} = 1[\text{k}\Omega];$$

Struju u kolu izračunamo iz reaktivne snage drugog prijemnika, gde je:

$$Q_2 = X_2 I^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{Q_2}{X_2}} = \sqrt{\frac{2{,}5}{2\cdot 10^3}} = \sqrt{0{,}00125} = 0{,}0354[\text{A}] = 35{,}4[\text{mA}];$$

Ukupna impedansa kola je:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{200}{35{,}4\cdot 10^{-3}} = 5{,}66[\Omega] = 5{,}66[\text{k}\Omega];$$

Kako je:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \Rightarrow R_1 + R_2 = \sqrt{Z^2 - (X_1 + X_2)^2} = \sqrt{5{,}66^2 - 4^2} = 4[\text{k}\Omega].$$

pa je aktivni otpornik prvog prijemnika jednak:

$R_1 = 4 - R_1 = 3$ [kΩ].

6.77. ----- Drugi prijemnik je kapacitivnog karaktera ($Q_2 < 0$), dok je prvi prijemnik induktivnog karaktera , jer je ukupna reaktivna provodnost $B_2 < 0$ (pravladava induktivno opterećenje).
($B_2 <$).

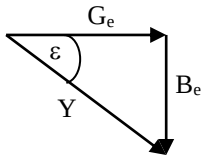
Struju u kolu odredimo na osnovu reaktivne snage drugog prijemnika, gde je: $Q_2 = I^2X_2 \Rightarrow$

$$I = \sqrt{\frac{Q_2}{X_2}} = 35{,}4\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{A}] = 35{,}4\,[\mathrm{mA}].$$

Ukupni aktivni otpor celog kola je: $R_e = P_e/I^2 = 4$ [kΩ].

Prividna snaga prvog prijemnika je: $S_1 = I^2\cdot Z_1 = 3{,}75\sqrt{5}$ [VA].

Trougao provodnosti prvog prijemnika, kao i ukupnog kola, je kao na slici:



Ukupni reaktivni otpornik celog kola je:
$X = X_L - X_C$, gde je $X > 0$.
Odnos između ukupne reaktivne provodnosti i otpornosti je:

$$B_e = \frac{X}{Z^2} \Rightarrow X = B_e Z^2$$

Ukupna impedansa kola je: $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4 + (X_L - 2)^2}\,[\mathrm{k\Omega}]$

U kompleksnom obliku impedansa celog kola je:

$$\underline{Z} = 4 + j\,(X_L - 2)\ [\mathrm{k\Omega}].$$

Ukupna admitansa kola u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Y} = G_e - jB_e = \frac{R_e}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} = \frac{4}{4^2 + (X_L - 2)^2} - j\frac{X_L - 2}{4^2 + (X_L - 2)^2}\,[\mathrm{mS}].$$

Sledi:

$$B_e = \frac{X_L - 2\cdot 10^3}{(4\cdot 10^3)^2 + (X_L - 2\cdot 10^3)^2} = 1{,}25\cdot 10^{-4} \Rightarrow X_L - 2\cdot 10^{-3} = 1{,}25\cdot 10^{-4}\left(16\cdot 10^6 + X_L{}^2 - 4\cdot 10^3 X_L + 4\cdot 10^6\right) \Rightarrow$$

$$1{,}25\cdot 10^{-4} X_L{}^2 - 1{,}5X_L + 4500 = 0 \Rightarrow$$

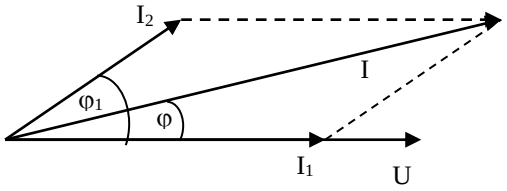
$$X_{L(1/2)} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4\cdot 1{,}25\cdot 10^{-4}\cdot 4500}}{2\cdot 1{,}25\cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2{,}25}}{2\cdot 1{,}25\cdot 10^{-4}} = 6000\,[\Omega].$$

Kako nam kvadratna jednačina daje samo jedno rešenje ($X_{L1} = X_{L2} = X_L$), induktivna otpornost prvog prijemnika iznosi: $X_L = X_1 = 6\,000$ [Ω] = 6 [kΩ].

Iz impedanse prvog prijemnika ($Z_1 = \sqrt{R_1{}^2 + X_L{}^2} = 3\sqrt{5} \Rightarrow R_1{}^2 + X_L{}^2 = 45$), sledi aktivna otpornost prvog prijemnika, koja iznosi: $R_1^2 = 45 - 6^2 = 9 \Rightarrow R_1 = 3$ [kΩ].

Aktivna optornost drugog prijemnika je: $R_2 = R_e - R_1 = 1$ [kΩ].

6.78. ….. a)



$\varphi_2 = \arccos 0{,}8 = 36{,}87°$
$\varphi = \arccos 0{,}9 = 25{,}84°$

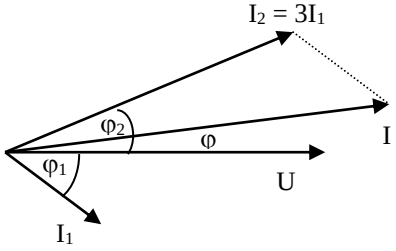
Struja prvog prijemnika je ($\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$):
$\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2 = 1{,}5\cdot(\cos 25{,}84° + j\sin 25{,}84°) - 1\cdot(\cos 36{,}87° + j\sin 36{,}87°) = (0{,}55 + j0{,}054)$ [A] $\Rightarrow$
$I_1^2 = 0{,}55^2 + 0{,}054^2 \Rightarrow I_1 = 0{,}5526$ [A].

b) $\cos\varphi_1 = \dfrac{0{,}55}{0{,}5526} = 0{,}995 \Rightarrow \varphi_1 = 5{,}56^o$

c) Napon prvog prijemnika je ($P_1 = U\cdot I_1\cdot\cos_1 = 100$ [W]):

$$U = \frac{P_1}{I_1\cdot\cos\varphi_1} = \frac{100}{0{,}5526\cdot 0{,}995} = 181{,}87\,[\mathrm{V}]$$

6.79. -----



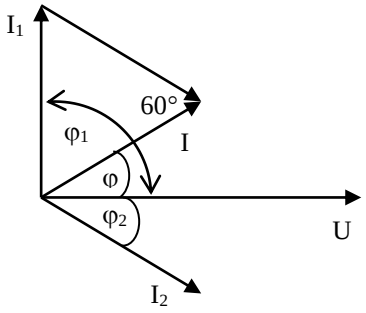
$\varphi_1 = \arccos 0{,}8 = 36{,}87°$ (induktivno)
$\varphi_2 = \arccos 0{,}9 = 25{,}84°$ (kapacitivno $\Rightarrow \varphi_2 = -25{,}84°$).
$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j36{,}87°} = I_1 [\cos(-36{,}87°) + j\sin(-36{,}87°)] \Rightarrow$
$\underline{I}_1 = (0{,}8 - j0{,}6) I_1$;
$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j25{,}84°} = 3I_1 \cdot e^{j25{,}84°}$, jer je $I_2 = 3I_1 \Rightarrow$
$\underline{I}_2 = I_2(\cos 25{,}84° + j\sin 25{,}84°) = (0{,}9 + j0{,}436) \cdot 3I_1$

Ukupna struja u kolu je:
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (0{,}8 - j0{,}6) I_1 + (0{,}9 + j0{,}436) \cdot 3I_1 = (3{,}5 + j0{,}708) I_1$.
Fazni pomak struje u odnosu na faznu osu (napon) je:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0{,}708 I_1}{3{,}5 I_1} = 0{,}202 \Rightarrow \varphi = 11{,}44° \text{ (kapac).}$$

Faktor snage kola je: $\cos\varphi = \cos(-11{,}44°) = 0{,}98$.

6.80. -----



$I_1 \perp U \Rightarrow \varphi_1 = -90°$ (struja prednjači naponu za $\pi/2$).
Kako su sve struje jednake, a ukupna struja je jednaka:
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$, sledi, da vektori ovih struja čine jedan jednakostranični trougao. Na osnovu ove činjenice očito je da je ugao $\varphi = 30°$ ($\varphi_1 - \varphi = 60°$).
Aktivna snaga kola je:
$P = UI\cos\varphi = 50 \cdot 1 \cdot \cos(-30°) = 25\sqrt{3}$ [W].
Reaktivna snaga kloa je:
$Q = UI\sin\varphi = 50 \cdot 1 \cdot \sin(-30°) = -25$ [VAr] .. kapac.

6.81. ----- Reaktivna snaga drugog prijemnika je ($Q_e = Q_1 + Q_2$): $Q_2 = Q_e - Q_1 = 360$ mVAr.
Prvi prijemnik je kapacitivnog karaktera, dok je drugi induktivnog karaktera.
Kako je $Q_2 = I_2^2 X_2$, efektivna vrednost struje drugog prijemnika iznosi:

$$I_2 = \sqrt{\frac{Q_2}{X_2}} = \sqrt{\frac{360 \cdot 10^{-3}}{400}} = 0{,}03[\text{A}] = 30[\text{mA}].$$

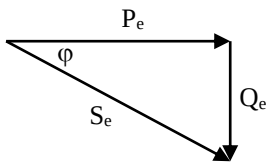
Impedansa drugog prijemnika je: $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = 500[\Omega]$.
Efektivna vrednost priključenog napona je: $U = U_1 = U_2 = I_2 Z_2 = 15$ [V].
Prividna snaga kola je: $S = UI = 225\sqrt{5}[\text{mVA}]$.
Aktivna snaga kola je: $P_e = \sqrt{S^2 - Q_e^2} = 450[\text{mW}]$.
Kako je $P_e = P_1 + P_2$, aktivna snaga drugog prijemnika iznosi: $P_1 = P_e - P_2 = 180$ [mW].
Iz izraza za aktivnu I reaktivnu snagu: $P_1 = I_1^2 R_1 = \left(\frac{U}{R_1}\right)^2 R_1 = \frac{U^2}{R_1} = U^2 G_1 \rightarrow Q_1 = I_1^2 X_1 = \frac{U^2}{X_1} = U^2 B_1$
aktivna i reaktivna provodnost prvog prijemnika je:

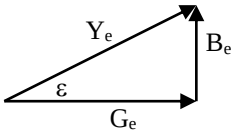
$$G_1 = \frac{P_1}{U^2} = 0{,}8[\text{mS}],$$

$$B_1 = -\frac{Q_1}{U^2} = 0{,}6[\text{mS}].$$

Admitansa i impedansa prvog prijemnika je: $Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = 1[\text{mS}]$ i $Z = 1/Y = 1$ [kΩ].
Iz kompleksnog izraza za admitansu prvog prijemnika: $\underline{Y}_1 = G_1 + jB_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} + j\frac{X_1}{Z_1^2}$
aktivna i reaktivna otpornost prvog prijemnika je: $R_1 = G_1 \cdot Z_1 = 800$ [Ω] i $X_1 = -B_1 \cdot Z_1^2 = -600$ [Ω] (kap).

6.82. ----- Trougao snaga i provodnosti za celo kolo prikazan je prema slici





$\varphi = -\varepsilon$

Kako je celo kolo kapacitivno ($Q_e < 0$) $\Rightarrow$ $S_e = P_e - jQ_e$, $\underline{Z}_e = R_e - jX_e$ i $\underline{Y}_e = G_e + jB_e$.

Struja I fazno prednjači naponu U za ugao: $\varphi = \text{arctg}\dfrac{Q_e}{P_e} = \text{arctg}\dfrac{-0{,}8}{5{,}6} = \text{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right) = -8{,}13^{\circ}$.

Iz trougla provodnosti konduktansa je: $\text{tg}\varepsilon = \dfrac{B_e}{G_e} \Rightarrow G_e = \dfrac{B_e}{\text{tg}\varepsilon} = \dfrac{B_e}{\text{tg}8{,}13^{\circ}} = \dfrac{B_e}{\frac{1}{7}} = 7B_e$

Konduktansa i susceptansa (aktivna i reaktivna provodnost) prvog prijemnika je:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^{\,2}} = \frac{5\cdot 10^3}{\left(5\cdot 10^3\right)^2 + \left(10\cdot 10^3\right)^2} = \frac{5\cdot 10^3}{25\cdot 10^6 + 100\cdot 10^6} = \frac{5\cdot 10^3}{125\cdot 10^6} = 0{,}04\cdot 10^{-3}[\text{S}] = 0{,}04[\text{mS}],$$

$$B_1 = \frac{-X_1}{Z_1^{\,2}} = \frac{-10\cdot 10^3}{125\cdot 10^6} = -0{,}08\cdot 10^{-3}[\text{S}] = -0{,}04[\text{mS}]\,(\text{induktivno}).$$

Admitansa prvog prijemnika je:

$$Y_1 = \sqrt{G_1^{\,2} + B_1^{\,2}} = \sqrt{\left(0{,}04\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(0{,}08\cdot 10^{-3}\right)^2} = \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}08^2}\cdot 10^{-3} = 0{,}089\cdot 10^{-3}[\text{S}] = 0{,}089[\text{mS}].$$

Ukupna aktivna i reaktivna provodnost je:

$G_e = G_1 + G_2$ i

$B_e = B_1 + B_2$.

Kako je $\text{tg}\varepsilon = \dfrac{B_e}{G_e} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{B_1 + B_2}{G_1 + G_2} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow G_1 + G_2 = 7\left(B_1 + B_2\right)$.

Pošto struja I_2 prednjači naponu U za 45° kod drugog prijemnika aktivna i reaktivna otpornost, kao i provodnost, je jednaka ($\text{tg}\,\varphi = X_2/R_2 = 1$), pa je:

$$B_2 = G_2$$

Dalje sledi da je:

$G_1 + G_2 = 7\cdot(B_1 + G_2) \Rightarrow 0{,}04\cdot 10^{-3} + G_2 = 7\cdot(-0{,}08\cdot 10^{-3} + G_2) \Rightarrow 0{,}04\cdot 10^{-3} + 0{,}56\cdot 10^{-3} = 6G_2$,

aktivna i reaktivna provodnost drugog prijemnika (koji je kapacitivan):

$$G_2 = B_2 = 0{,}1\cdot 10^{-3}\,[\text{S}] = 0{,}1\,[\text{mS}].$$

Admitansa drugog prijemnika je: $Y_2 = \sqrt{G_2^{\,2} + B_2^{\,2}} = 0{,}1\sqrt{2}\cdot 10^{-3}[\text{S}] = 0{,}1\sqrt{2}[\text{mS}]$

Aktivna i reaktivna provodnost celog kola je:

$G_e = G_1 + G_2 = 0{,}04\cdot 10^{-3} + 0{,}1\cdot 10^{-3} = 0{,}14\cdot 10^{-3}\,[\text{S}] = 0{,}14\,[\text{mS}]$ i

$B_e = B_1 + B_2 = -0{,}08\cdot 10^{-3} + 0{,}1\cdot 10^{-3} = 0{,}02\cdot 10^{-3}\,[\text{S}] = 0{,}02\,[\text{mS}]$.

Admitansa celog kola je: $Y = \sqrt{G_e^{\,2} + B_e^{\,2}} = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}02^2}\cdot 10^{-3} = \sqrt{0{,}02}\cdot 10^{-3} = \sqrt{2}\cdot 10^{-4}[\text{S}] = 0{,}1\sqrt{2}[\text{mS}]$.

Aktivna snaga celog kola je: $P_e = I^2 R_e = \dfrac{U^2}{R_e} = U^2 G_e$,

pa je efektivna vrednoast priključenog napona:

$$U = \sqrt{\frac{P_e}{G_e}} = \sqrt{\frac{5{,}6}{0{,}14\cdot 10^{-3}}} = 200[\text{V}].$$

Efektivne vrednosti struja po granama su:

$I_I = U\cdot Y_1 = 200\cdot 0{,}089\cdot 10^{-3} = 17{,}8\cdot 10^{-3}\,[\text{A}] = 17{,}8\,[\text{mA}]$,

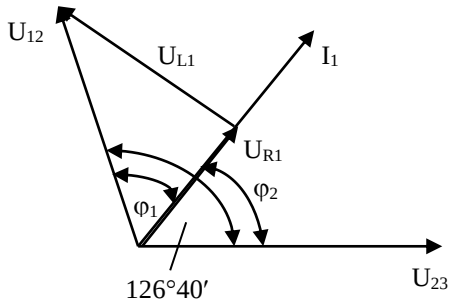
$I_2 = U\cdot Y_2 = 200\cdot 0{,}1\sqrt{2}\cdot 10^{-3} = 20\sqrt{2}\cdot 10^{-3}\,[\text{A}] = 20\sqrt{2}\,[\text{mA}]$.

a ukupna struja kola je:

$I = U\cdot Y = 200\cdot 0{,}1\sqrt{2}\cdot 10^{-3} = 20\sqrt{2}\cdot 10^{-3}\,[\text{A}] = 20\sqrt{2}\,[\text{mA}]$.

6.83. ----- Fazni pomak između napona U_{12} i struje I_1 je: $\varphi_1 = \text{arctg}\dfrac{X_1}{R_1} = \text{arctg}\dfrac{6}{2} = 63^\circ 20'(\text{ind.})$

Ako za napon U_{23} uzmemo da mu je početni ugao jednak nuli (nalazi se u faznoj osi), tada se dobije fazorski dijagram prikazan na slici:



Struja I_1 će fazno da kasni za naponom U_{12} (napon na Z_1) za ugao $\varphi_1 = 63°20'$. Istovremeno će ova struja da prednjači naponu U_{23} (napon na Z_2) za ugao:
$\varphi_2 = 126°40' - 63°40' \Rightarrow \varphi_2 = 63°20'$.
Očito je da je impedansa Z_1 induktivnog karaktera, a impedansa Z_2 kapacitivnog.
Impedansa drugog prijemnika u kompleksnom obliku je:
$\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{-j\varphi 2} = 2{,}24\ [\cos(-63°20') + j\sin(-63°20')] \Rightarrow$
$\underline{Z}_2 = (1 - j2)[\text{k}\Omega]\ . \Rightarrow R_1 = 1\ [\text{k}\Omega]$ i $X_1 = -2\ [\text{k}\Omega]$.

Ukupna impedansa prve grane iznosi:

$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 3 + j6 + 1 - j2 = (4 + j4)\ [\text{k}\Omega] \Rightarrow Z_{12} = 4\sqrt{2}[\text{k}\Omega],\ R_{12} = X_{12} = 4\ [\text{k}\Omega];\ \varphi_{12} = 45°$ (ind.).

Iz uslova zadatka sledi:

$$\frac{P_{12}}{P_3} = 1{,}5 \Rightarrow \frac{I_1^{\,2} R_{12}}{I_3^{\,2} R_3} = \frac{\left(\dfrac{U_{13}}{Z_{12}}\right)^2 R_{12}}{\left(\dfrac{U_{13}}{Z_3}\right)^2 R_3} = 1{,}5 \Rightarrow \frac{Z_3^{\,2}}{Z_{12}^{\,2}} \cdot \frac{R_{12}}{R_3} = 1{,}5 \Rightarrow \frac{8{,}46^2}{(4\sqrt{2})^2} \cdot \frac{4}{R_3} = 1{,}5 \Rightarrow 1{,}5R_3 = 8{,}946 = 6[\text{k}\Omega].$$

Reaktivna otpornost impedanse Z_3 je:

$$X_3 = \pm\sqrt{Z_3^{\,2} - R_3^{\,2}} = \pm 6[\text{k}\Omega].$$

Postoje dva rešenja, i to: $X_3' = 6\ [\text{k}\Omega]$ (ind.) i $X_3'' = -6\ [\text{k}\Omega]$ (kap.).

Za prvo rešenje ukupna impedansa u kolu je:

$$\underline{Z}' = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\cdot \underline{Z}_3'}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3'} = \frac{(3 + j6 + 1 - j2)\cdot(6 + j6)}{3 + j6 + 1 - j2 + 6 + j6} = \frac{(4 + j4)\cdot(6 + j6)}{10 + j10} = (2{,}4 + j2{,}4)[\text{k}\Omega].$$

Fazna razlika između struje I (ukupna struja) i napona U_{13} (ukupni napon $\rightarrow$napon na paralelnoj vezi) je:

$$\varphi' = \text{arctg}\frac{2{,}4}{2{,}4} = 45^\circ(\text{ind.}).$$

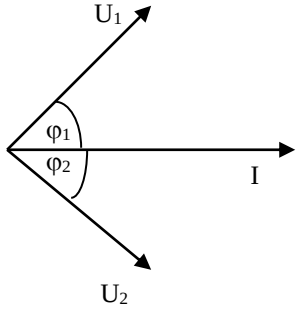
a drugo rešenje je:

$$\underline{Z}'' = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\cdot Z_3''}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3''} = \frac{(4 + j4)\cdot(6 - j6)}{4 + j4 + 6 - j6} = (4{,}62 + j0{,}92)[\text{k}\Omega].$$

Fazni pomak između napona U_{13} i struje I iznosi:

$$\varphi'' = \text{arc}\frac{0{,}92}{4{,}62} = \text{arctg}0{,}199 = 11{,}26^\circ(\text{ind.}).$$

6.84. -----



Na fazorskom dijagramu je očito da su fazne razlike između struje i pojedinih napona: $\varphi_1 = 45°$ (ind.) i $\varphi_2 = -45°$ (kap.).

Kako je $S_1 = U_1 I = 1$ VA i $S_2 = U_2 I = 7 \Rightarrow S_1/S_2 = U_1/U_2 = 1/7 \Rightarrow U_2 = 7U_1$.

Aktivne snage prijemnika su:

$P_1 = S_1\cos\varphi_1 = 0{,}5\sqrt{2}[\text{W}]$ i

$P_2 = S_2\cos\varphi_2 = 3{,}5\sqrt{2}[\text{W}]$

Reaktivne snage prijemnika su:

$Q_1 = S_1 \sin\varphi_1 = 0{,}5\sqrt{2}[\text{VAr}]$ i

$Q_2 = S_2 \sin\varphi_2 = -3{,}5\sqrt{2}[\text{VAr}]$.

Prividne snage prijemnika u kompleksnom obliku iznose:

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \left(0{,}5\sqrt{2} + j0{,}5\sqrt{2}\right)[\text{VA}],$$

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \left(3{,}5\sqrt{2} - j3{,}5\sqrt{2}\right)[\text{VA}].$$

Ukupna prividna snaga celog kola iznosi:

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \left(4\sqrt{2} - j3\sqrt{2}\right)(\text{VA}) \Rightarrow S = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}[\text{VA}].$$

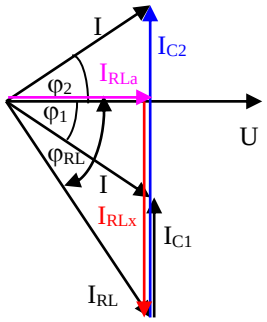
Dakle, ukupna aktivna, reaktivna i prividna snaga u celom kolu je:

aktivna: $P = 4\sqrt{2}$ [W],

reaktivna: $Q = -4\sqrt{2}$ [VAr] (kap. karaktera) i

prividna: $S = 5\sqrt{2}$ [VA].

6.85. -----



Fazni pomak između napona U i struje I_{RL} iznosi:

$\varphi_{RL} = \arccos 0{,}6 = 53{,}13°$.

Kako je aktivna snaga jednaka $P = UI_{RL}\cos\varphi_{RL}$, struja I_{RL} iznosi:

$$I_{RL} = \frac{P}{U\cos\varphi_{RL}} = \frac{1000}{220 \cdot 0{,}6} = 7{,}58[\text{A}].$$

Ako struju I_{RL}, prema fazorskom dijagramu, razložimo na njene komponente I_{Rla} i I_{RLx} one iznose:

$I_{Rla} = I_{RL}\cdot\cos\varphi_{RL} = 7{,}58\cdot 0{,}6 = 4{,}548$ [A].

$I_{RLx} = I_{RL}\cdot\sin\varphi_{RL} = 7{,}58\cdot 0{,}8 = 6{,}064$ [A].

Vezivanjem kondenzatora paralelno na prijemnik RL fazni pomak između ukupne struje I i napona U iznosi:

$\varphi = \arccos 0{,}9 = 25{,}84°$.

Ovaj fazni pomak može biti i pozitivan φ_1 (prevladava ind. opterećenje) i negativan φ_2 (kap. opterećenje).

Iz izraza:

$$\text{tg}\varphi_1 = \frac{I_{RLx} - I_{C1}}{I_{RLa}} \Rightarrow I_{RLx} - I_{C1} = I_{RLa}\cdot\text{tg}\varphi_1$$

$$\text{tg}\varphi_2 = \frac{I_{C2} - I_{RLx}}{I_{RLa}} \Rightarrow I_{C2} - I_{RLx} = I_{RLa}\cdot\text{tg}\varphi_2$$

izračunamo struje koje prolaze kroz kondenzator kapaciteta C. One iznose:

$I_{C1} = I_{Rlx} - I_{RLa}\cdot\text{tg}\,\varphi_1 = 6{,}064 - 4{,}548\cdot\text{tg}\,25{,}84° = 6{,}064 - 2{,}203 = 3{,}861$ [A] i

$I_{C2} = I_{RLx} + I_{RLa}\cdot\text{tg}\,\varphi_2 = 6{,}064 + 2{,}203 = 8{,}267$ [A].

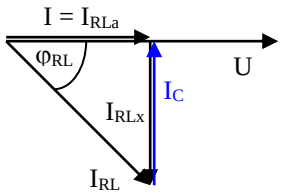
Kako je struja kondenzatora jednaka $I_C = \dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega C}} = \omega C\cdot U$, kapacitet kondenzatora iznosi:

$$C_1 = \frac{I_{C1}}{\omega U} = \frac{3{,}861}{314 \cdot 220} = 55{,}89\cdot 10^{-6}[\text{F}] = 55{,}89[\mu\text{F}],$$

$$C_2 = \frac{I_{C2}}{\omega U} = \frac{8{,}267}{314 \cdot 220} = 119{,}67\cdot 10^{-6}[\text{F}] = 119{,}67[\mu\text{F}].$$

Pošto se ostvari ista ukupna struja I (isto opterećenje mreže) i sa C_1 i sa C_2 logično je da se sa stanovišta praktičnosti uzima ona varijanta koja je ekonomičnija. To je varijanta sa $C_1 = 55{,}89$ μF, jer je ovaj kondenzator zbog manje kapacitivnosti i manjih dimenzija u odnosu na C_2.

6.86. -----



Iz fazorskog dijagrama, prema slici, sledi:

$$\sin\varphi_{RL}=\frac{I_{RLx}}{I_{RL}}=\frac{I_C}{I_{RL}}\Rightarrow I_C=I_{RL}\cdot\sin\varphi_{RL}=\frac{U}{Z}\cdot\frac{\omega L}{Z}=\frac{U\cdot\omega L}{Z^2}.$$

Kako je $I_C=\dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega C}}=U\cdot\omega C$, dobije s

Kapacitivnost kondenzatora sa kojim se ostvari da su napon U i struja I u fazi iznosi:

$$C=\frac{L}{Z^2}=125\cdot10^{-6}\,[\mathrm{F}]=125\,[\mu\mathrm{F}].$$

Faktor snage kola, nakon vezivanja kondenzatora, je:

cos φ = 1.

6.87. -----

$$w_L=\frac{Li^2}{2}\Rightarrow W_{L\max}=\frac{LI_m^{\,2}}{2}=\frac{L\cdot\left(I\sqrt{2}\right)^2}{2}=LI^2=L\cdot\left(\frac{U}{2\pi fL}\right)^2=\frac{U^2}{(2\pi f)^2L}=\frac{220^2}{314^2\cdot1}=0{,}491\,[\mathrm{J}].$$

6.88. -----

$$w_C=\frac{Cu^2}{2}\Rightarrow W_{C\max}=\frac{C\cdot U_m^{\,2}}{2}=\frac{C\cdot\left(U\sqrt{2}\right)}{2}=CU^2=10^{-6}\cdot\left(10\cdot10^3\right)^2=100\,[\mathrm{J}].$$

Da bi se ostvario kondenzator od 1 μF, površina njegovih ploča mora da bude najmanja (C = εS/d):

$$S=\frac{C\cdot d}{\varepsilon}=\frac{C\cdot\frac{U}{E}}{\varepsilon}=\frac{10^{-6}\cdot\frac{10\cdot10^3}{3\cdot10^6}}{8{,}854\cdot10^{-12}}=\frac{10}{3\cdot8{,}854}\cdot10^3=376{,}5\,[\mathrm{m}^2].$$

Očito je da je kondenzator sa ovolikom površinom praktično vrlo teško ostvariti.

Napomena! Dielektrična čvrstoća vazduha iznosi E_m = 3 [kV/mm] = $3\cdot10^6$ [V/m].

6.89. ----- $i = I_m \cos(\omega t - \pi/2) = I_m \sin\omega t$, $p = ui = (U_m I_m/2)\sin 2\omega t = UI\sin 2\omega t$. Aktivna snaga i generatora i kalema je P = 0, a reaktivna snaga generatora jednaka je reaktivnoj snazi kalema, i ona iznosi $Q = UI = U^2/\omega L$. Iz izraza $p = UI\sin 2\omega t$, vidi se da kalem prima energiju od generatora u trenutcima kada jačina struje raste po apsolutnoj vrednosti, a da vraća energiju generatoru kada ta apsolutna vrednost struje opada (snaga kalema negativna). Lako se uočava da je reaktivna snaga kalema jednaka amplitudi trenutne snage. Dakle, ovde reaktivna energija oscilira između generatora i kalema. Čitaocu se ostavlja da to osciliranje u potpunosti razjasni.

6.90. ---- I = U/R (bez C). Kako je $R = 1/\omega C$ ($R\omega C = 1$) $\Rightarrow I_1 = U\sqrt{2}/R$, kada je priključen R i C. Snaga gubitaka u napojnom vodu, kada je priključen i kondenzator iznosi $P_1 = I_1^2R = 2U^2/R = 2P$. Da li je, i zašto, aktivna snaga paralelne veze otpornika i kondenzatora veća od samog otpornika ?

6.91. ---- ($u = u_L + u_C$) $\Rightarrow$ $u_C = u - u_L = 20\sin 10^5t - 10\cos(10^5t + \pi/2)$ $\Rightarrow$
$u_C = 20\sin 10^5t - 10\sin(10^5t + \pi/2 + \pi/2) = 20\sin 10^5t + 10\sin 10^5t = 30\sin 10^5t$ [V]. Dakle, U_{Cm} = 30 V. Maksimalna trenutna energija kondenzatora je:

$$W_{cm}=\frac{1}{2}U_{cm}^{\,2}\cdot C\Rightarrow C=\frac{2W_{cm}}{U_{cm}^{\,2}}=10^{-6}\ \mathrm{F}=1\ \mu\mathrm{F}.$$

te je $X_C = 1/\omega C = 10\ \Omega$. $\Rightarrow$ $I = U_C/X_C = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ [A] $\Rightarrow$ $X_L = U_L/I = \dfrac{10}{3}$ [Ω] = ωL $\Rightarrow$

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{100}{3}\cdot10^{-6}\,\mathrm{H}=\frac{100}{3}\,\mu\mathrm{H}.$$

6.92. ----- $W_{Lm} = I_m^2 L/2$; $X_L = \omega L = 10\ \Omega$; $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 10\sqrt{2}$ [Ω] ; $I_m = E_m/Z = 5\sqrt{2}$ [A].

Kako je za $i = I_m \Rightarrow w_L = W_{Lm} = Li^2/2$; $\text{tg}\,\varphi = X_L/R = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$.

$i = I_m \cos(\omega t + 45° - 45°) = 5\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow i = I_m$ za $\omega t = 0°$ ili $180°$ (π rad) U ovom trenutku (kada je struja jednaka nuli) ems iznosi:

$e = 100\cos(0 + \pi/4) = 50\sqrt{2}$, odnosno $e = 100\cos(\pi + \pi/4) = -50\sqrt{2}$.

Dakle, krajnje rešenje je $e = \pm 50\sqrt{2}$ V.

6.93. ----- $X_C = 1/\omega C = 10^3\ \Omega$. Kako je $R = X_C \Rightarrow \varphi = -\pi/4$.

$i = i_R = I_m \sin\omega t = 0 \Rightarrow \omega t = 0$ ili π rad.

$E = E_m \sin(\omega t - \pi/4) = \sqrt{2}\sin(-\pi/4) = -1$ V; odnosno $e = 100\sin(\pi - \pi/4) = -1$ V.

Rešenje je $e = \pm 1$ V.

6.94. ----- Impedansa prijemnika je $\underline{Z}_P = R + j(X_L - X_C) = 1 + j\,5$.

Ekvivalentna impedansa kola je $\underline{Z}_e = \underline{Z}_g + \underline{Z}_P = 5\ \Omega$, pa je struja u kolu: $I = E/Z_e = 1$ A.

Napon na kondenzatoru (efektivna vrednost) iznosi $U_C = X_C \cdot I = 5$ V. Ako struju u kolu postavimo u faznu osu (početni ugao jednak nuli), njen analitički izraz je: $i = I_m \sin\omega t$. U ovom slučaju napon na kondenzatoru kasni za π/2, pa je njegov analitički izraz: $u_C = U_{Cm}\sin(\omega t - \pi/2) = -U_{Cm}\cos\omega t$.. Za $\omega t = 0 \Rightarrow u_C = -U_{Cm}$ (ili za $\omega = \pi$ rad $\Rightarrow u_C = U_{Cm}$). U ovim trenutcima struja je jednaka nuli ($i = 0$), pa je i trenutna snaga na otporniku R jednaka nuli ($p = i^2 r = 0$ W). U trenutku kada je napon na kondenzatoru jednak nuli ($\omega t = \pi/2$) struja ima maksimalnu vrednost, i ona iznosi $i = I_m = \sqrt{2}$ A. U ovom trenutku nastaje maksimalna snaga na otporniku i ona iznosi: $p = i^2 R = 2$ W.

6.95.----- $u = 30\sin(\omega t + 60°) \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = \dfrac{30}{\sqrt{2}} \cdot e^{j60°} = \dfrac{30}{\sqrt{2}}\left(\cos 60° + j\sin 60°\right) = \dfrac{15}{\sqrt{2}} + j\dfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$i = 6\sin(\omega t + 30°) \Rightarrow \underline{I} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30°} = \dfrac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos 30° + j\sin 30°\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + j\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = \left(\frac{15}{\sqrt{2}} + j\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + j\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left(45\sqrt{3} + j45\right)$$

Kako je $\underline{S} = P + j\,Q \Rightarrow$ a) $P = 45\sqrt{3}$ [W]; b) $Q = 45$ [VAR].

Iz $P = I^2 R \Rightarrow R = P/I^2 = 2{,}5\sqrt{3}\ \Omega$; odnosno $Q = I^2 X \Rightarrow X = Q/I^2 = 2{,}5\ \Omega$. Iz izraza za snagu vidi se da prevladava induktivno opterećenje ($Q > 0$), pa sledi da je $X_L = X = 2{,}5\ \Omega$.

Iz impedanse $\underline{Z} = R + j\,X_L = 2{,}5\sqrt{3} + j\,2{,}5 \Rightarrow Z^2 = 6{,}25 \cdot 3 + 6{,}25 = 25$.

c) Konduktansa iznosi: $G = R/Z^2 = 0{,}1\sqrt{3}$ S, odnosno

d) susceptansa $B_L = X_L/Z^2 = 0{,}1$ S.

e) Prevladava induktivno opterećenje.

6.96. ----- $L_{12} = \dfrac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \dfrac{2}{3}[\mu\text{H}]$; $X_{L12} = \omega L_{12} = \dfrac{20}{3}\ \Omega$; $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 20\ \Omega$.

$$\underline{Z}_e = R + \frac{jX_{L12} \cdot (-jX_C)}{jX_{L12} - jX_C} = (10 + j10)\ \Omega\ ; \quad I = I_g = \sqrt{2}\ \text{A}.$$

a) $P = I^2 R = 20$ W; b) $Q = I^2 X = 20$ VAR; c) $\underline{S} = P + jQ = (20 + j\,20)$ VA d) $S = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}$ VA.

e) Kako je $R = X = 10\ \Omega \Rightarrow \varphi = 45°$ (ind.); $U_{13} = I \cdot Z_{13} = \sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 20$ V.

Struja strujnog generatora ima sledeći analitički izraz: $i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\sin(\omega t - 45°) = 2\sin(\omega t - 45°)$, a napon (ukupni) između tačaka 1 i 3: $u_{13} = U_{13m}\sin(\omega t - 45° + 45°) = 20\sqrt{2}\sin\omega t$.

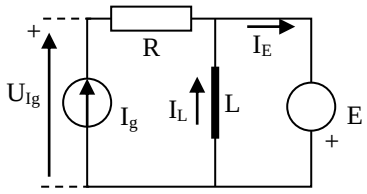
Analitički izraz (trenutna vrednost) za snagu idealnog strujnog generatora (snaga koju generator daje kolu) je:

$$p = i_g \cdot u_{13} = 2\sin(\omega t - 45°) \cdot 20\sqrt{2}\sin\omega t = 40\sqrt{2}\sin\omega t \sin(\omega t - \pi/4)\ \text{[W]}.$$

6.97. ----- $P = I^2R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 2$ A. $S = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ VA (prevladava kap. opt.)

$E = S/I = 50$ V; $Z = E/I = 25\ \Omega$; $X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = 20\ \Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{20 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-6}$ F $= 5\ \mu$F.

6.98. -----



$i_g = 2 \cos \omega t = 2 \sin (\omega t + \pi/2)$ [A] ; $\Rightarrow$ $\underline{I}_g = j\sqrt{2}$ A;

$e = 4 \sin \omega t$ [V] $\Rightarrow$ $\underline{E} = 2\sqrt{2}$ V.

$\underline{U}_{Ig} - \underline{I}_g R + \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{U}_{Ig} = \underline{I}_g R - \underline{E} = j\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$;

$\underline{S}_{Ig} = \underline{U}_{Ig} \cdot \underline{I}_g^* = (-2\sqrt{2} + j\sqrt{2}) \cdot j\sqrt{2} = (2 + j\,4)$ VA.

$I_L = \frac{\underline{E}}{j\omega L} = \frac{2\sqrt{2}}{j2} = -j\sqrt{2}$ [A]; $\underline{I}_E = \underline{I}_g + \underline{I}_L = 0 \Rightarrow$

$S_E = E \cdot I = 0$.

6.99. ----- $\cos \varphi_1 = 0{,}8 \Rightarrow \varphi_1 = 36{,}87° \Rightarrow \sin \varphi_1 = 0{,}6$ (kap.) ; $\sin \varphi = Q/S \Rightarrow S_1 = Q/\sin \varphi_1 = 50$ VA.

$P_1 = S_1 \cos \varphi_1 = 40$ W; $P_e = P_1 + P_2 \Rightarrow P_2 = P_e - P_1 = 20$ W.

Kako je $\underline{S}_1 = P_1 - j\,Q_1 = (40 - j\,30)$ VA; $S_1 = U_1 I_1 \Rightarrow I_1 = S_1 / U_1 = 1$ A ($I_1 = I_2 = 1$ A).

Ako pretpostavimo da je struja u faznoj osi (početni ugao jednak nuli), tada je njen kompleksni izraz jednak: $\underline{I} = 1 \cdot e^{j0°} = 1$ [A]. Napon U_1, zbog prevladavanja kapacitivnosti će da kasni za strujom, pa je njegov kompleksni izraz jednak: $\underline{U}_1 = 50 \cdot e^{-j\,36{,}87°} \Rightarrow \underline{U}_1 = (40 - j\,30)$ V $\Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}} = (40 - j\,30)$ [Ω].

$P_2 = R_2 I^2 \Rightarrow R_2 = P_2 / I^2 = 20\ \Omega$; $S_e = UI = 100$ VA $\Rightarrow Q_e = \sqrt{S^2 - P^2} = -80$ VAR (kap.)

Kako je $Q_e = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_e - Q_1 = -50$ VAR (znak ″–″ govori samo o tome da se radi o kap. opt.).

Iz $Q_2 = I^2 X_2 \Rightarrow X_2 = Q_2 / I^2 = 50$ [Ω] (kap.).

Kompleksne impedanse obaju prijemnika su: $\underline{Z}_1 = (40 - j\,30)$ [Ω], odnosno $\underline{Z}_2 = ((20 - j\,50)$ [Ω].

6.100. ----- Admitansa paralelne veze je $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_{R2L2} = j\,B_C + G_{R2} - j\,B_{L2}$

$B_C = 1/X_C$; $G_{R2} = R_2 / (R_2^2 + X_{L2}^2) = 0{,}0144$ S ; $B_L = X_L / (R_2^2 + X_{L2}^2) = 0{,}0227$ S $\Rightarrow$

$$\underline{Y}_{12} = 0{,}0144 + j\left(\frac{1}{X_C} - 0{,}0227 \right) \text{ [S]}.$$

Da bi ukupna struja (struja strujnog generatora I_g) bila u fazi sa naponom U_C, tada paralelna veza (C i R_2, L_2) mora biti savršeno termogena ($U_C = U_{12}$). To znači da je imaginarni deo admitanse (susceptansa) jednak nule, te je: $1 / X_C = 0{,}0227 \Rightarrow X_C = 44{,}053$ [Ω].

$C = 1 / \omega C = 72{,}29\ \mu$F.

Kako je $\underline{Y}_{12} = 0{,}0144 \Rightarrow \underline{Z}_{12} = 1 / \underline{Y}_{12} = 69{,}44$ [Ω] $\Rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12} = (71{,}44 + j\,15{,}7)$ [Ω];

$\underline{S}_{Ig} = \underline{Z}_e \cdot \underline{I}_g^2 = (643 + j\,141{,}3)$ [VA].

6.101. ----- Efektivna vrednost napona je $U = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ [V]. $\Rightarrow$ $I_3 = U \cdot Y_3 = 10 \cdot \sqrt{20^2 + 50^2} = 0{,}54$ [A].

$\underline{Z}_3 = \dfrac{1}{\underline{Y}_3} = \dfrac{1}{(20 - j50)\cdot 10^{-3}} = (6{,}9 + j17{,}2)$ [Ω] $\Rightarrow R_3 = 6{,}9$ [Ω], $X_3 = 17{,}24$ [Ω] (ind.).

$P_3 = I_3^2 R_3 = 2$ [W]; $Q_3 = I_3^2 X_3 = 5$ [VAR].

Ukupna aktivna snaga kola je: $P_e = P_{12} + P_3 = I^2 R_e = 6$ [W] $\Rightarrow$ $R_e = P_e / I^2 = 6$ [Ω.

Ukupna prividna snaga kola je: $S_e = UI = 10$ [VA].

Ukupna reaktivna snaga kola je: $Q_e = \sqrt{S_e^{\,2} - P_e^{\,2}} = 8$ [VAR].

Kako je $Q_e = X_e I^2$ $\Rightarrow$ $X_e = Q_e / I^2 = 8$ [Ω].

Iz izraza $\underline{Z}_e = R_e \pm j\, X_e = 6 \pm j\, 8$ $\Rightarrow$ $G_e = R / Z_e^2 = 0{,}06$ [S], $B_e = X_e / Z_e^2 = 0{,}08$ [S].

Ukupna admitansa kola iznosi: $\underline{Y} = (60 \pm j\, 60)\cdot 10^{-3}$ [S].

Kako je $\underline{Y} = \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_3$ $\Rightarrow$ $\underline{Y}_{12} = \underline{Y} - \underline{Y}_3 = (60 \pm j\, 80) - (20 - j\, 50) = 40 + j\, (50 \pm 80)$ $\Rightarrow$ $G_{12} = 40$ [mS], $B_{12} = 130$ [mS] ili -30 [mS]. Kako je ova grana pretežno induktivna, tada je $B_{12} < 0$ pa otpada prvo rešenje (pozitivno), što znači da je $B_{12} = -$ [mS].

Dakle, rešenje ukupne admitanse glasi: $\underline{Y} = (60 - j\, 80)$ [mS] $\Rightarrow$ $\underline{Z} = (6 + j\, 8)$ [Ω].

Kako je $\underline{Y}_{12} = (40 - j\, 30)$ [mS] $\Rightarrow$ $\underline{Y}_{12} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ [mS].

$\underline{Z}_{12} = \dfrac{1}{\underline{Y}_{12}} = \dfrac{1}{(40 - j30)\cdot 10^{-3}} = (16 + j\, 12)$ [Ω].

Iz impedanse, $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $\Rightarrow$ $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_2$ $\Rightarrow$

$\underline{Z}_1 = (10 + j\, 20)$ [Ω].

6.102. ----- $Q_e = I_g^2 \cdot X_e$ $\Rightarrow$ $X_e = Q_e / I_g^2 = 80$ [Ω] (ind.);

$\underline{Y}_2 = G_2 \pm j\, B_2 = (0{,}01 \pm j\, B_2)$ [S] ; $\underline{Y}_3 = G_3 + j\, B_3 = (G_3 + j\, \dfrac{1}{85})$ [S].

$Q_1 = I_g^2 \cdot X_1 = 0{,}2^2 \cdot 45 = 1{,}8$ [VAR] (ind.);

Kako je $Q = Q_1 + Q_{23}$ $\Rightarrow$ $Q_{23} = Q - Q_1 = 3{,}2 - 1{,}8 = 1{,}4$ [VAR] (ind).

$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0{,}01 \pm j\, B_2 + G_3 + j\, \dfrac{1}{85} = (0{,}01 + G_3) + j\, (\dfrac{1}{85} \pm B_2)$.

$I_g = U_{23} \cdot Y_{23}$ $\Rightarrow$ $Y_{23} = I_g \big/ U_{23} = 0{,}2 \big/ \sqrt{11^2 + 7^2} = 0{,}0153$ [S].

$Q_{23} = I_g^2 \cdot X_{23}$ $\Rightarrow$ $X_{23} = Q_{23} / I_g^2 = 35$ [Ω] ; $Z_{23} = U_{23} / I_g = 65{,}19$ [Ω].

Iz $Z_{23} = \sqrt{R_{23}^{\,2} + X_{23}^{\,2}}$ $\Rightarrow R_{23} = \sqrt{Z_{23}^{\,2} - X_{23}^{\,2}} = 55$ [Ω].

Dakle, $\underline{Z}_{23} = (55 + j\, 35)$ [Ω] (prevladava induktivno opterećenje: $Q_{23} > 0$).

$G_{23} = \dfrac{R_{23}}{Z_{23}^{\,2}} = 0{,}0129$ [S] ; $B_{23} = \dfrac{X_{23}}{Z_{23}^{\,2}} = 0{,}0082$ [S] $\Rightarrow$ $\underline{Y}_{23} = (0{,}0129 - 0{,}0082)$ [S].

Kako je $G_{23} = G_2 + G_3$ $\Rightarrow$ $G_3 = G_{23} - G_2 = 0{,}0029$ [S] ; $\dfrac{1}{85} \pm B_2 = -0{,}0082$ $\Rightarrow$ $\pm B_2 = -0{,}02$ [S]. Očito je da B_2 mora biti negativnog predznaka kako bi konačno rešenje (susceptansa B_{23}) bilo negativno tj kako bi prevladavalo induktivno opterećenje . Dakle, $B_2 = -0{,}02$ [S]

Admitanse paralelnih grana iznose kompleksno:

$\underline{Y}_2 = (G_2 - jB_2) = (0{,}01 - j\, 0{,}02)$ [S], odnosno $\underline{Y}_3 = (G_3 + jB_3) = (0{,}0029 + j\, 0{,}01176)$ [S].

Kompleksna impedansa druge grane iznosi: $\underline{Z}_2 = \dfrac{1}{\underline{Y}_2} = \dfrac{1}{0{,}01 - j0{,}02} = (20 + j40)$ [Ω].

Ukupna kompleksna struja iznosi: $\underline{I} = \underline{I}_g = \dfrac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}$ $\underline{U}_{23} \cdot \underline{Y}_{23} = -0{,}2$ [A].

Ukupna kompleksna impedansa iznosi: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = (80 + j\, 80)$ [Ω].

Konačno, kompleksni napon između tačaka 1 i 3 (ukupni napon kola, tj. napon strujnog generatora) jednak je:

$\underline{U}_{13} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = -0{,}2 \cdot (80 + j\, 80) = -(16 + j\, 16)$ [V].

6.103. ----- $P_2 = I_2^2R_2 \Rightarrow\ I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = 1$ [A]; $Q_3 = I_2^2X_3 \Rightarrow\ X_3 = \frac{Q_3}{I_2^{\,2}} = 40$ [Ω]; $Z_{23} = \frac{E}{I_2} = 20\sqrt{2}$ [Ω].

$\underline{Z}_{23} = R_{23} + jX_{23} \Rightarrow\ X_{23} = \sqrt{Z_{23}^{\,2} - R_{23}^{\,2}} = 20$ [Ω] ($X_{23} > 0$, jer prevladava ind. opt.) $\underline{Z}_{23} = 20 + j\,20$

$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 5 + j\,(X_{L2} - X_{C2}) + 15 + j\,40 = 20 + j\,(40 + \omega L - \frac{1}{\omega C}) \Rightarrow\ 40 + \omega L - \frac{1}{\omega C} = 20 \Rightarrow$

$L_2\omega^2 + 20\omega - 1/C = 0 \ \Rightarrow\ 2\cdot10^{-3}\omega^2 + 20\omega - 1 / 2{,}5\cdot10^{-6} = 0 \ \Rightarrow$

$\omega_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{400 + 4\cdot2\cdot10^{-3}\cdot10^6/2{,}5}}{2\cdot2\cdot10^{-3}} = \frac{-20 \pm 60}{4\cdot10^{-3}}$. Kako je frekvencija uvek pozitivna ($f > 0$), ostaje samo

jedno rešenje, koje iznosi: $\omega = \frac{-20+60}{4}\cdot10^3 = 10^4$ [rad/s]

Iz reaktivne otpornosti $X_3 = \omega L_3 \Rightarrow\ L_3 = X_3/\omega = 4$ [mH].

a) Impedansa prvog prijemnika iznosi:

$\underline{Z}_1 = 60 + j\,(\omega L_1 - 1/\omega C_1) = (60 + j\,80)$ [Ω].. prevladava ind. opterećenje. $\Rightarrow\ Z_1 = 100$ [Ω].

$I_1 = E / Z_1 = 0{,}2\sqrt{2}$ [A].

b) Aktivna snaga na impedansi Z_1 je $P_1 = I_1^2\cdot R_1 = 4{,}8$ W, a reaktivna $Q_1 = I_1\cdot X_1 = 6{,}4$ [VAR].

Kako je $\underline{Z}_{23} = (20 + j\,20)$ [Ω] $\Rightarrow\ P_{23} = I_2^2\cdot R_{23} = 20$ W, odnosno $Q_{23} = I_2^2\cdot X_{23} = 20$ [VAR].

Ukupna aktivna snaga svih potrošača je $P = P_1 + P_{23} = 24{,}8$ [W] a reaktivna $Q = Q_1 + Q_{23} = 26{,}4$ [VAR].

Ukupna prividna snaga iznosi $S = \sqrt{24{,}8^2 + 26{,}4^2} = 36{,}22$ [VA].

c) Za $f' = f/2 \ \Rightarrow\ \omega' = \omega/2 = 5\cdot10^3$ [rad/s].

Impedanse sa ovom frekvencijom iznose:

$\underline{Z}_1' = R_1 + j\left(\omega' L_1 - \frac{1}{\omega' C_1}\right) = (60 + j\,10)$ [Ω] ; $\underline{Z}_2' = R_2 + j\left(\omega' L_2 - \frac{1}{\omega' C_2}\right) = (5 - j\,70)$ [Ω] ;

$\underline{Z}_3' = R_3 + j\omega' L_3 = (15 + j\,20)$ [Ω]; $\underline{Z}_{23}' = \underline{Z}_2' + \underline{Z}_3' = (20 - j\,50)$ [Ω];

$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_1'\cdot\underline{Z}_{23}'}{\underline{Z}_1' + \underline{Z}_{23}'} = (31 - j\,19{,}5)$ [Ω] $\Rightarrow\ \underline{Z}' = \sqrt{31^2 + 19{,}5^2} = 36{,}62$ [Ω]; $I' = E/Z' = 0{,}77$ [A].

Sada su snage u kolu,

Aktivna: $P' = I'^2R_e' = 0{,}77^2\cdot31 = 18{,}49$ [W], a reaktivna: $Q' = I'^2\cdot X_e' = 0{,}77^2\cdot19{,}5 = -11{,}56$ [VAR]

(prevladava kap. pterećenje).

Promene (priraštaji) ovih snaga su:

-za aktivnu: $\Delta P = P' - P = -6{,}31$ [W], što znači da se aktivna snaga smanjila za 6,31 W.

-za reaktivnu: $\Delta Q = Q' - Q = -11{,}56 - 26{,}4 = -37{,}96$ [VAR].

Dakle, reaktivna snaga je sa vrednosti $Q = 26{,}4$ (ind. opterećenja) pala na vrednost $-11{,}56$ (kap. opterećenje) što predstavlja razliku (pad) od 37,96 VAR-a.

6.104. ----- $\underline{I}_2 = (0{,}6 - j\,0{,}8)\cdot\underline{I}_3$; $\underline{I}_1 = 40\sqrt{2}\cdot e^{-j\,45°}$ [mA] $= (40 - j\,40)$ [mA] ;

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (0{,}6 - j\,0{,}8)\cdot\underline{I}_3 + \underline{I}_3 = (1{,}6 - j\,0{,}8)\cdot\underline{I}_3 \ \Rightarrow\ \underline{I}_3 = \frac{40 - j40}{1{,}6 - j0{,}8} = (30 - j10)$ [mA].

$\underline{I}_2 = (0{,}6 - j\,0{,}8)\cdot(30 - j\,10) = (10 - j\,30)$ [mA] $\Rightarrow\ I_2 = \sqrt{10^2 + 30^2} = 10\sqrt{10}$ [mA].

$P_2 = I_2^2\cdot R_2 \ \Rightarrow\ R_2 = \frac{P_2}{I_2^{\,2}} = \frac{0{,}7}{\left(10\sqrt{10}\cdot10^{-3}\right)^2} = 700$ [Ω]; $Q_2 = I_2^2\cdot X_2 \ \Rightarrow\ X_2 = \frac{Q_2}{I_2^{\,2}} = \frac{0{,}1}{\left(10\sqrt{10}\cdot10^{-3}\right)^2} = 100$ [Ω].

$\underline{Z}_2 = (700 + j\,100)$ [Ω]; $\underline{U}_{23} = \underline{I}_2\cdot\underline{Z}_2 = (10 - j\,30)\cdot10^{-3}\cdot(700 + j\,100) = (10 - j\,20)$ [V].

$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{I}_3} = \frac{10 - j20}{(30 - j10)\cdot10^{-3}} = (500 - j500)$ [Ω];

a) $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = (125 + j375) + \frac{(700 + j100)\cdot(500 - j500)}{700 + j100 + 500 - j500} = (500 + j250)$ [Ω].

b) Za $f' = 2f$ $(\omega' = 2\omega) \Rightarrow$

$X_{L1}' = \omega' L_1 = 2\omega L_1 = 2X_{L1} = 2\cdot375 = 750$ [Ω] $\Rightarrow\ \underline{Z}_1' = (R_1 + j\,X_{L1}') = (125 + j\,750)$ [Ω];

$X_{L2}' = \omega' L_2 = 2\omega L_2 = 2X_{L2} = 2\cdot100 = 200$ [Ω] $\Rightarrow\ \underline{Z}_2' = (R_2 + j\,X_{L2}') = (700 + j\,200)$ [Ω];

$X_{C3}' = \dfrac{1}{\omega' C} = \dfrac{1}{2\omega C} = \dfrac{X_{C3}}{2} = \dfrac{500}{2} = 250\ [\Omega] \Rightarrow \underline{Z}_3' = (\ R_3 - j\ X_{C3}'\ ) = (\ 500 - j\ 250\ )\ [\Omega].$

$$\underline{Z}' = \underline{Z}_1' + \frac{\underline{Z}_2' \cdot \underline{Z}_3'}{\underline{Z}_2' + \underline{Z}_3'} = (125 + j750) + \frac{(700 + j200)\cdot(500 - j250)}{700 + j200 + 500 - j250} = (460 + j701{,}47)\ [\Omega].$$

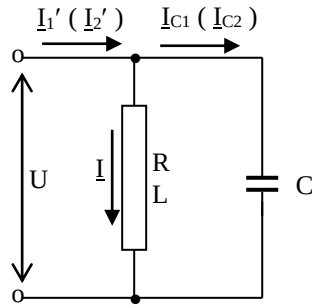
$$\frac{\underline{I}_1'}{\underline{I}_1} = \frac{\dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}'}}{\dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'} = \frac{500 + j250}{460 + j701{,}47} \Rightarrow$$

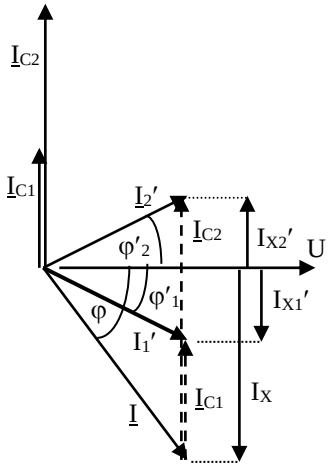
$$\underline{I}_1' = \frac{500 + j250}{460 + j701{,}47}\cdot \underline{I}_1 = \frac{500 + j250}{460 + j701{,}47}\cdot(40 - j40)\cdot 10^{-3} = (9{,}64 - j36{,}44)\cdot 10^{-3}\ [\text{A}] = (\ 9{,}64 - j\ 36{,}44\ )\ [\text{mA}].$$

6.105. ----- $\cos\varphi = 0{,}6 \Rightarrow \varphi = 53{,}13° \Rightarrow \sin\varphi = 0{,}8$; $\cos\varphi' = 0{,}8 \Rightarrow \varphi' = 36{,}87° \Rightarrow \sin\varphi' = 0{,}6.$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \Rightarrow S = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{48\pi}{0{,}6} = 80\pi\ [\text{KVA}];\quad I = \frac{S}{U} = \frac{80\pi\cdot 10^3}{1\cdot 10^3} = 80\pi\ [\text{A}].$$

Paralelnim vezivanjem kondenzatora na RL prijemnik, kroz kondenzator teče struja I_C, koja fazno prednjači naponu za $\pi/2$, pa se ukupna struja kola povećava za struju kondenzatora, i ona iznosi : $\underline{I}' = \underline{I} + \underline{I}_C$.





Struju I koja protiče kroz RL prijemnik, kako pre vezivanja kondenzatora, tako i nakon njegovog uključenja, možemo razložiti na aktivnu i reaktivnu komponentu:
Aktivna komponenta (koja je u fazi sa naponom) iznosi : $I_a = I\cos\varphi = 150{,}72$ [A],
dok je reaktivna komponenta (kasni za naponom za $\pi/2$) jednaka : $I_X = I\sin\varphi = 200{,}96$ [A].

Iz vektorskog dijagrama sledi: $I_a = I_1'\cos\varphi'$ (ili $I_a = I_2'\cos\varphi'$) $\Rightarrow$ $I_1' = I_2' = \dfrac{I_a}{\cos\varphi'} = \dfrac{150{,}72}{0{,}8} = 188{,}4\ [\text{A}].$

Kako je $\sin\varphi' = \dfrac{I_{X1}'}{I_1'} \Rightarrow I_{X1}' = I_1'\sin\varphi' = 188{,}4\cdot 0{,}6 = 113{,}04$ [A].

Sa vektorskog dijagrama se vidi da postoje dva rešenja (I_{C1} i I_{C2}).
Prvo rešenje: $I_{C1} = I_X - I_{X1}' = 87{,}92$ [A] I drugo rešenje: $I_{C2} = I_X + I_{X2}' = 314$ [A].

Iz relacije: $I_C = \dfrac{U}{X_C} = \dfrac{U}{\dfrac{1}{\omega C}} \Rightarrow C = \omega C\cdot U$.

Slede dva rešenja za kapacitet kondenzatora, sa kojim se ostvaruje faktor snage od $\cos\varphi' = 0{,}8$, i to:

$C_1 = \dfrac{I_{C1}}{\omega U} = \dfrac{87{,}92}{314\cdot 10^3} = 280\cdot 10^{-6}$ [F] $= 280$ [μF], I $C_2 = \dfrac{I_{C2}}{\omega U} = \dfrac{314}{314\cdot 10^3} = 10^{-3}$ [F] $= 1\ 000$ [μF].

U svakom slučaju koristi se samo prva varijanta, jer se sa njom ostvaruje isti faktor snage kao i sa drugom, dok je ekonomski efekat mnogo povoljniji . Što je kapacitet kondenzatora manji, manje su mu dimenzije (manja zapremina), pa je takav kondenzator i praktičnije (prostorno) i jeftiniji.

Dakle, konačno rešenje je: $C = C_1 = 280$ [μ].

6.106. ----- $\underline{E} = j\,10\sqrt{2}$ [V] ; $\underline{Z}_g = (5 - j\,20)$ [Ω].
Srednja snaga (aktivna) je maksimalna kada je struja u kolu najveća (impedansa najmanja), a to će se dogotiti kada se reaktanse međusobno ponište (ukupni reaktivni otpor jednak nuli). To praktično znači da se impedansa generatora i konjugovano kompleksna impedansa prijemnika, u ovom slučaju, međusobno izjednače.
Dakle, $\underline{Z}_P = \underline{Z}_g^* = (5 + j\,20)$ [Ω].
Sada je ekvivalentna impedansa kola: $\underline{Z}_e = \underline{Z}_g + \underline{Z}_p = 5 - j\,20 + 5 + j\,20 = 10$ [Ω].
Struja u kolu iznosi: $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_P} = \dfrac{\underline{E}}{2R} = \dfrac{j10\sqrt{2}}{10} = j\sqrt{2}$ [A] $\Rightarrow$ $I = \sqrt{2}$ [A]. Očito je, da je struja u ovom slučaju fazi sa ems E (naponska rezonansa).
Snaga na prijemniku (maksimalna) je $P = I^2 \cdot R = 2 \cdot 5 = 10$ [W].

6.107. ----- Kada je dioda propusna (pozitivna poluperioda), otpori grana su isti pa je efektivna vrednost struje za obe grane jednak , i one iznose:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R} = \frac{220}{2 \cdot 10^3} = 0{,}11 \text{ [A]}.$$

U drugoj polovini periode (negativna poluperioda) grana u kojoj se nalazi dioda je nepropusna (prekid), pa je ukupni otpor kola $R_e = R$. Struja koja prolazi kroz otpor bez diode ima istu efektivnu vrednost kao i kod pozitivnog talasa, pa je $I_1' = U / R = 0{,}11$ [A], što je ujedno i ukupna struja kola ($I_e' = I_1' = 0{,}11$ A). Efektivna vrednost struje u drugoj grani (sa diodom) jednak je nuli.
Dakle, efektivna vrednost struje u otporniku bez diode za celu periodu je $I_1 = 0{,}11$ A (isto kao i za polovinu),
dok za otpornik sa diodom je: $I_d^{\,2} = \dfrac{(I_2 + 0)}{2} = \dfrac{0{,}11}{2} \Rightarrow I_d = 0{,}0778$ [A].
NAPOMENA! Efektivna vrednost struje na kvadrat je srednja vrednost naizmenične struje na kvadratna (jer kvadrat struje stvara Džulovu toplotu).
Količina toplote koju stvara efektivna vrednost struje I_1 u otporniku bez diode je:

$$P_1 = I_1^2 R\, t = 0{,}11^2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 60 = 14\,520 \text{ [J]},$$

a u otporniku sa diodom:

$$P_2 = I_d^2 \cdot R \cdot t = 0{,}0778^2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 60 = 7\,260 \text{ [W]}.$$

Ukupna toplota u kolu je:

$$P = P_1 + P_2 = 21\,780 \text{ [W]}.$$

6.108. ----- Kada je dioda propusna (pozitivna polovina vala), otpor kola iznosi:

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 18{,}57[\Omega].$$

Efektivne vrednosti struja u otpornicima su (za prvu polovinu periode):

$$I_{R1} = I = \frac{U}{R_e} = 0{,}539 \text{ [A]}, \quad I_{R2} = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{I \cdot R_{23}}{R_2} = \frac{0{,}539 \cdot 8{,}57}{20} = 0{,}231 \text{ [A]} \quad \text{i} \quad I_{R3} = \frac{U_{23}}{R_3} = 0{,}308 \text{ [A]}.$$

U drugoj polovini periode (negativan val) dioda je nepropusna te je otpor $R_3 = \infty$, a ekvivalentni otpor kola sada iznosi:

$$R_e' = R_1 + R_2.$$

Efektivne vrednosti struja u ovom periodu su: $I_{R1}' = I_{R2}' = \dfrac{U}{R_e'} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$ [A], a $I_3' = 0$ [A].
Kako se efektivna vrednost računa za celu periodu, ekvivalentne efektivne vretnosti iznose:

$$I_{R1E}^{\,2} = \frac{I_{R1}^{\,2} + I_{R1}'^{\,2}}{2} = \frac{0{,}29052 + 0{,}11111}{2} = 0{,}20082 \Rightarrow I_{R1E} = 0{,}4481[\text{A}];$$

$$I_{R2E}^{\,2} = \frac{I_{R2}^{\,2} + I_{R2}'^{\,2}}{2} = \frac{0{,}05336 + 0{,}11111}{2} = 0{,}082235 \Rightarrow I_{R2E} = 0{,}2868[\text{A}] \quad \text{i}$$

$$I_{R3E}^{\,2} = \frac{I_{R3}^{\,2} + 0}{2} = \frac{0{,}308^{\,2}}{2} = 0{,}0474 \Rightarrow I_{R3E} = 0{,}2178[\text{A}].$$

Snaga na otporniku R_2 iznosi: $P_2 = I_{R2E}^2 \cdot R_2 = 0{,}2868 \cdot 20 = 1{,}645$ [W],
a na otporniku R_3: $P_{R3} = I_{R3E}^2 \cdot R_3 = 0{,}0474 \cdot 15 = 0{,}711$ [W].

6.109. -----

$$W = W_{max} = \frac{1}{2} L \cdot I_m^{\,2} = \frac{1}{2} \frac{X_L}{\omega_o} I_m^{\,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{X_C}{\omega_o} \cdot I_m^{\,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega_o^{\,2} C} \cdot I_m^{\,2} = \frac{\left(5 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^3\right)^2 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow$$

$$W = \frac{125}{\pi^2} \cdot 10^{-12} \left[\mathrm{J}\right] = \frac{125}{\pi^2} \left[\mathrm{pJ}\right].$$

6.110. ----- $X_p = X/2$; $X_r = 2X$; $Q_p = U^2/X_p$; $Q_r = (U/2)^2/X_r = U^2/4X_r$; $Q_p/Q_r = 4X_r/X_p = 4 \cdot 2X/(X/2) = 16$.

6.111. ----- $W_{max} = LI_m^2/2 = LI^2/2$; $W_1 = W \cdot 3/4 \Rightarrow W_1 = LI_1^2/2 \Rightarrow$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} LI_1^{\,2} \Rightarrow I_1^{\,2} = \frac{3}{4} I^2 \Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} I\,.$$

7.1.1. ----- a) Iz $\omega_o^2 = 1/LC \Rightarrow C = 1 / \omega_o^2 L = 1 / 314^2 \cdot 0{,}5 = 20{,}28$ μF;
b) $I = U/R = 25$ A; $U_L = U_C = I \cdot \omega_o L = 25 \cdot 314 \cdot 0{,}5 = 3\,925$ V.

7.1.2. ----- $X_L = X_{Ce} = \omega_o L = 2\pi \cdot 300 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 9{,}42$ [Ω]; $C_e = 1/\omega_o X_{ce} = 1/2\pi \cdot 300 \cdot 9{,}42 = 56{,}35 \cdot 10^{-6}$ [F] $\Rightarrow$ $C_e = C_1 \cdot C_2/(C_1+C_2) \Rightarrow 56{,}35 \cdot (100+C_2) = 100C_2 \Rightarrow C_2 = 129{,}1$ [μF]; $I = U/R = 10$ A.

7.1.3. ----- $Z_o = R = U/I_o = 637$ [Ω]; $X_C = 1/\omega_o C = U_C/I_o = 300/0{,}314 = 955{,}4 \Rightarrow C = 1/\omega_o \cdot X_C = 3{,}33$ [μF]; $L = X_L/\omega_o = 955{,}4/314 = 3{,}04$ [H].

7.1.4. ----- $Z_o = 50$ [Ω]; $X_L = X_C \Rightarrow C = 1/\omega_o^2 L$; $Z^2 = R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 \Rightarrow (\omega L - 1/\omega C)^2 = 130^2 - 50^2 \Rightarrow$ $\omega L - 1/\omega C = 120 \Rightarrow 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 L - \omega_o^2 L / 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 = 120 \Rightarrow L(25{,}12 \cdot 10^3 - 4\pi^2 10^6 / 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3) = 120 \Rightarrow$ $L(25\,120 - 1\,570) = 120 \Rightarrow L = 5{,}09 \cdot 10^{-3}$ [H] = 5,09 [mH]; $C = 1/4\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 5{,}09 \cdot 10^{-3} = 4{,}98 \cdot 10^{-6}$ [F] = 4,98 [μF].

7.1.5. ----- $C' = 1/\omega_o^2 L = 1/628^2 \cdot 0{,}5 = 5{,}07$ μF; $C' = \varepsilon S/d'$; $C = \varepsilon S/d$; $C/C' = d'/d \Rightarrow d' = Cd/C' = 20 \cdot 1/5{,}07$ $\Rightarrow$ $d' = 3{,}94$ mm; $\Delta d = d' - d = 3{,}94 - 1 = 2{,}94$ mm. Dakle treba povećati rastojanje za 2,94 mm.
$I_o/I = Z/R = 23{,}46$.

7.1.6. ----- $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4$ rad/s; $X_{Lo} = X_{Co} = \omega_o L = 100$ Ω; $Z_o = X_{Lo} - X_{Co} = 0$;
$\omega = 2\omega_o = 2 \cdot 10^4$ rad/s; $X_L = \omega L = 200$ Ω; $X_C = 1/\omega C = 50$ Ω; $Z = X_L - X_C = 150$ Ω (prevladava ind. opt.)

7.1.7. ----- $X_{Lo} = X_{Co} = 2\pi f_o L = 628$ Ω; $C = 1/2\pi f_o X_{Co} = 2{,}535$ nF; $I_o = U/R = \sqrt{2}/3 = 0{,}47$ A;
$U_{Co} = I_o \cdot X_{Co} = 296{,}04$ V $\Rightarrow$ $u_{Co} = 296{,}04 \cdot \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/2)$, jer U_C kasni za strujom I_o za T/4 (π/2).

7.1.8. ----- a) $f_o = 1\,000$ Hz;
b) $X_L = X_C = \omega_o L = 1\,061{,}32$ Ω; $U_C / U = X_C / R \Rightarrow U = U_C \cdot R / X_C = 37{,}69$ V;
c) $I_o = U/R = 1{,}88$ A;
d) $U_L = I_o \cdot \sqrt{R_L{}^2 + (\omega_o L)^2} \cong U_C \cong 2\,000$ V ($R_L << X_L$ pa se R_L može zanemariti).

7.1.9. ----- $\omega_o = 314$ rad/s ($f_o = 50$ Hz); $I_o = 22$ A; $U_L = U_C = \omega_o L \cdot I_o = 136{,}16$ V;

7.1.10. ----- $I_o = 10$ A; $\omega_o = 180$ rad/s;

7.1.11. ----- $X_L = X_C$ 0 $2R = 1/\omega_o C = 160$ Ω; $R = 80$ Ω; $L = 10$ mH; $I = 2{,}5$ A.

7.1.12. ----- $Z_o = R_e = R + R \cdot R /(R + R) = 30$ Ω; $I_o = U/R_e = 10$ A; $X_C = 1$ Ω; $U_C = 10$ V; $L = 10$ mH; $C = 10$ mF.

7.1.13. ----- $\omega_o = 2\,236{,}07$ rad/s; $I_o = U_L/\omega_o L = 223{,}607$; $R = U/I_o = 0{,}9$ Ω.

7.1.14. ----- $C = 250$ μF; Io = 10 A.

7.1.15. ----- $\omega_o = 1\,000$ rad/s; $\omega = 4 \cdot \omega_o = 4\,000$ rad/s; $Z_o = R = 10$ Ω; $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C} \right)^2} = 38{,}3$ Ω;

$$\frac{I_o}{I} = \frac{U/Z_o}{U/Z} = \frac{Z}{Z_o} = \frac{38{,}8}{10} = 3{,}88 .$$

7.1.16. ----- $I_o = \sqrt{5}\, I \Rightarrow \dfrac{U}{R} = \sqrt{5}\dfrac{U}{Z} \Rightarrow Z = \sqrt{5}\, R \Rightarrow Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \Rightarrow X_L - X_C = 2R = 20$ Ω;
$\omega L - 1/\omega C = 20 \Rightarrow \omega^2 L - 20\omega - 1/C = 0 \Rightarrow 2 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 20\,\omega - 1/20 \cdot 10^{-6} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 20\omega - 50\,000 = 0$

$$\omega_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^4}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 400}}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{20 \pm 28{,}28}{4 \cdot 10^{-3}} = 12070 \text{ Hz}$$

(drugo rešenje otpada, jer je f > 0).

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-8}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}} = 5000 \text{ Hz}.$$

$$\frac{\omega_o}{\omega} = \frac{5000}{12070} = 0{,}414$$

7.1.17. ----- $f_o = 100$ kHz; $Z_o = 10\sqrt{10}\ \Omega$;

7.1.18. ----- $C_e = C_1+C_2 = 60$ pF; $\omega_o^2 = 1/LC_e \Rightarrow \omega_o = 1{,}291\cdot10^6$ rad/s ; $f_o = \omega_o/2\pi = 205{,}6$ kHz; $T_o = 1/f_o = 4{,}86\cdot10^{-6}$ s.

7.1.19. ----- $Z_o = 3$ kΩ; $R = Z_o/Q = 187{,}5\ \Omega$; $L_o = Z_o/\omega_o = 477\ \mu$H; $C_o = 1/\omega_o Z_o = 477$ pF;

7.1.20. ----- f_o 159,2 Hz; $Q = \omega_o L /R = 159{,}2\cdot6{,}28\cdot0{,}2/10 = 20$.

7.1.21. ----- Širina propusnog opsega je: $2\Delta f_o = f_{2o} - f_{1o} = 1$ MHz $\Rightarrow \Delta f_o = 0{,}5$ MHz; $f_o = f_{1o} + \Delta f_o = 1{,}5$ MHz. Iz $f_o = 1/2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow C = 1/(2\pi f_o)^2 L = 145$ pF.

7.1.22. ----- $f_o = 2{,}25$ MHz; $f_1 = f_o - \Delta f_o = 2\,250 - 115/2 = 2\,249{,}943$ KHz; $f_2 = f_o + \Delta f_o = 2\,250{,}05$ KHz.

7.1.23. ----- $$\frac{2\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{1}{Q} \Rightarrow 2\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q} = \frac{\omega_o}{\frac{\omega_o L}{R}} = \frac{R}{L} = \frac{10}{300\cdot10^{-6}} = 33333{,}333 \Rightarrow 2\Delta f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 5307{,}86[\text{Hz}].$$

7.1.24. ----- $X_C = 1/\omega_o C = 159{,}2$ [Ω]; $U_L = U_C = I_o X_L = I_o X_C = 2U = 2U_R = 440$ V; $I_o = U_C/X_C = 2{,}76$ A; $R = U/I_o = 220/2{,}76 = 79{,}7$ [Ω]; $L = X_L/\omega_o = 159{,}2/314 = 507$ mH.

7.1.25. ----- $f_o = 123$ kHz; $U_{23}/U_{13} < \Rightarrow I\cdot X_C < I\cdot Z \Rightarrow X_c < Z \Rightarrow X_C^2 < R^2 + (X_L - X_C)^2 \Rightarrow$
$X_C^2 < R^2 + X_L^2 - 2X_L X_C + X_C^2 \Rightarrow 2X_L X_C - X_L^2 < R \Rightarrow 2\omega L/\omega C - \omega^2 L^2 < R \Rightarrow 2L/C - R < \omega^2 L^2 \Rightarrow$
$\omega^2 > (2L/C - R)/L^2 \Rightarrow \omega^2 > (4\cdot10^6 - 1)/4\cdot10^{-6} \Rightarrow \omega > 1999{,}99994\cdot10^3 \Rightarrow f = \omega/2\pi > 318{,}47$ kHz.

7.1.26. ----- $Q = X_L/R \Rightarrow X_L = QR = 10\ \Omega$; $L = X_L/\omega_o = 1{,}59\ \mu$H; $C = 1/\omega_o^2 L = 15{,}9$ nF

7.1.27. ----- $Z_o = \omega_o L = 1/\omega_o C = \sqrt{L/C}$ (karakteristična impedansa samo za LC) =250 Ω; $Q = \omega_o L/R \Rightarrow$ $R = \omega_o L/Q = 2{,}5\ \Omega$; $U = I_o R = 2{,}5$ mV; $\omega_o = 250/L = 25\cdot10^6$ rad/s $\Rightarrow f_o = 3{,}98$ MHz.

7.1.28. ----- Paralelnu vezu R i X_C pretvoriti u rednu vezu R′ i X_C′. $$\underline{Z}_{RC} = \frac{R\cdot(-jX_C)}{R - jX_C} = 160 - j80$$
Ukupna impedansa je jednaka: $\underline{Z_o} = \underline{Z}_{RC} + jX_L = 160 - j80 + jX_L = 160 + j(X_L - 60) \Rightarrow X_L = 80\ \Omega$.

7.1.29. ----- Paralelnu vezu R_1 i X_L pretvoriti u rednu vezu : $$\underline{Z}_1 = \frac{R_1\cdot jX_L}{R_1 + jX_L} = \frac{500\cdot j1000}{500 + j100} = 400 + j200\ .$$
Isto tako paralelnu vezu R_2 i X_C pretvoriti u rednu , pa sledi:
$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2\cdot(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \frac{-j500R_2}{R_2 - j500} = \frac{-j500R_2\cdot(R_2 + j500)}{R_2^2 + 500^2} = \frac{250000 - j500R_2^2}{R_2^2 + 250000} = \frac{25\cdot10^4}{R_2^2 + 25\cdot10^4} - j\frac{500R_2^2}{R_2^2 + 25\cdot10^4}$$
.
Ukupna impedansa je jednaka:
$$\underline{Z}_o = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 400 + j200 = 400 + \frac{25\cdot10^4}{R_2^2 + 25\cdot10^4} + j\left(200 - \frac{500R_2^2}{R_2^2 + 25\cdot10^4}\right)$$
Kako je kod rezonanse reaktansa jednaka nuli , sledi:
$$\frac{500R_2^2}{R_2^2 + 25\cdot10^4} = 200 \Rightarrow 500R_2^2 = 200R_2^2 + 50\cdot10^6 \Rightarrow 300R_2^2 = 50\cdot10^6 \Rightarrow R_2 = 408{,}25\ \Omega.$$
Ako uvrstimo R_2 u realni deo impedanse sledi: $\underline{Z_o} = 400 + 25\cdot10^4\cdot(408{,}25^2 + 25\cdot10^4) = 644{,}8\ \Omega$.

7.1.30. ----- $\omega_o = 5\,000$ rad/s

a) Da bi kolo bilo u rezonansi njegova ekvivalentna reaktansa mora biti jednaka nuli. Impedansa kola iznosi:

$$\underline{Z}_o' = j\omega_o' L + \frac{R\cdot(-j\frac{1}{\omega_o' C})}{R - j\frac{1}{\omega_o' C}} = \frac{R}{1+(\omega_o' RC)^2} + j\left(\omega_o' L - \frac{\omega_o' RC^2}{1+(\omega_o' RC)^2}\right) \Rightarrow \; L\cdot(1+\omega_o'^2R^2C^2) = RC^2 \Rightarrow$$

$$\omega_o' = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{R^2C-L}{L}} = 4330\,[\text{rad/s}].$$

Rezonantna kružna učestanost se smanjila za iz:nos: $\Delta\omega = \omega_o - \omega_o' = 670$ [rad/s] $\Rightarrow$ $\Delta f = f_o - f_o' = 106{,}7$ Hz.

b) Rezonantna kružna učestanost postoji sve dok je vrednost pod korenom u predhodnom izrazu pozitivna (diskriminanta ≥ 0). Ako je ta vrednost negativna rešenja su imaginarna (diskriminanta < 0), što znači da takva kružna učestanost ne postoji (nema realnog rešenja).

Dakle, $(R^2C - L)/L \leq 0 \Rightarrow R^2C - L \leq 0 \Rightarrow R^2C \leq L \Rightarrow R^2 \leq L/C \Rightarrow R \leq \sqrt{\frac{L}{C}} \leq 500\,[\Omega]$.

7.1.31. ----- a) $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

b) $Z_o = R$; $I = U/R$; $i = I_m \sin\omega_o t$; $W_L = LI^2/2 \Rightarrow w_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2\omega_o t$

$W_C = Q\cdot U_C/2 = U_C^2C/2$; $U_C = IX_C = I/\omega_o C$; $u_C = U_{Cm}\sin(\omega_o t - \pi/2) = U_{Cm}\cos\omega_o t \Rightarrow$

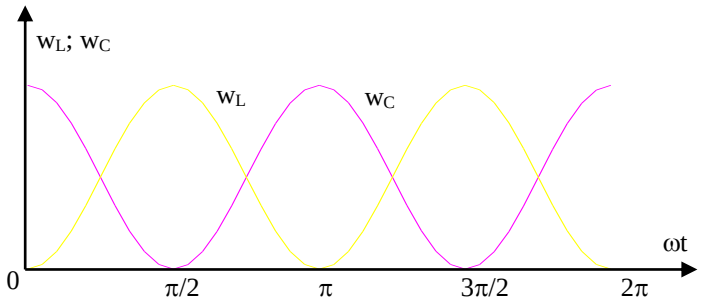
$$w_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}C\cdot U_{cm}^2\sin^2\left(\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}CU_{cm}^2\cos^2\omega_o t = \frac{1}{2}C\cdot\frac{I_m^2}{\omega_o^2C^2}\cos^2\omega_o t\,.$$

$$w_C = \frac{I_m^2}{2\omega_o^2 C}\cos^2\omega_o t\,.\;\text{Kako je}\;\; \omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_o^2 C} \Rightarrow \;\; w_C = \frac{1}{2}LI_m^2\cos^2\omega_o t$$

Ukupna energija je jednaka:

$$w = w_L + w_C = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2\omega_o t + \frac{1}{2}LI_m^2\cos^2\omega_o t = \frac{1}{2}LI_m^2(\sin^2\omega_o t + \cos^2\omega_o t) = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2\,.$$

Dakle, ukupna energija električnog i magnetnog polja jednaka je pojedinačnim energijama, koje su međusobno jednaka. Ovo potvrđuje dokaz o održanju energija. Ove dve energije (magnetna i električnog polja) se međusobno pretvaraju jedna u drugu, što se vidi i na grafičkom dijagramu.



7.1.32. ----- a) $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 650\,[\text{kHz}]$; $\frac{2\Delta\omega_o}{\omega_o} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \frac{2\Delta f_o}{f_o} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{f_o}{2\Delta f_o} = \frac{650}{14} = 46{,}43\,[\text{kHz}]$.

b) $Z_o = R$; $Q = \omega_o L/R \Rightarrow Z_o = \omega_o L/Q = 650\cdot10^3\cdot2\pi\cdot0{,}2\cdot10^{-3}/46{,}43 = 17{,}58$ [Ω].

c) $$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2} = \sqrt{17{,}58^2 + \left[2\pi(650+30)\cdot10^3\cdot0{,}2\cdot10^{-3} - \frac{1}{2\pi(650+30)\cdot10^3\cdot300\cdot10^{-12}}\right]^2}$$

$Z = 76{,}4$ [Ω].

d) $I_o = \frac{U}{R}$; $I = \frac{U}{Z}$; $\frac{I_o}{I} = \frac{Z}{R} \Rightarrow I_o = \frac{Z}{R}I = 4{,}34I$.

7.1.33. ----- a) $\underline{Z} = R_1 + j\,\omega L + \dfrac{R_2 \cdot \left(-j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R_2 - j\dfrac{1}{\omega C}} = R_1 + \dfrac{R_2}{1+(\omega R_2 C)^2} + j\omega\left(L - \dfrac{R_2{}^2 C}{1+(\omega R_2 C)}\right) \Rightarrow$

$\underline{Z}_o = R_1 + \dfrac{R_2}{1+\omega_o{}^2 R_2{}^2 C^2}$ odnosno, $L - \dfrac{R_2{}^2 C}{1+\omega_o{}^2 R_2{}^2 C^2} = 0 \Rightarrow \omega_o{}^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{R_2{}^2 C^2}$

$\omega_o{}^2 = 49{,}75\cdot 10^6 \Rightarrow \omega_o = 7\,053{,}37$ rad/s; $f_o = \omega_o/2\pi = 1\,123{,}15$ Hz.

b) $\underline{Z}_o = 100 + \dfrac{200}{1+49{,}25\cdot 10^6 \cdot 4\cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-12}} = 100 + \dfrac{200}{198} = 101{,}01[\Omega] \Rightarrow I_o = \dfrac{U}{Z_o} = 0{,}99[\mathrm{A}].$

7.1.34. ----- a) $\underline{Z} = R_1 - j\dfrac{1}{\omega C} + \dfrac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} \Rightarrow \underline{Z} = R_1 + \dfrac{\omega^2 L^2 R_2}{R_2{}^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\dfrac{\omega L R_2{}^2}{R_2{}^2 + \omega^2 L^2} - \dfrac{1}{\omega C}\right)$

Uslov rezonanse je:

$$\frac{\omega_o L R_2{}^2}{R_2{}^2 + \omega_o{}^2 L^2} - \frac{1}{\omega_o C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{R_2}{\sqrt{R_2{}^2 LC - L^2}} = 3713{,}91\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right].$$

b) $\underline{Z}_o = R_1 + \dfrac{\omega_o{}^2 L^2 R_2}{R_2{}^2 + \omega_o{}^2 L^2} = 5{,}2[\Omega] \Rightarrow I_C = I_o = \dfrac{U}{Z_o} = \dfrac{50}{5{,}2} = 9{,}615[\mathrm{A}].$

7.1.35. ----- a) $Q = \dfrac{U_C}{U} = 50 \quad Q = \dfrac{\omega L}{R} = \dfrac{Z_C}{R} \Rightarrow R = \dfrac{Z_C}{Q} = 50[\Omega] \Rightarrow I_o = \dfrac{U}{R} = 0{,}02[\mathrm{A}] = 20[\mathrm{mA}].$

b) **C′ = 1,6·C** $\Rightarrow \dfrac{1}{\omega X_C{}'} = 1{,}6\cdot\dfrac{1}{\omega X_C} \Rightarrow X_C{}' = \dfrac{X_C}{1{,}6} = \dfrac{Z_C}{1{,}6\cdot\omega C} = \dfrac{2500}{1{,}6} = 1562{,}5[\Omega]$

$\varphi = 0$; $\mathrm{tg}\varphi' = \dfrac{X'}{R} = \dfrac{X_L - X_C{}'}{R} = \dfrac{2500 - 1562{,}5}{50} = 18{,}75 \Rightarrow \varphi' = 87°$; $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \varphi' = 87°$.

7.1.36. ----- R = 40 Ω; L = 95,5 mH; C = 53 μF

.

7.1.37. ----- a) L = 2 mH; b) $f_1 = 2\,430$ Hz; $f_2 = 1\,047$ Hz;
c) $i = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi)$ [A]; $i_1 = 0{,}5\sqrt{2}\sin(15\,250\,t + \pi/3)$ [A]; $i_2 = 0{,}5\sqrt{2}\sin(6\,575\,t + 2\pi/3)$ [A].

7.1.38. ----- Realni kalem sadrži otpornost R_L i induktivnost L, a samim tim i napon na krajevima kalema iznosi $U_{Le} = \sqrt{U_R{}^2 + U_L{}^2} = \sqrt{40^2 + 150^2} = 155{,}25[\mathrm{V}]$, jer je $U_L = U_C = 150$ V, a $U_R = U = 40$ V.

7.1.39. ----- a) $\omega_o = 3\,590$ rad/s; b) $I_o = 9{,}615$ A. (Videti zadatak 7.1.33.)

7.1.40. ----- C = 200 μF.

7.1.41. ----- Napunjeni kondenzator raspolaže sa energijom: $W_C = E_m{}^2\cdot C/2 = E^2\cdot C/2$ (jer je $E = E_m$). Priključenjem kalema energija kondenzatora prelazi u magnetnu energiju kalema, gde je $W_L = W_C$. Magnetna energija je jednaka: $W_L = L\cdot I_m{}^2/2 \Rightarrow$
$LI_m{}^2/2 = E^2C/2 \Rightarrow LI_m{}^2 = E^2C$. Kako je $I_m = E_m/X_L \Rightarrow LE^2 / X_L{}^2 = E^2C \Rightarrow L/C = X_L{}^2 \Rightarrow L/C \Rightarrow$
$\omega_o{}^2 L^2 = L/C \Rightarrow \omega_o{}^2 = 1/LC \Rightarrow \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

(**Napomena**! Kod energije uvek se radi sa maksimalnim vrednostima, jer LC elemente opterećuje – puni maksimalna vrednost naizmenične struje).

7.2.1. ----- $\omega_o = 2\pi \cdot f_o = 3\ 140$ rad/s; $\Rightarrow \quad \underline{Y} = \frac{R_L}{Z_L{}^2} - j\frac{\omega_o L}{Z_L{}^2} + j\omega_o C \Rightarrow \quad j\left(\omega_o C - \frac{\omega_o L}{R_L{}^2 + \omega_o{}^2 L^2}\right) = 0$

$$C = \frac{L}{R_L{}^2 + \omega_o{}^2 L^2} = \frac{0{,}85}{1500^2 + 3140^2 \cdot 0{,}85^2} = \frac{0{,}85}{2250000 + 9859600 \cdot 0{,}7225} = \frac{0{,}85}{9373561} = 9 \cdot 10^{-8}[\mathrm{F}] = 90[\mathrm{nF}].$$

7.2.2. ----- $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 400$ kHz; $X_L = X_C \cong 1\ 000\ \Omega$; $I_C = I_L = U/X_C = 0{,}11$ A; Kada dođe do antirezonanse admitansa ima samo realni deo (konduktansu) koja iznosi: $Y_o = \frac{RC}{L}$, pa je impedansa jednaka:

$Z_o = \frac{L}{CR} = 100[\mathrm{k\Omega}]$; Ukupna struja u napojnoj grani iznosi : $I_o = U/Z_o = 110/100 \cdot 10^3 = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ A = 1,1 mA.

7.2.3. ----- $\omega_o = 2\pi f_o = 7\ 536 \cdot 10^3$ rad/s; $\omega_{1o} = 10\ 990 \cdot 10^3$ rad/s; $\omega_{2o} = 4\ 082 \cdot 10^3$ rad/s; $\omega_{2o}{}^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \Rightarrow$

$L_2 = 270$ μH; Usled oscilovanja (nastala je antirezonansa) L_1 i L_2, kao i C_1 i C_2 se u oscilatornom kolu nalaze u rednoj vezi, pa je $L = L_1 + L_2$; odnosno $C = C_1 \cdot C_2/(C_1 + C_2)$; Kako je $\omega_o{}^2 = 1/LC \Rightarrow$

$$\omega_o{}^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2) \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}} = \frac{C_1 + C_2}{(L_1 + L_2) \cdot C_1 C_2} \quad ; \quad \omega_{1o}{}^2 = \frac{1}{L_1 \cdot C_1} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{\omega_{1o}{}^2 \cdot C_1}$$

$$\omega_o{}^2 = \frac{C_1 + C_2}{\left(\frac{1}{\omega_{1o}{}^2 \cdot C_1} + L_2\right) \cdot C_1 C_2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(7536 \cdot 10^3\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{10990 \cdot 10^3 \cdot C_1} + 270 \cdot 10^{-6}\right] \cdot C_1 \cdot 220 \cdot 10^{-12} = C_1 + 220 \cdot 10^{-12} \Rightarrow C_1 = 48{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} = 48{,}6\ \mathrm{pF};$$

$C = 40$ pF; $L_1 = \frac{1}{\omega_{1o}{}^2 C_1} = 175 \cdot 10^{-6}[\mathrm{F}] = 175[\mu\mathrm{F}] \quad \Rightarrow \quad L = L_1 + L_2 = 445$ μF.

7.2.4. ----- a) $\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$; b) $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

c) $I = \sqrt{I_R{}^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{\frac{1}{\omega C}} - \frac{U}{\omega L}\right)^2} = U\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L}\right)^2} = UY.$

c) Ako dođe do antirezonanse, gde je $I_L = I_C$, sledi da će ukupna struja kola biti jednaka struji kroz termogeni otpornik, jer se I_L i I_C međusobno poništavaju (isti inteziteti pravac a suprotni smerovi).
Dakle, $I = I_R = U/R$.

7.2.5. ----- $I_R = 1$ A; $I_L = 0{,}637$ A; $C = 3{,}37$ mF.

7.2.6. ----- Analizirajući izraz $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R^2 - \frac{L}{C}}{R^2 - \frac{L}{C}}} \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{0}{0}}$ sledi da je rešenje neodefinisano, jer se dve nule ne mogu deliti. Kako nema rešenja tada je evidentno da frekvencija nema nikakvog uticaja na impedansu kola, a samim tim ovo je kolo u antirezonansi (specijalan slučaj). Dakle, za ovaj slučaj ($R = L/C$) kažemo da je kolo u antirezonansi na svim frekvencijama, jer ukupna impedansa kola ne zavisi od frekvencije (impedansa kola će imati samo termogenu otpornost – realan član).

U unutrašnjosti kola dolazi do oscilovanja reaktivnih struja, tako što će kalem prilikom punjenja kondenzatora davati energiju a nakon toga se kondenzator prazni preko kalema vraćajući mu reaktivnu energiju. Ova reaktivna struja, samim tim i energija ne opterećuje izvor.

Kada je $R_1 = R_2 = R \Rightarrow \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 709,2\left[\text{rad/s}\right] \Rightarrow X_L = \omega_o L = 14,1\ \Omega;\ X_C = 1/\omega_o C = 14,1\ \Omega;$

$$\underline{Z}_o = \frac{(R + jX_L)\cdot(R - jX_C)}{R + jX_L + R - jX_C} = \frac{R^2 + X^2}{2R} = \frac{\dfrac{L}{C} + 200}{2\sqrt{\dfrac{L}{C}}} = 14,1\left[\Omega\right],$$ jer je $X_L = X_C = X = 14,1\ \Omega.$

Impedansu kola smo mogli kraće odrediti pomoći izraza $Z_o = \sqrt{\dfrac{L}{C}} = \sqrt{200} = 14,1\left[\Omega\right]$

Vidimo iz kompleksnog rešenja impedanse da ona sadrži samo realnu vrednost, pri navedenim uslovima ,što potvrđuje predhodne tvrdnje da je kolo u antirezonansi ($\varphi = 0$) a samim tim na impedansu kola frekvencija nema nikakvog uticaja (antirezonansa je prisutna na svim frekvencijama).

7.2.7. ----- $$\underline{Y}_o = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

Zbog $\varphi = 0$ (uslov antirezonanse) $\Rightarrow$

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{200\cdot 10^{-6}}{400 + \left(2\cdot 3,14\cdot 10^6\cdot 200\cdot 10^{-6}\right)^2} = \frac{200\cdot 10^{-6}}{400 + 1256^2} = \frac{200\cdot 10^{-6}}{1577936} \Rightarrow$$

$C = 125,16\cdot 10^{-12}$ [F] = 125,16 [pF].

7.2.8. ----- $f_o = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 7,96\left[\text{kHz}\right]$; $X_C = X_L = \omega_o L = 1\ 000\ \Omega$; $I_{Lo} = I_{Co} = U / X_L = 10$ mA;
$I_o = I_R = U / R = 100$ mA.

7.2.9. ----- $Y_o = RC/L$ (samo realni član kompleksne admitanse $\Rightarrow$ konduktansa) $\Rightarrow Z_o = L/RC = 20\ \text{k}\Omega$;

7.2.10. ----- $Z_o = L/RC = 200\ \text{k}\Omega$; $U = I_o\cdot Z_o = 0,2\cdot 10^{-3}\cdot 200\cdot 10^3 = 40$ V.

7.2.11. ----- a) $$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega\left(C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

Uslov strujne rezonanse je da je admitansa kola minimalna (impedansa maksimalna), tj da je njena reaktivna provodnost (susceptansa) jednaka nuli. Dakle,

$$\underline{Y}_o = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}\ ;\ C = \frac{L}{R^2 + (\omega_o L)^2} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 1,83\cdot 10^6\left[\text{rad/s}\right] \Rightarrow f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 292\left[\text{kHz}\right].$$

b) Da bi prevladavala kapacitivna otpornost ($X_C > X_L \Rightarrow B_C > B_L$) susceptansa (reaktivna provodnost) mora biti pozitivna, tj. veća od nule [$\underline{Y} = G + j\,(B_C - B_L)$]. Sledi,

$$C > \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} > 1,83\cdot 10^6\left[\text{rad/s}\right] \Rightarrow f > 292\ \text{kHz}.$$

c) Da bi impedansa kola imala induktivni karakter, susceptansa kola je negativna (reaktansa pozitivna). Kako je to suprotno od stavke pod b, sledi:

$f < 292$ kHz.

7.2.12. ----- a) $$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = (0,01 - j6,47)\left[\text{mS}\right] = 6,47\cdot 10^{-j\pi/2}\left[\text{mS}\right],$$

b) $f_o = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1125\left[\text{kHz}\right]$; c) $Q = \dfrac{R}{\omega_o L} = R\cdot\omega_o C = 141,4.$

7.2.13. ----- $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \left[\text{rad}/\text{s}\right]$

a) $\omega = 0{,}8\omega_o = 8\,000$ [rad/s]; $X_L = \omega L = 0{,}8$ [Ω]; $X_C = 1/\omega C = 1{,}25$ [Ω];

$\underline{I}_R = \dfrac{\underline{U}}{R} = 1[\text{A}]$; $\underline{I}_L = \dfrac{\underline{U}}{jX_L} = -j12{,}5[\text{A}]$; $\underline{I}_C = \dfrac{\underline{U}}{-jX_C} = j8[\text{A}]$; $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = (1 - j4{,}5)[\text{A}]$.

b) $\omega = \omega_o = 10^4$ rad/s; $X_L = X_C = \omega_o L = 1\ \Omega$; $I_R = U/R = I = 1$ A; $I_L = I_C = U/X_L = 10$ A.

c) $\omega = 12\,500$ rad/s; $X_L = 1{,}25\ \Omega$; $X_C = 0{,}8\ \Omega$; $\underline{I}_R = 1$ A; $\underline{I}_L = -j8$ A; $\underline{I}_C = j12{,}5$ A; $\underline{I} = (1 + j4{,}5)$ A.

7.2.14. ----- $X_L = 6\ \Omega$; $\underline{Y} = \dfrac{8}{100} + \dfrac{8{,}34}{69{,}5 + X_C^{\,2}} + j\left(\dfrac{X_C}{69{,}5^2 + X_C^{\,2}} - \dfrac{6}{100}\right) \Rightarrow \dfrac{X_C}{69{,}5 + X_C^{\,2}} - \dfrac{6}{100} = 0$

$X_C^2 - 16{,}7X_C + 69{,}5 = 0 \Rightarrow X_{C(1/2)} = (16{,}7 \pm 0)/2 = 8{,}35\ \Omega \Rightarrow C = 1/\omega_o X_C = 24\cdot 10^{-6}$ [F] = 24 [μF].

7.2.15. ----- $X_C = 10\ \Omega$; $\underline{Y} = \dfrac{2}{4 + X_L^{\,2}} + \dfrac{5}{125} + j\left(\dfrac{10}{125} - \dfrac{X_L}{4 + X_L^{\,2}}\right) \Rightarrow \dfrac{10}{125} - \dfrac{X_L}{4 + X_L^{\,2}} = 0 \Rightarrow$

$X_L^2 - 12{,}5X_L + 4 = 0 \Rightarrow X_{L1} = 12{,}17$ [Ω] i $X_{L2} = 0{,}33$ [Ω $\Rightarrow L_1 = \omega_o X_{L1} = 2{,}434$ mH i $L_2 = \omega_o X_{L2} = 66$ μH.

7.2.16. ----- $\underline{Z}_1 = j\left(\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C_1}\right) = j\dfrac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1} \Rightarrow \underline{Y}_1 = -j\dfrac{\omega C_1}{\omega^2 L_1 C_1 - 1}$;

$\underline{Z}_1 = j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2}\right) = j\dfrac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_2} \Rightarrow \underline{Y}_2 = -j\dfrac{\omega C_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1}$.

Ukupna impedansa kola iznosi: $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = -j\left(\dfrac{\omega C_1}{\omega^2 L_1 C_1 - 1} + \dfrac{\omega C_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1}\right) \Rightarrow$

$\underline{Y} = -j\dfrac{\omega C_1(\omega^2 L_2 C_2 - 1) + \omega C_2(\omega^2 L_1 C_1 - 1)}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)\cdot(\omega^2 L_2 C_2 - 1)}$.

Kod rezonanse admitansa kola je maksimalna ($Y = \infty$), odnosno impedansa je najmanja ($Z = 0$). Kako kolo sadrži savršene LC elemente impedansa, kao i admitansa ima samo imaginarni deo (reaktansu, odnosno susceptansu).

Dakle, kod rezonanse admitansa je beskonačna ($Z = 0 \Rightarrow$ struja maksimalna), a to će se dogoditi ako je u imeniocu nula, pa sledi:

$(\omega^2 L_1 C_1 - 1)\cdot(\omega^2 L_2 C_2 - 1) = 0 \Rightarrow \omega_{o1}^2 L_1 C_1 - 1 = 0$; i $\omega_{o2}^2 L_2 C_2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\omega_{o1} = 1\,000$ rad/s i $\omega_{o2} = 500$ rad/s.

Antirezonansa će nastati kada je admitansa jednaka nuli (impedansa beskonačna $\Rightarrow$ ukupna struja kola će biti jednaka nuli). To će se dogoditi kada je brojilac kod admitanse jednak nuli. Dakle,

$\omega\cdot[C_1\cdot(\omega^2 L_2 C_2 - 1) + C_2\cdot(\omega^2 L_1 C_1 - 1) = 0 \Rightarrow$

$\omega_{3o} = 0$ rad/s;

$C_1\cdot(\omega_{4o}^2 L_2 C_2 - 1) + C_2\cdot(\omega_{4o}^2 L_1 C_1 - 1) = 0 \Rightarrow \omega_{4o}^2 C_1 C_2 L_2 - C_1 + \omega_{4o}^2 C_1 C_2 L_1 - C_2 = 0 \Rightarrow$

$\omega_{4o}^{\,2} = \dfrac{C_1 + C_2}{C_1 C_2\cdot(L_1 + L_2)} \Rightarrow \omega_{4o} = 707{,}11$ rad/s.

7.2.17. -----

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{(R_2 - jX_C)\cdot jX_L}{R_2 + j(X_L - X_C)} = R_1 + \frac{R_2 X_L X_C + R_2 X_L (X_L - X_C)}{R_2^{\,2} + (X_L - X_C)^2} + j\frac{R_2^{\,2} X_L - X_L X_C (X_L - X_C)}{R_2^{\,2} + (X_L - X_C)^2}$$

Strujna rezonansa će nastati kada je susceptansa jednaka nuli, odnosno, kada je:

$R_2^2 X_L - X_L X_C(X_L - X_C) = 0 \Rightarrow X_L = \dfrac{R_2^{\,2}}{X_C} + X_C = 4$ [Ω] $\Rightarrow L = X_L/\omega = 2$ [mH].

$$Z_o = R_1 + \frac{R_2 X_L X_C + R_2 X_L (X_L - X_C)}{R_2^{\,2} + (X_L - X_C)^2} = 6[\Omega]$$

$\underline{U} = 24\cdot e^{-j\,45°} = 24[\cos(-45°) + j\sin(-45°)] = 12\sqrt{2} - j\,12\sqrt{2}$

$\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_o} = \dfrac{24\cdot e^{-j45}}{6\cdot e^{j0}} = 4\cdot e^{-j45} = 4\,(\,\sqrt{2}/2 - j\,\sqrt{2}/2\,) = 2\sqrt{2} - j\,2\sqrt{2} \;\Rightarrow\; i = 4\sqrt{2}\,\sin(\,2\,000\,t - 45°\,)$ [A].

$\underline{U}_L = \underline{U} - \underline{I}\cdot R_1 = 12\sqrt{2} - j\,12\sqrt{2} - (\,2\sqrt{2} - j\,2\sqrt{2}\,)\cdot 2 = 12\sqrt{2} - j\,12\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + j\,4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - j\,8\sqrt{2} \;\Rightarrow$
$\underline{U}_L = 16\cdot e^{-j\,45}$

$\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_{R2C}} = \dfrac{16\cdot e^{-j45}}{2\sqrt{2}\cdot e^{-j45}} = 4\sqrt{2}\cdot e^{j0} \quad\Rightarrow\quad i_1 = 8\,\sin 2\,000\,t$ [A].

$\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_L} = \dfrac{16\cdot e^{-j45}}{4\cdot e^{j90}} = 4\cdot e^{-j135} \quad\Rightarrow\quad i_2 = 4\sqrt{2}\,\sin(\,2\,000\,t - 135°\,)$ [A].

$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^* = (\,12\sqrt{2} - j\,12\sqrt{2}\,)\cdot(\,2\sqrt{2} + j\,2\sqrt{2}\,) = 48 + j\,48 - j\,48 + 48 = 96 = P + j\,Q \;\Rightarrow\; P = 96$ [W].

7.2.18. ----- C = 100 μF.

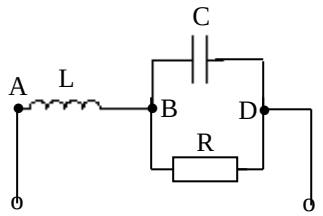
7.2.19. ----- a) f = 312 Hz; b) $\underline{I}_L = (\,0{,}01 - j0{,}049\,)$ [A]; $\underline{I}_C = j\,0{,}049$ [A]; $\underline{I} = 0{,}01$ [A].

7.2.20. ----- a) f = 493 Hz; b) $\underline{I}_1 = (\,0{,}45 - j\,0{,}14\,)$ [A]; $\underline{I}_2 = (\,0{,}25 + j\,0{,}14\,)$ [A]; $\underline{I} = 0{,}7$ [A].

7.2.21. ----- a) Kroz kondenzator protiče aktivna i reaktivna komponenta struje pa se provodnost dielektrika može predstaviti paralelnom otpornošću R (vidi sliku 178).

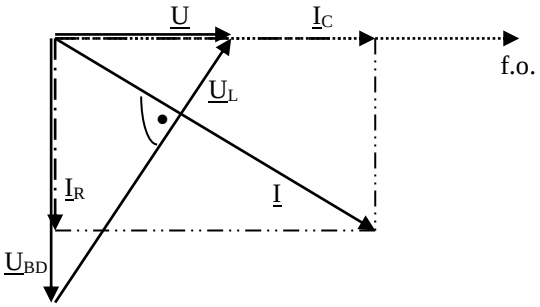
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_a}{I_x} = \frac{\dfrac{U}{R}}{U\omega C} = \frac{1}{R\omega C} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{1}{\omega C \operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{0{,}5\cdot 0.01} = 200\,[\Omega].$$

Rednu vezu LC sada možemo zamenuti ekvivalentnom mešovitom vezom RLC, kao na slici:



$X_L = \omega L = 100\ \Omega$; $X_C = 1/\omega C = 100\ \Omega \;\Rightarrow$
$\underline{Z} = (\,40 + j20\,)\ \Omega \;\Rightarrow\; \underline{I} = \underline{U}/\underline{Z} = (\,4 - j\,2\,)$ A.
Napon na kondenzatoru je:
$\underline{U}_{BD} = \underline{U} - \underline{I}\cdot jX_L = -\,j\,400$ V.
Struja kondenzatora iznosi: $\underline{I}_C = \underline{U}_{BD}/-j100 = 4$ A.
a otpornika R (dielektrika): $\underline{I}_R = \underline{U}_{BD}/R = -\,j\,2$ A.

Snage su jednake:
$\underline{S}_L = jX_L\cdot\underline{I}^2/2 = j\,1000$ [VA]; $\underline{S}_{BD} = \underline{U}_{BD}\cdot\underline{I}/2 = (\,400 - j\,800\,)$ [VA];
a na pojedinačnim delovima kola:
$Q_L = S_L = 1000$ [VAR]; $Q_C = -\,800$ [VAR] (kap.); $P_R = 400$ [W].

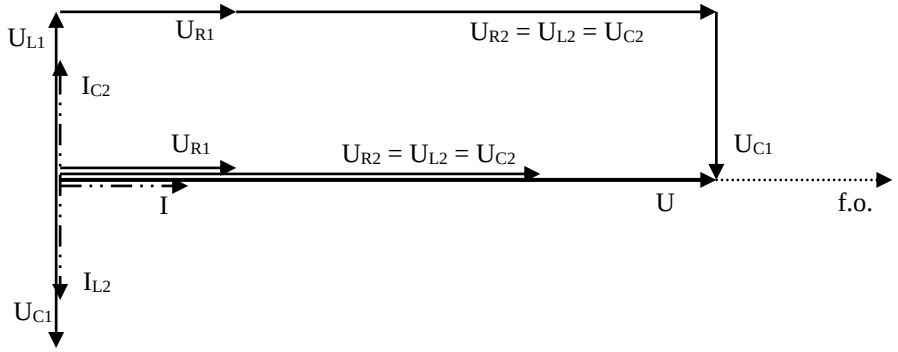


7.2.22. ----- Zbog $X_{L2} = X_{C2}$ u paralelnoj grani je došlo do antirezonanse, pa je ovaj deo kola beskonačne impedanse, tj. $Z_2 = \infty$. U kolu ostaju elementi R_1, R_2, X_{L1} i X_{L2}, koji su redno povezani. Kako je $X_{L1} = X_{L2}$ u ovom rednom kolu dolazi do rezonanse (nap. rezonanse), pa je impedansa kola jednaka: $\underline{Z} = R_1 + R_2 = 150\ \Omega$.

a) ukupna struja u kolu je: $I = U/Z = 1$ A;
Napon na paralelnoj vezi $R_2L_2C_2$ iznosi: $U_2 = I\cdot R_2 = 100$ V.
Struja kroz L_2 je: $\underline{I}_{L2} = \underline{U}_2/jX_{L2} = 100/j100 = -\,j\,1$ A.
Struja kroz kondenzator C_2 iznosi: $\underline{I}_{C2} = \underline{U}_2/-j\,X_{C2} = 100/-j100 = = j\,1$ A.
Naponi na preostalim (rednim) elementima su:
$\underline{U}_{L1} = \underline{I}\cdot jX_{L1} = j\,50$ V; $\underline{U}_{C1} = \underline{I}\cdot(-jX_{C1}) = -\,j50$ V; $\underline{U}_{R1} = \underline{I}\cdot R_1 = 50$ V.

b) faktor dobrote iznosi: $Q = X_L/R_e = 50 / (50 + 100) = 1/ 3$.

c)



7.2.23. ---- Rezonanse po granama nastaju kada su ispunjeni sledeći uslovi:

za prvu granu: $\omega_{o1}L_1 = \dfrac{1}{\omega_{o1}C_1}$; i za drugu granu: $\omega_{o2}L_2 = \dfrac{1}{\omega_{o2}C_2}$.

$\omega_{o1} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = 5\cdot 10^5 \left[\text{rad}/\text{s}\right] \Rightarrow f_{o1} = 79{,}58$ [kHz]; $\omega_{o2} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = 3{,}33\cdot 10^5 \left[\text{rad}/\text{s}\right] \Rightarrow f_{o2} = 53{,}07$ [kHz].

Kružna učestanost pri kojoj dolazi do antirezonanse (strujne rezonanse) je (zbog $R_1 = R_2$):

$$\omega_{ao} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{R_1^{\,2} - \frac{L}{C}}{R_2^{\,2} - \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Pojavom antirezonanse elementi R_1,L_1,C_1,R_2,L_2 i C_2 čine oscilatorno kolo. Da nema R_1 i R_2 oscilacije bi bile idealne, tj. ovo oscilatorno kolo bi radilo tako da ono nema nikakvog uticaja na struju izvora (ukupna struja kola bi bila jednaka nuli). To znači da struja izvora, koja je u fazi sa ukupnim naponom, pokriva samo Džulove gubitke na otporima R_1 i R_2 i ona ima najmanju vrednost.

Kako su elementi u oscilatornom kolu u rednoj vezi, sledi da je ekvivalentna induktivnost jednaka:
$L = L_1 + L_2 = 50$ mH,

a kapacitivnost:

$$C = \frac{C_1\cdot C_2}{C_1 + C_2} = 120\left[\text{pF}\right].$$

Antirezonantna kružna učestanost iznoai:

$$\omega_{ao} = \frac{1}{\sqrt{50\cdot 10^{-3}\cdot 120\cdot 10^{-12}}} = 4{,}08\cdot 10^5 \left[\text{rad}/\text{s}\right] \Rightarrow f_{ao} = \omega_{ao}/2\pi = 64{,}994 \text{ [kHz]}.$$

7.2.24. ----- a) Kompleksna impedansa kola je jednaka:

$$\underline{Z} = \frac{\left(\text{j}\omega L - \text{j}\frac{1}{\omega C}\right)\cdot\left(-\text{j}\frac{1}{\omega C}\right)}{\text{j}\omega L - \text{j}\frac{1}{\omega C} - \text{j}\frac{1}{\omega C}} = \frac{\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2C^2}}{\text{j}\left(\omega L - \frac{2}{\omega C}\right)} = -\text{j}\frac{\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2C^2}}{\omega L - \frac{2}{\omega C}} = -\text{j}X$$

Impedansa je jednaka nuli, kada je brojilac jednak nuli, tj. kada je: $\dfrac{L}{C} = \dfrac{1}{\omega^2C^2} \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$.

i kada je imenilac jednak beskonačno, tj. $\omega L - \dfrac{2}{\omega C} \to \infty \Rightarrow \omega_2 \to \infty$.

Kompleksna admitansa je jadnaka: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{-jX} = j\frac{1}{X} = j\frac{\omega L - \frac{2}{\omega C}}{\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}}$.

Dakle, admitansa je jednaka nuli kada je: $\omega L - \frac{2}{\omega C} = 0$ i kada $\frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2} \to \infty$

Sledi: $\omega_3 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$, odnosno $\omega_4 \to \infty$.

ω_1 i ω_2 predstavljaju rezonantne kružne učestanosti, dok ω_3 i ω_4 antirezonantne kružne učestanosti.

7.2.25. ----- Na antirezonantnoj frekvenciji ukupna struja kola je jednaka nuli (najmanja), jer je oscilatorno kolo idealno (nema aktivnog otpornika R). Admitansa oscilatornog kola, tj. antirezonantnog kola (C, C i L/2) iznosi:

$$\underline{Y}_o = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}} + \frac{1}{j\left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C}\right)} = 0 \Rightarrow j\omega C - j\frac{2\omega C}{\omega^2 LC - 2} = 0 \Rightarrow j\frac{\omega C\left(\omega^2 LC - 2\right) - 2\omega C}{\omega^2 LC - 2} \Rightarrow$$

$$\underline{Y}_o = j\frac{\omega C\left(\omega^2 LC - 4\right)}{\omega^2 LC - 2} = jB = 0$$

Kako je admitansa jednaka nuli, jer je ona jednaka susceptansi (nema R), sledi, na osnovu izraza za admitansu kola:

1) $\omega C\left(\omega^2 LC - 4\right) = 0$ 2) $\left(\omega^2 LC - 2\right) \to \infty$.

Rešenjem ovih jednačina dobiju se sledeća tri rešenja:

$\omega_1 = 0$; $\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ i $\omega_3 \to \infty$. Ovo su ujedno antirezonantne kružne učestanosti.

Čitaocu se preporučuje da odredi rezonantne kružne učestanosti.

7.2.26. ----- a) $\underline{Y}_o = j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = 0 \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (kružna učestanost pri kojoj dolazi do antirezonanse).

b) Efektivne vrednosti struja po granama iznosi:

$I_R = 0$; $I_L = I_C = U/\omega_o L = U \cdot \omega C = U/Z_C$; gde je $\mathbf{Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}}$.

7.2.27. ----- a) $\underline{Y}_o = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = G + JB = G$.

Kako je kod antirezonanse susceptansa (imaginarni deo admitanse) jednak nuli, sledi:

$$\frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow \frac{C}{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1} = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow CR_1^2 + C\omega^2 L^2 = R_2^2 \omega^2 C^2 L + L \Rightarrow$$

$R_2^2 \omega^2 LC^2 - \left(R_1^2 + \omega^2 L^2\right)C + L = 0 \Rightarrow 1\cdot(2\pi\cdot 500\cdot 10^3)^2 \cdot 3\cdot 10^{-6}\, C^2 - (\, 4 + 4\pi^2 \cdot 500^2 \cdot 10^6 \cdot 3^2 \cdot 10^{-12}\,)\, C + 3\cdot 10^{-6} = 0.$

$29{,}58\cdot 10^6\, C^2 - 92{,}74\, C + 3\cdot 10^{-6} = 0 \Rightarrow$

$$C_{1/2} = \frac{92{,}74 \pm \sqrt{92{,}74^2 - 4\cdot 29{,}58\cdot 10^6 \cdot 3\cdot 10^{-6}}}{2\cdot 29{,}58\cdot 10^6} = \frac{92{,}74 \pm \sqrt{8600{,}1 - 354{,}96}}{59{,}48\cdot 10^6} = \frac{92{,}74 \pm 90{,}8}{59{,}48\cdot 10^6} \Rightarrow$$

$C_1 = 3{,}086\ \mu F$; $C_2 = 0{,}03262\ \mu F = 32{,}57\ nF$.

b)

Za $C_1 = 3{,}086\ \mu F \Rightarrow$ $X_L = \omega L = 3140\cdot 10^3 \cdot 3\cdot 10^{-6} = 9{,}42\ \Omega$; $X_C = 1/\omega C_1 = 1/3140\cdot 10^3 \cdot 3{,}086\cdot 10^{-6} = 0{,}1032\ \Omega$;

$$\underline{Z} = R_g + \frac{(R_1 + jX_L)\cdot(R_2 - jX_C)}{R_1 + jX_L + R_2 - jX_C} = 50 + \frac{(2 + j9{,}42)\cdot(1 - j0{,}1032)}{2 + j9{,}42 + 1 - j0{,}1032} = 50 + 0{,}989 - j\,0{,}0005 \Rightarrow Z = Z_o \cong 51\ [\Omega].$$

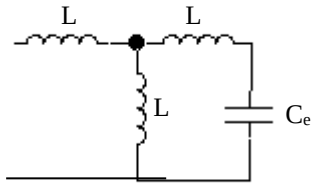
$$I_o \frac{E}{Z_o} = \frac{100}{51} = 1{,}96[A] \Rightarrow P = I_o^2 R_e = 1{,}96^2 \cdot 0{,}989 = 3{,}84\ [W].$$

Za $C_2 = 32{,}57$ nF $\Rightarrow X_C' = 1/\omega C_2 = 1/3140 \cdot 10^3 \cdot 32{,}57 \cdot 10^{-9} = 9{,}78\ [\Omega] \Rightarrow$

$$\underline{Z}' = 50 + \frac{(2 + j9{,}42)\cdot(1 - j9{,}78)}{2 + j9{,}42 + 1 - j9{,}78} = 50 + 31{,}33 - j\,0{,}38 \Rightarrow Z' = Z_o' \cong 81{,}33\ [\Omega]$$

$I_o' = E/Z_o' = 100/81{,}33 = 1{,}23$ [A] $\Rightarrow P' = I_o'^2 R_e' = 1{,}23^2 \cdot 31{,}33 = 47{,}37$ [W].

7.2.28. -----



$$C_e = \frac{2C \cdot C}{2C + C} = \frac{2}{3}C$$

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{j\omega L \cdot \left(j\omega L - j\frac{1}{\omega C_e}\right)}{j\omega L + j\omega L - j\frac{1}{\omega C_e}} = j\frac{\omega L \cdot (3\omega^2 L C_e - 2)}{2\omega^2 L C_e - 1}$$

a) $\underline{Z} = jX \Rightarrow \underline{Z}_o = j\,0$ ($X = 0$) $\Rightarrow$

$\omega L \cdot (3\omega^2 L C_e - 2) = 0 \Rightarrow \omega_{o1} = 0$; $\omega_{o2}^2 = 2/3LC_e \Rightarrow \omega_{o2}^2 = \dfrac{2}{3L \cdot \frac{2}{3}C} \Rightarrow \omega_{o2} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$(2\omega^2 L C_e - 1) \to \infty \Rightarrow \omega_{o3} \to \infty$.

e) Admitansa za dato kolo iznosi: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = -j\dfrac{2\omega^2 L C_e - 1}{\omega L \cdot (3\omega^2 L C_e - 2)} = -jB$

Kako je kod admitanse $B = 0 \Rightarrow$

$2\omega^2 L C_e - 1 = 0 \Rightarrow \omega_{o4} = \dfrac{1}{\sqrt{2LC_e}} = \dfrac{1}{\sqrt{2L \cdot \frac{2}{3}C}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{LC}}$ i

$\omega L \cdot (3\omega^2 L C_e - 2) \to \infty \Rightarrow \omega_{o5} \to \infty$.

7.2.29. ----- $\underline{Y} = \left(\dfrac{8}{100} + \dfrac{8{,}34}{69{,}5 + X_C^2}\right) + j\left(\dfrac{X_C}{69{,}5 + X_C^2} - \dfrac{6}{100}\right)$.

Kako je susceptansa jednaka nuli,kod antirezonanse, sledi:

$$\frac{X_C}{69{,}5 + X_C^2} = \frac{6}{100} \Rightarrow X_C = 4{,}17 + 0{,}06 X_C^2 \Rightarrow 6X_C^2 - 100\,X_C + 417 = 0$$

$$X_{C1/2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 4 \cdot 6 \cdot 417}}{2 \cdot 6} = \frac{100 \pm 0}{12} \Rightarrow X_{C1} = X_{C2} = X_C = 8{,}33[\Omega] \Rightarrow C = 1/\omega \cdot X_C = 24\ [\mu F].$$

7.2.30. ----- $\underline{Y} = \left(\dfrac{2}{4 + X_L^2} + \dfrac{5}{125}\right) + j\left(\dfrac{10}{125} - \dfrac{X_L}{4 + X_L^2}\right) \Rightarrow \dfrac{10}{125} = \dfrac{X_L}{4 + X_L^2} \Rightarrow 10X_L^2 + 40 = 125X_L$

$X_L^2 - 12{,}5\,X_L + 4 = 0 \Rightarrow X_{L1/2} = \dfrac{12{,}5 \pm \sqrt{156{,}25 - 16}}{2} = \dfrac{12{,}5 \pm 11{,}843}{2} \Rightarrow$

$X_{L1} = 12{,}17\ [\Omega] \Rightarrow L_1 = X_{L1}/\omega = 2{,}43$ [mH]; $X_{L2} = 0{,}3285\ [\Omega] \Rightarrow L_2 = 0{,}3285/5000 = 65{,}7\ [\mu H]$.

7.2.31. ----- Tačan odgovor je pod c, jer pri pojavi antirezonanse (savršeno LC kolo) impedansa kola postaje beskonačna (ukupna struja u kolu je jednaka nuli). Struja je prisutna samu u oscilatornom kolu, tj. na LC elementima, koja naizmenično oscilira ne opterećujući izvor.

8.1. ----- a) $\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m$ ……. (1)
$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m$ ……. (2)

gde je $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\,1/\omega C_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\,1/\omega C_2$; $\underline{Z}_m = -j\omega L_m$ (predznak minus je zbog toga što se fluksevi međusobno suprostavljaju); $L_m = k\sqrt{L_1 L_2}$.

b) Iz druge jednačine sledi: $\underline{I}_2 = -\dfrac{\underline{Z}_m}{\underline{Z}_2}\underline{I}_1$

Uvrštavanjem struje $\underline{I}_2$ u prvu jednačinu, slede rešenja:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{\underline{\mathbf{U}}\underline{\mathbf{Z}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_1\underline{\mathbf{Z}}_2 - \underline{\mathbf{Z}}_m^{\,2}}\,, \text{ odnosno } \quad \underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{-\underline{\mathbf{Z}}_m\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{Z}}_1\underline{\mathbf{Z}}_2 - \underline{\mathbf{Z}}_m^{\,2}}$$

c) Ulazna impedansa je jednaka količniku ulaznog (ukupnog) napona i ulazne (ukupne)struje.

Dakle, $\underline{\mathbf{Z}}_{ul} = \dfrac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}_1} = \dfrac{\underline{\mathbf{Z}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_1\underline{\mathbf{Z}}_2 - \underline{\mathbf{Z}}_m^{\,2}}$.

8.2. ----- $\underline{Z}_{ul} = (40 + j\,40)\ \Omega$;

8.3. ----- $\underline{E} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m \;\Rightarrow\; 10 = \underline{I}_1 j\omega L_1 - \underline{I}_2 j\omega L_m$ ..... (1)
$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \;\Rightarrow\; 0 = \underline{I}_2 (j\omega L_2 + \underline{Z}_P) - \underline{I}_1 j\omega L_m$ ..... (2); $\omega L_m = k\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = 1[\Omega]$.

Rešenjem sistema jednačina (dve jednačine sa dve nepoznate) slede rešenja struja :
$\underline{I}_1 = (-5 - j5)$ [A] i $\underline{I}_2 = (5 - j5)$ [A] $\Rightarrow$ $I_2 = 5\sqrt{2}$ [A] $\Rightarrow$ $P = I_2^2 R = (5\sqrt{2})^2 \cdot 1 = 50$ [W].

8.4. ----- $\underline{E} - j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega L_m \underline{I}_1 = 0 \;\Rightarrow\; j10 - j50\,\underline{I}_2 - j10\cdot 0{,}2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{I}_2 = 0{,}16$ [A].
$\underline{U}_S - j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_m \underline{I}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_S = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_m \underline{I}_2 = j20\cdot 0{,}2 + j10\,\underline{I}_2 = j4 + j1{,}6 = j5{,}6 \;\Rightarrow$
$U_S = 5{,}6$ V.

8.5. ----- $\underline{U} = \underline{I}_1 j\omega L - \underline{I}_2 j\omega L_m$ ..... (1); $0 = \underline{I}_2 (j\omega L + j\omega L) - \underline{I}_1 j\omega L_m$ ..... (2); gde je
$\omega L_m = k\sqrt{\omega L \cdot \omega L} = \omega L$;
$\underline{U} = j\omega L (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)$, a iz druge jednačine sledi $\underline{I}_1 j\omega L = 2\,\underline{I}_2 j\omega L \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_1/2$
$\underline{U} = j\omega L (\underline{I}_1 - \underline{I}_1/2) \Rightarrow \underline{U} = \underline{I}_1 j\omega L/2 \Rightarrow \underline{U} / \underline{I}_1 = j\omega L/2 = j\omega L_e \Rightarrow$

$$L_e = \frac{1}{2} L = 0{,}5[\text{mH}].$$

8.6. ----- $\underline{U} - j\omega L_1 \underline{I} + j\omega L_m \underline{I} - j\omega L_2 \underline{I} + j\omega L_m \underline{I} = 0$, gde je $\omega L_m = k\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = 80[\Omega]$.
$\underline{U} = j\,\underline{I} (\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega L_m) \;\Rightarrow\; 10 = j4\,\underline{I} \;\Rightarrow\; \underline{I} = 10/j4 = -j2{,}5$ [A].
$\underline{U}_2 = \underline{I} (j\omega L_2 - j\omega L_m) = -j40$ [V] $\;\Rightarrow\; U_2 = 40$ [V].

8.7. ----- Kako su iste induktivnosti i uzajamne induktivnosti, iste su i otpornosti paralelnih grana, pa su i struje u tim granama jednake. Dakle, $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$, dok je ukupna struja jednaka: $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$.
$L_m = k\sqrt{L \cdot L} = L$.
$\underline{U} = j\omega L \underline{I}_1 + j\omega L_m \underline{I}_2 \;\Rightarrow\; j\omega L_e \underline{I} = j\omega L 2\,\underline{I}_1 \;\Rightarrow\; L_e = L$ ($\underline{I} = 2\underline{I}_1$).

8.8. ----- Zatvarajući konturu preko kratke veze, prema drugom Kirhofovom pravilu sledi jednačina:
$\underline{U} - j\omega L \underline{I} + j\omega L_m \underline{I}_1 = 0$ ….. (1); $j\omega L \underline{I}_1 - j\omega L_m \underline{I} = 0$ ……. (2).

Iz druge jednačine sledi: $\underline{I}_1 = \dfrac{L_m}{L}\underline{I} = \dfrac{k\sqrt{L \cdot L}}{L}\underline{I} = 0{,}5\underline{I}$.

$\underline{U} = j\omega L \underline{I} - j\omega L_m \underline{I}_1 = j\omega L \underline{I} - 0{,}5 j\omega L_m \underline{I} = j\omega L \underline{I} - 0{,}5 j\omega\cdot 0{,}5L \underline{I} = \underline{I} (j\omega L - 0{,}25 j\omega L) = \underline{I}\, j\omega 0{,}75L$

$\underline{Z}_{ul} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L_e = j\omega \cdot 0{,}75L \;\Rightarrow\; L_e = 0{,}75\,L = 3$ [mH].

8.9. ----- $Z_m = \omega L_m = k\sqrt{\omega L \cdot \omega L} = \omega L = Z_1 \;\Rightarrow\; \underline{Z}_m = -j\,Z_m = -j\omega L$.
$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \;\Rightarrow\; 0 = j2\omega L \underline{I}_2 - j\omega L \underline{I}_1 \;\Rightarrow\; \underline{I}_1 + 2\,\underline{I}_2 \;\Rightarrow\; \underline{I}_2 = \underline{I}_1/2 = 0{,}1$ A.
$\underline{U}_S = \underline{I}_1 j\omega L - \underline{I}_2 j\omega L_m = j\omega L (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = j20\cdot(0{,}2 - 0{,}1) = j2$ [V].
$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}_1^{\,*} = j2 \cdot 0{,}2 = j0{,}4$ [VA].

8.10. ----- $\underline{U} = \underline{I}_1\, j\omega L - \underline{I}_2\, j\omega L_m$ …… (1); $0 = \underline{I}_2\, j\omega L - \underline{I}_1\, j\omega L_m$ …… (2);
$L_m = L$, a iz druge jednačine $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$. Uvrštavanjem struje $\underline{I}_2$ u prvu jednačinu sledi rešenje: $\underline{U} = j\omega L\, \underline{I}_1 \Rightarrow$

$$\underline{Z}_e = j\omega L_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = j\omega L \Rightarrow L_e = L$$

8.11. ----- k = 1; $\omega L = \omega L_m$;
$\underline{U} - j\omega L\, \underline{I}_1 + j\omega L_m\, \underline{I}_2 - j\omega L\, \underline{I}_2 + j\omega L_m\, \underline{I}_1 - j\omega L\, \underline{I}_1 = 0 \Rightarrow \underline{U} = j\omega L\,(\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_2 - \underline{I}_1 + \underline{I}_1) = j\omega L\, \underline{I}_1 \Rightarrow$

$$\underline{Z}_{ul} = j\omega L_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = j\omega L \Rightarrow L_e = L.$$

8.12. ----- $L_m = k\sqrt{L_1 L_2} = 2[\text{mH}]$

a) Kratko spojene tačke B i C, a za izvode koriste se tačke A i D: $L_e = L_1 + L_2 + 2L_m = 9$ mH.
b) Kratko spojene tačke B i D, a za izvode koriste se tačke A i C: $L_e' = L_1 + L_2 - 2L_m = 1$ mH.

8.13. ------ $L_m = k\sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow \omega L_m = k\sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = 0{,}2\sqrt{5\cdot 5} = 1[\Omega]$

$\underline{U} = \underline{I}_1(j\omega L_1 - j1/\omega C_1) - \underline{I}_2\, j\omega L_m$ …… (1)
$\underline{I}_1(j\omega L_1 - j1/\omega C_1) - \underline{I}_2\, j\omega L_m = \underline{I}_2(j\omega L_2 - j1/\omega C_2) - \underline{I}_1\, j\omega L_m$ ….. (2)
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ……..(3) $\Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$

Iz druge jednačine sledi: $\underline{I}_1(j5 - j10) - \underline{I}_2\, j1 = \underline{I}_2(j5 - j3) - \underline{I}_1\, j1 \Rightarrow -j4\, \underline{I}_1 = j3\, \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_1 = -0{,}75\, \underline{I}_2$.
Kada uvrstimo $\underline{I}_1$ u prvu jednačinu, sledi:

$\underline{U} = 0{,}75\underline{I}_2(j5 - j10) - \underline{I}_2\, j1 = j2{,}75\underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = -j\,\underline{U}/2{,}75$
$\underline{I} = -0{,}75\,\underline{I}_2 + \underline{I}_2 = 0{,}25\,\underline{I}_2 = 0{,}25\cdot(-j\,\underline{U}/{,}75) \Rightarrow 2{,}75/(-j0{,}25) = \underline{U}/\underline{I} = \underline{Z}_{ul} \Rightarrow$
$\underline{Z}_{ul} = j\,11\ \Omega$.

8.14. ----- $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ …… (1)
$\underline{U} = j\omega L_1\, \underline{I} + j\omega L_m\, \underline{I}_1 + j\omega L_2\, \underline{I}_1 + j\omega L_m\, \underline{I}$ …. (2)
$j\omega L_2\, \underline{I}_1 + j\omega L_m\, \underline{I} = \underline{Z}\cdot\underline{I}_2$ …… (3)

Rešenjem navedenog sistema jednačina, slede vrednosti struja po granama:
$\underline{I} = -j10$ [A]; $\underline{I}_1 = -j6$ [A]; $\underline{I}_2 = -j4$ [A].
Napon na impedansi iznosi: $\underline{U}_Z = \underline{Z}\cdot\underline{I}_2 = 64$ V.

8.15. ----- $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ……..…(1)
$\underline{U} = j\omega L_1\, \underline{I} - j\omega L_m\, \underline{I}_1 + j\omega L_2\, \underline{I}_1 - j\omega L_m\, \underline{I} + R_1\, \underline{I}$ …… (2)
$j\omega L_2\, \underline{I}_1 - j\omega L_m\, \underline{I} = \underline{Z}\cdot\underline{I}_2$ …….. (2)

$700 = (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\cdot(50 + j10) + j40\, \underline{I}_1 \Rightarrow 700 = (50 + j50)\cdot\underline{I}_1 + (50 + j10)\cdot\underline{I}_2$
$0 = (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\cdot j5 - j45\, \underline{I}_1 + 40\, \underline{I}_2 - j85\, \underline{I}_2 \Rightarrow 0 = -j40\, \underline{I}_1 + (40 - j80)\cdot\underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_1 = (-2 - j1)\cdot\underline{I}_2$
$700 = (50 + j50)\cdot(-2\,\underline{I}_2 - j\,\underline{I}_2) + (50 + j10)\cdot\underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = j5$ A.
$\underline{I}_2 = j5$ [A]; $\underline{I}_1 = (5 - j10)$ [A]; $\underline{I} = (5 - j5)$ [A]; $\underline{U}_Z = \underline{I}_2\cdot\underline{Z} = j5\cdot(40 - j85) = (425 + j200)$ [V].

8.16. ----- $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ …….. (1)
$\underline{U} = j\omega L_1\, \underline{I} - j\omega L_m\, \underline{I}_1 + j\omega L_2\, \underline{I}_1 - j\omega L_m\, \underline{I} + R_2\, \underline{I}_1 + R_1\, \underline{I}$ ……. (2)
$R_2\, \underline{I}_1 + j\omega L_2\, \underline{I}_1 - j\omega L_m\, \underline{I} = (R_3 - j1/\omega C)\cdot\underline{I}_2$ ……(3)

$204 = (2 + j4)\cdot\underline{I} + (2 + j12)\cdot\underline{I}_1 \Rightarrow 204 = (2 + j4)\cdot\underline{I} + (2 + j12)\cdot\underline{I}_1$
$(2 + j16)\cdot\underline{I}_1 - j4\, \underline{I} = (31{,}5 - j34{,}5)\cdot(\underline{I} - \underline{I}_1) \Rightarrow (233{,}5 - j18{,}5)\cdot\underline{I}_1 = (31{,}5 - j30{,}5)\cdot\underline{I}$.

$\underline{I}_1 = (1{,}106 - j0{,}28)\cdot\underline{I}$
$204 = (2 + j4)\cdot\underline{I} + (1{,}106 - j0{,}28)\cdot\underline{I}\cdot(2 + j12) = (7{,}572 + j16{,}712)\underline{I} \Rightarrow \underline{I} = (4{,}589 - j10{,}128)$ [A].
Konačna rešenja iznose:
$\underline{I} = (4{,}589 - j10{,}128)$ [A]; $\underline{I}_1 = (2{,}24 - j12{,}486)$ [A] i $\underline{I}_2 = (2{,}349 + j2{,}358)$ [A].

8.17. ----- a) $\underline{U} = \left(R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right) \underline{I}_1 - j\omega L_m \underline{I}_2$

$$0 = \left(R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right) \underline{I}_2 - j\omega L_m \underline{I}_1 \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = \frac{j\omega L_m \underline{I}_1}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}$$

$$\underline{U} = \left(R_1 + j(\omega L_1 - jX_{C1}) \right) \underline{I}_1 - \frac{(j\omega L_m)^2}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \underline{I}_1 = \underline{I}_1 \left(R_1 + jX_{L1} - jX_{C1} + \frac{\omega^2 {L_m}^2}{R_2 + jX_{L2} - jX_{C2}} \right)$$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = R_1 + jX_{L1} - jX_{C1} + \frac{{X_m}^2}{R_2 + jX_{L2} - jX_{C2}} = 11 + j11 - jX_{C1} .$$

Kako je prividna snaga jednaka aktivnoj, sledi da je napon u fazi sa strujom, odnosno ekvivalentna impedansa ima samo aktivnu komponentu ($\varphi = 0$).

Dakle, $\underline{Z}_{ul} = 11\ \Omega \Rightarrow X_{C1} = 11\ \Omega$.

b) $P = S = 2\,200$ [W] $\Rightarrow P = I_1^2 R_{ul} \Rightarrow I_1^2 = 2\,200/11 = 200 \Rightarrow \underline{I}_1 = I_1 = 10\sqrt{2}$ [A].
$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ul} = 10\sqrt{2} \cdot 11 = 110\sqrt{2}$ [V]. (U i I_1 su u fazi).

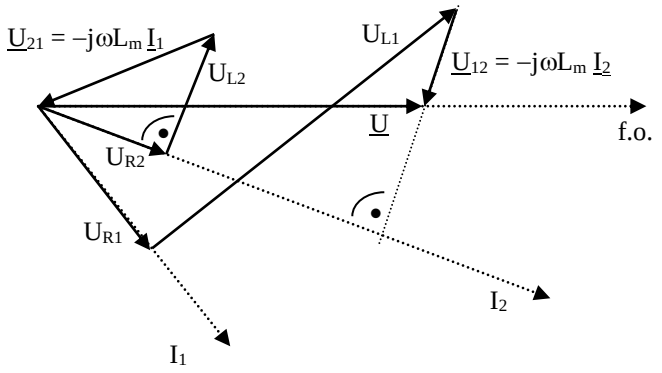
8.18. ----- $\underline{Z}_m = -jX_m = -j\omega L_m = -j\omega k\sqrt{L_1 L_2} = -jk\sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = -j \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} = -j1[\Omega]$.

$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m \Rightarrow \quad 10 = (1 + j2) \cdot \underline{I}_1 - j1 \cdot \underline{I}_2$ ..... (1)

$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \Rightarrow 0 = (1 + j2) \cdot \underline{I}_2 - j1 \cdot \underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = (2 - j1) \cdot \underline{I}_2$ .... (2)

$10 = (1 + j2) \cdot (2 - j1) \cdot \underline{I}_2 - j\,\underline{I}_2 \Rightarrow 10 = (4 + j3) \underline{I}_2 - j\underline{I}_2 = (4 + j2) \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = (2 - j1)$ A; $\underline{I}_1 = (3 - j4)$ A.

$\underline{Z}_{ul} = \underline{U} / \underline{I}_1 = 10 / (3 - j4) = (1{,}2 + j1{,}6)\ \Omega$.



8.19. ----- $\underline{Z}_m = -j\omega L_m = -j3\ \Omega$;

$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m \Rightarrow \underline{U} = (2 + j5)\underline{I}_1 - j3\,\underline{I}_2$ …….. (1)

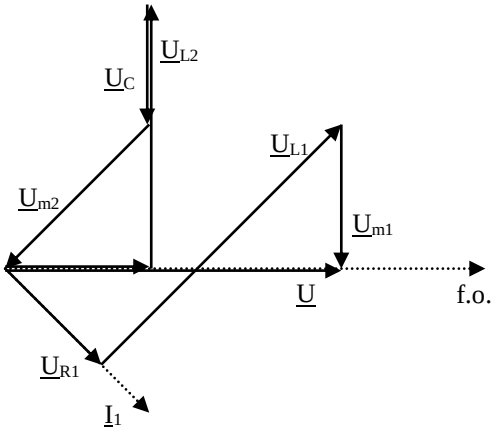
$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \Rightarrow (3 + j3)\,\underline{I}_2 = j3\,\underline{I}_1$ …….. (2)

$(3 + j3)\cdot 2 = j3\,\underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = (2 - j2)$ [A].

$\underline{U} = (2 + j5)\cdot(2 - j2) - j6 = 14 + j6 - j6 = 14$ [V],

$\underline{U}_{R1} = R_1\,\underline{I}_1 = (4 + j4)$ [V]; $\underline{U}_{L1} = j\omega L_1\,\underline{I}_1 = (10 + j10)$ [V]; $\underline{U}_{m1} = -j\omega L_1\,\underline{I}_2 = -j6$ [V;

$\underline{U}_{R2} = R_2\,\underline{I}_2 = 6$ [V]; $\underline{U}_{L2} = j\omega L_2\,\underline{I}_2 = j\,10$ [V]; $\underline{U}_{m2} = -j\omega L_m\,\underline{I}_1 = (6 - j6)$ [V]; $\underline{U}_C = (-j/1\omega C)\cdot\underline{I}_2 = -j4$ [V].



8.20. ----- $\underline{E}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m$ …… (1)

$\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m$ …… (2)

Gde je :

$\underline{E}_1 = -10$ V; $\underline{E}_2 = j\,10$ V; $\underline{Z}_1 = j(X_{L1} - X_{C1}) = -j1\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = jX_{L2} = j2\ \Omega$; $\underline{Z}_m = jk\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = j1[\Omega]$.

Rešenjem navedenog sistema jednačina dobiju se etruje u kolima, koje iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1\underline{Z}_2 - \underline{E}_2\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}} = \frac{10 - j20}{3}[\mathrm{A}] \quad \text{i} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2\underline{Z}_1 - \underline{E}_1\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}} = \frac{10 + j10}{3}[\mathrm{A}].$$

a) Kompleksne snage na generatorima iznose:

$$\underline{S}_1 = \underline{E}_1\cdot\underline{I}_1^{*} = -10\cdot\frac{10 + j20}{3} = -\frac{100}{3} - j\frac{200}{3}[\mathrm{VA}] \quad \text{i} \quad \underline{S}_2 = \underline{E}_2\,\underline{I}^{*} = j10\cdot\frac{10 - j10}{3} = \frac{100}{3} + j\frac{200}{3}[\mathrm{VA}].$$

$P_1 = -100/3$ [W]; $Q_1 = -100/3$ [VAr]; $P_2 = 100/3$ [W] ; $Q_2 = 200/3$ [VAr].

Kako je aktivna snaga prvog generatora negativna, on se ponaša kao potrošač (troši energiju). Aktivna snaga koju daje drugi generator jednaka je aktivnoj snayi koju troši prvi generator. To je logično, jer je kolo sastavljeno od savršenih reaktivnih elemenata.

b) $\underline{U}_{L1} = \underline{I}_1\,jX_{L1} = (40 + j\,20)/3$ [V]; $\underline{U}_C = \underline{I}_1\cdot(-jX_C) = (-20 - j\,10)$ [V] ; $\underline{U}_{m1} = \underline{I}_2\,\underline{Z}_m = (-10 + j\,10)/3$ [V];

$\underline{U}_{L2} = \underline{I}_2\,jX_{L2} = (-20 + j20)/3$ [V]; $\underline{U}_{m2} = \underline{I}_1\,\underline{Z}_m = (20 + j10)/3$ [V].

Na osnovu ovih podataka nije teško nacrtati fazorski dijagram, što se ostavlja da to uradi čitalac.

8.21. ----- $\underline{E} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m$ ..... (1)

$\underline{E} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m$ ..... (2)

gde je: $\underline{Z}_1 = j(X_{L1} - X_C) = 0\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = R + jX_{L2} = (1 + j2)\ \Omega$; $\underline{Z}_m = jk\sqrt{X_{L1}\cdot X_{L2}} = j1\ \Omega$.

Uvrštavanjem ovih vrednosti u navedene jednačine slede rešenja struja u induktivno spregnutom kolu, koja iznose:

$\underline{I}_1 = (10 + j10)$ A; $\underline{I}_2 = -j10$ A; $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 10$ A.

8.22. ----- a) $\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m$ ..... (1)

$$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m \text{ ..... (2)} \Rightarrow \underline{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_m}{\underline{Z}_2}\underline{I}_1$$

$$\underline{U} = \underline{I}_1\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_2}\underline{I}_1 = \underline{I}_1\left(\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_2}\right);\ \text{gde je:}$$

$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = (6 - j10)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_{L2} - X_{C2}) = (4 - j5)\ \Omega$;

$\underline{Z}_m = -jk\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = -j\cdot 0{,}3\sqrt{150} = -j3{,}67[\Omega]$.

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_2} = \frac{(6 - j10)\cdot(4 - j5) - (-j3{,}67)^2}{4 - j5} = 7{,}32 - j8{,}35\,[\Omega]$$

b) $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ul}} = \dfrac{100}{7{,}32 - j8{,}35} = 5{,}94 + j6{,}77\,[A]$

$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^* = 100\cdot(\,5{,}94 - j6{,}77\,) = (\,594 - j677\,)$ [VA].

8.23. ----- Umesto dva redno vezana kondenzatora kapaciteta $2C_2$ možemo uzeti ekvivalentni kondenzator kapaciteta $C_e = \dfrac{2C_2\cdot 2C_2}{2C_2 + 2C_2} = C_2$; $\underline{Z}_1 = j\omega L_1 = j5\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = j(\,\omega L_2 - 1/\omega C_e\,)$; $\underline{Z}_m = -j7\ \Omega$.

$\underline{U} = \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_m$ ..... (1) ; $\underline{U} = \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_1\underline{Z}_m$ ..... (2) i $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ..... (3).

Iz prve jednačine sledi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U} - \underline{I}_2\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1}\ ; \qquad \text{a iz druge:} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U} - \underline{I}_1\underline{Z}_m}{\underline{Z}_2}\ .$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U} - \dfrac{\underline{U} - \underline{I}_1\underline{Z}_m}{\underline{Z}_2}\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1} = \frac{\dfrac{\underline{U}\underline{Z}_2 - \underline{U}\underline{Z}_m + \underline{I}_1\underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_2}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}\underline{Z}_2 - \underline{U}\underline{Z}_m + \underline{I}_1\underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}\underline{U}\ .$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U} - \dfrac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}\underline{U}\underline{Z}_m}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}\left(1 - \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_m - \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}\right)}{\underline{Z}_2} = \underline{U}\,\frac{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2} - \underline{Z}_2\underline{Z}_m + \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}}{\underline{Z}_2} = \frac{(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m)}{(\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2})}\underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m + \underline{Z}_1 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}\underline{U} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}\underline{U}$$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m} \qquad \frac{j5\cdot\underline{Z}_2 - (-j1)^2}{j5 + \underline{Z}_2 - 2\cdot(-j1)} = -j7 \Rightarrow \frac{j5\cdot\underline{Z}_2 + 1}{\underline{Z}_2 + j7} = -j7 \Rightarrow 1 + j5\cdot\underline{Z}_2 = -j7\cdot\underline{Z}_2 + 49 \Rightarrow$$

$\underline{Z}_2 = -j4\ [\Omega] \Rightarrow Z_2 = X_{L2} - X_C = -4 \Rightarrow X_C = X_{L2} + 4 = 9\ [\Omega]$.

Dakle, ukupni kapacitivni otpor druge grane iznosi 9 Ω. Kako su u toj grani vezana dva kondenzatora na red njihove pojedinačne otpornosti iznose po 4,5 Ω.

8.24. ----- $\underline{U} = \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_m \Rightarrow 1 = 0\cdot\underline{Z}_1 + j2\cdot\underline{Z}_m \Rightarrow \underline{Z}_m = -j0{,}5 \Rightarrow Z_m = 0{,}5\ [\Omega]$.

$$Z_m = \omega L_m = k\sqrt{\omega L_1\cdot\omega L_2} = 0{,}5$$

$$k = \frac{\omega L_m}{\sqrt{\omega L_1\cdot\omega L_2}} = 0{,}25.$$

8.25. ----- Ukupna aktivna snaga kola iznosi: $P = I^2(\,R_1 + R_2\,)$, te je $R_1 + R_2 = P/I^2 = 100/4 = 25\ \Omega$

$R_2 = 25 - R_1 = 15\ \Omega$.

Kada su kalemovi vezani u istom smeru (fluksevi se sabiraju) ukupna impedansa kola iznosi.

$\underline{Z}_1 = R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_m + j\omega L_2 + j\omega L_m = R_1 + R_2 + j\omega(\,L_1 + L_2 + 2L_m\,) \Rightarrow$

$$Z_1 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega L_m)^2} = \frac{U}{I_1} = 50$$

$$\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega L_m = \sqrt{Z_1^{\,2} - (R_1 + R_2)^2} = \sqrt{2500 - 225} = 43{,}2\,[\Omega].$$

a kada su kalemovi povezani suprotno (fluksevi se oduzimaju), tada je ukupna impedansa kola:

$$\underline{Z}_2 = (\,R_1 + R_2\,) + j\,\omega(\,L_1 + L_2 - 2L_m\,) \Rightarrow Z_2 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega L_m)^2} = \frac{U}{I_2} = \frac{100}{2{,}5} = 40\,[\Omega].$$

$$\Rightarrow \quad \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega L_m = \sqrt{Z_2^{\,2} - (R_1 + R_2)^2} = 31{,}3\,[\Omega].$$

$314\cdot 0{,}05 + 314L_2 + 628L_m = 43{,}2$ ..... (1)

$314\cdot 0{,}05 + 314L_2 - 628\,L_m = 31{,}3$ ..... (2)

$31{,}4 + 628\,L_2 = 73{,}5 \;\Rightarrow\; L_2 = 0{,}067\ [H] = 67\ [mH]$.
$628\,L_m = 43{,}2 - 15{,}7 - 314\cdot 0{,}067 = 27{,}5 - 21{,}04 = 6{,}46 \;\Rightarrow\; L_m = 0.01\ [H] = 10\ [mH]$.

$$k = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}05\cdot 0{,}067}} = \frac{0{,}01}{0{,}058} = 0{,}17.$$

8.26. ----- $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \;\Rightarrow\; \underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$ ..... (1)
$\underline{U} = jX_{L1}\underline{I}_1 + jX_m\underline{I}_2 - jX_{C1}\underline{I}_3$ ..... (2)
$0 = jX_m\underline{I}_1 + jX_{L2}\underline{I}_2 - jX_{C2}\underline{I}_2 + jX_{C1}\underline{I}_3$ ..... (3).

Zamenom prve jednačine u druge dve nastaju jednačine:

$\underline{U} = jX_{L1}\underline{I}_1 + j\,X_m\,\underline{I}_2 - jX_{C1}(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \;\Rightarrow\; j10 = j1\,\underline{I}_1 + j2\,\underline{I}_2$ .... (1′)
$0 = jX_m\underline{I}_1 + j(X_{L2} - X_{C2})\underline{I}_2 + jX_{C1}(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \;\Rightarrow\; 0 = j2\,\underline{I}_1 + j(1 - X_{C2})\underline{I}_2$ ..... (2′).

Iz jednačine 1′ sledi rešenje struje I_1, koja iznosi: $\underline{I}_1 = 2$ A.
Zamenom struje $\underline{I}_1$ u jednačinu 2′ sledi: $0 = j4 + j4(1 - X_{C2})$, te je rešenje reaktanse $X_{C2} = 2\ [\Omega]$.

8.27. ----- a) $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \;\Rightarrow\; \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$ .... (1)
$j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega L_m\underline{I}_2 + R_2\underline{I}_2 - R_2\underline{I}_2 - j\omega L_2\underline{I}_2 - j\omega L_m\underline{I}_1 = 0$ .... (2)

Uvrštavanjem prve jednačine u drugu, te daljim sređivanjem nastale jednačine, slede izrazi za jačine struja po granama:

$$\underline{I}_1 = \frac{(R_2 + j\omega L_2) - j\omega L_m}{(R_1 + j\omega L_1) + (R_2 + j\omega L_2) - 2j\omega L_m}\underline{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}\underline{I}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{(R_1 + j\omega L_1) - j\omega L_m}{(R_1 + j\omega L_1) + (R_2 + j\omega L_2) - 2j\omega L_m}\underline{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}\underline{I}}\,.$$

Gde je: $\underline{Z}_1 = R_1 + j\,\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, $\underline{Z}_m = j\omega L_m$ ($\boldsymbol{L_m = k\sqrt{L_1 L_2}}$).

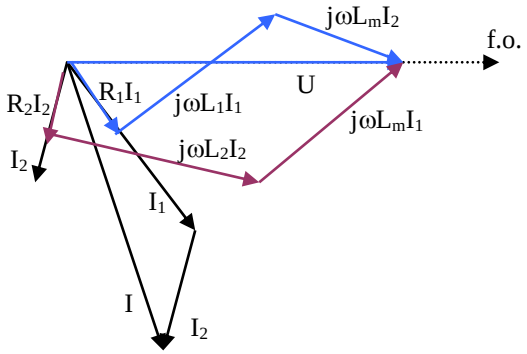
b) $\underline{U}_S - R_1\underline{I}_1 - j\omega L_1\underline{I}_1 - j\omega L_m\underline{I}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_S = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_m\underline{I}_2$.
Zamenom kompleksnih izraza za struje sledi:

$$\boldsymbol{\underline{U}_S = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}\underline{I}}\ ,\ \text{gde je } U_S = U_{AB}.$$

c) $$\boldsymbol{\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^{\,2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}}$$

8.28. ----- a) Koristeći jednačine iz predhodnog zadatka (veza – šema je ista) slede rešenja za struje:
$\underline{I}_1 = (100 - j150) = 180{,}3\cdot e^{-j56{,}3^\circ}$ mA; $\underline{I}_2 = (-25 - j125) = 127{,}5\cdot e^{-j101{,}3^\circ}$ mA; $\underline{I} = (75 - j275) = 285\cdot e^{-j74{,}7^\circ}$ mA..

b)



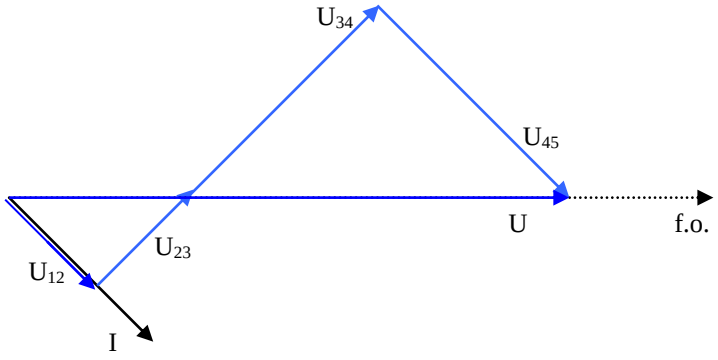
Položaj fazora u odnosu na struje je:

$j\omega L_1\underline{I}_1 \perp \underline{I}_1$; $j\omega L_2\underline{I}_2 \perp \underline{I}_2$;
$j\omega L_m\underline{I}_1 \perp \underline{I}_1$; $j\omega L_m\underline{I}_2 \perp \underline{I}_2$;
$R_1\underline{I}_1$ u fazi sa $\underline{I}_1$, a
$R_2\underline{I}_2$ u fazi sa $\underline{I}_2$

8.29. ----- a) $\underline{U} - R_1\,\underline{I} - j\omega L_1\,\underline{I} + j\omega L_m\,\underline{I} - j\omega L_2\,\underline{I} + j\omega L_m\,\underline{I} - R_2\,\underline{I} = 0$.
Kako nije data nijedna početna faza, pa se za napon U može usvojiti $\underline{U} = 16$ V.
Rešenjem navedene jednačine kompleksni izraz za struju iznosi: $\underline{I} = 0{,}2 - j0{,}2$ [A].

b) $\underline{U}_{12} = \underline{I}\,R_1 = 2 - j2$ [V]; $\underline{U}_{23} = j\omega L_1\underline{I} - j\omega L_m\,\underline{I} = 2 + j2$ [V]; $\underline{U}_{34} = j\omega L_2\,\underline{I} - j\omega L_m\,\underline{I} = 6 + j6$ [V] i
$\underline{U}_{45} = \underline{I}\,R_2 = 6 - j6$ [V].

c)



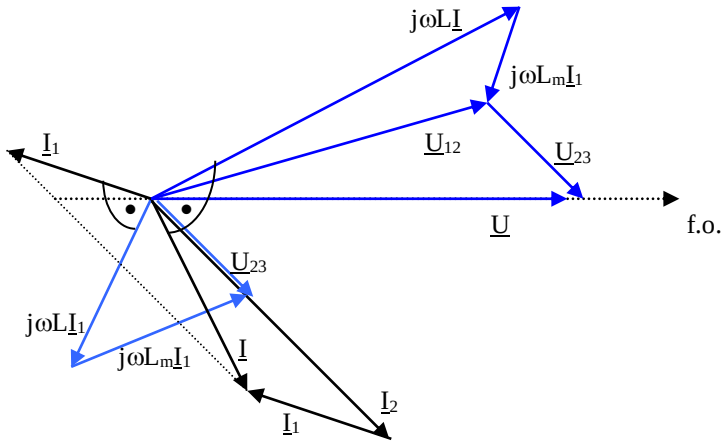
8.30. ----- a) Primenom Kirhofovih pravila, za dato kolo odgovaraju sledeće jednačine:

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ..... (1)
$\underline{U} - j\omega L\,\underline{I} - j\omega L_m\,\underline{I}_1 - j\omega L\,\underline{I}_1 - j\omega L_m\,\underline{I} = 0$ ..... (2) i
$R\,\underline{I}_2 - j\omega L\,\underline{I}_1 - j\omega L_m\,\underline{I} = 0$ .....(3);

gde je $L_m = kL \Rightarrow X_m = \omega L_m = k\,\omega L = 0{,}5 \cdot 40 = 20$ [Ω].
Rešenjem navedenog sistema jednačina, slede rešenja struja, koja iznose:
$\underline{I}_1 = (-0{,}3 + j0{,}1) = 0{,}316 \cdot e^{-j59°}$ [A]; $\underline{I}_2 = (0{,}6 - j0{,}6) = 0{,}845 \cdot e^{-j45°}$ [A]; $\underline{I} = (0{,}3 - j0{,}5) = 0{,}583 \cdot e^{-j59°}$ [A].

b) $\underline{U}_{12} = \underline{I}\,j\omega L + \underline{I}_1\,j\omega L_m = 18 + j6$ [V]; $\underline{U}_{23} = \underline{I}_2\,R = 6 - j\,6$ [V].

c)



8.31. ----- a) $\underline{E} - j\omega L_2\,\underline{I}_2 - j\omega L_m\,\underline{I}_S = 0 \Rightarrow j5 = j50\,\underline{I}_2 + j2 \Rightarrow \underline{I}_2 = 0{,}06$ [A] $\Rightarrow I_2 = 0{,}06$ [A].
b) $\underline{U}_S - j\omega L_1\,\underline{I}_S - j\omega L_m\,\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_S = j\omega L_1\,\underline{I}_S + j\omega L_m\,\underline{I}_2 = j4{,}6$ [V] $\Rightarrow U_S = 4{,}6$ [V].

8.32. ----- $L_1 = L_2 = X_L/\omega = 10 \cdot 10^{-3}$ [H] $\Rightarrow L_m = kL = 6 \cdot 10^{-3}$ [H]
$\underline{U}_S - (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_S + j\omega L_m\,\underline{I}_2 = 0$ ..... (1) ; gde je $\underline{I}_S = 1$ [A].
$(R_2 + j\omega L_2 - j1/\omega C)\underline{I}_2 - j\omega L_m\,\underline{I}_1 = 0$ ..... (2) $\Rightarrow \underline{I}_2 = j0{,}6$ [A].
$\underline{U}_S = (13{,}6 + j\,10)$ V $\Rightarrow \underline{S}_1 = \underline{U}_S \cdot \underline{I}_S = (13{,}6 + j\,10)$ VA.

8.33. ----- $\underline{U} = j\omega L_1\,\underline{I}_1 + j\omega L_m\,\underline{I}_2$ .... (1) idući kratkom vezom;
$j\omega L_2\,\underline{I}_2 + j\omega L_m\,\underline{I}_1 = 0$ .....(2) $\Rightarrow \underline{I}_2 = -\underline{I}_1\,L_m/L_2$

$\underline{U} = j\omega \cdot (\underline{I}_1 L_1 - \underline{I}_1 L_m^2/L_2) = j\omega \underline{I}_1 (L_1 - L_m^2/L_2) \Rightarrow$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = j\omega L_e = j\omega\left(L_1 - \frac{k^2 L_1 L_2}{L_2} \right) = j\omega\left(L_1 - k^2 L_1\right) = j\omega\left(0{,}5 - 0{,}5^2 \cdot 0{,}5\right) = j\omega\left(0{,}5 - 0{,}125\right) = j\omega 0{,}375\ .$$

Ekvivalentna induktivnost iznosi: $L_e = 0{,}375$ H = 375 mH.

8.34. ----- $\underline{U} = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_m \underline{I}_2 + jX_3 \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{U} = j2\,\underline{I}_1 + j\,\underline{I}_2 - j3\,\underline{I}_3 = 0$ ..... (1)

$j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega L_m \underline{I}_1 = jX_3 \underline{I}_3 \Rightarrow j2\,\underline{I}_2 + j1\,\underline{I}_1 = -j3\,\underline{I}_3$ ..... (2)

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ ..... (3).

Iz prve jednačine sledi: $\underline{I}_2 = \dfrac{-j\underline{U} - 3\underline{I}_1}{3}$,

a iz druge : $\underline{I}_3 = \dfrac{-\underline{I}_1 - 2\underline{I}_2}{3} = \dfrac{-\underline{I}_1 - 2\dfrac{-j\underline{U} - 3\underline{I}_1}{3}}{3} = \dfrac{\dfrac{-3\underline{I}_1 + j2\underline{U} + 6\underline{I}_1}{3}}{3} = \dfrac{3\underline{I}_1 + j2\underline{U}}{9}$.

Uvrštavanjem struja $\underline{I}_2$ i $\underline{I}_3$ u treću jednačinu sledi:

$$\underline{I}_1 = \frac{-j\underline{U} - 3\underline{I}_1}{3} + \frac{j2\underline{U} + 3\underline{I}_1}{9} = \frac{-j3\underline{U} - 9\underline{I}_1 + j2\underline{U} + 3\underline{I}_1}{9} = \frac{-j\underline{U} - 6\underline{I}_1}{9} = -j\frac{1}{9}\underline{U} - \frac{2}{3}\underline{I}_1 \Rightarrow \frac{5}{3}\underline{I}_1 = -j\frac{1}{9}\underline{U}$$

$$\underline{I}_1 = -j\frac{1}{15}\underline{U}.$$

Ulazna impedansa je jednaka : $\underline{Z}_{ul} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \dfrac{\underline{U}}{-j\dfrac{1}{15}\underline{U}} = j15[\Omega].$

8.35. ----- $\underline{U} - (j90 + j29)\underline{I}_1 - (j40 + j30)\underline{I}_2 = 0$ ..... (1)

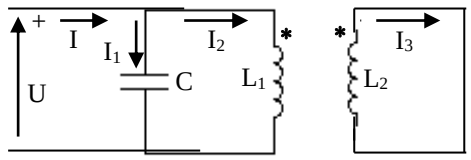
$(j30 + j20)\underline{I}_1 - (j20 - j40)\underline{I}_2 = 0$ ---------- (2) $\Rightarrow \underline{I}_2 = -2{,}5\,\underline{I}_1$.

$\underline{U} = -j55\,\underline{I}_1$

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = -j55[\Omega].$$

8.36. ----- $\underline{Z}_{ul} = -j\omega k\sqrt{L_1 L_2} - j3[\Omega] = -jX_c = -j\dfrac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \dfrac{1}{\omega X_C} = \dfrac{1}{3\cdot 10^3} = 333{,}33[\mu F]$

8.37. -----



$\underline{U} = \underline{I}_1 \cdot (-j1/\omega C) \Rightarrow \underline{I}_1 = j\omega C\underline{U}$

$\underline{U} = j\omega L_1 \underline{I}_2 - j\omega L_m \underline{I}_3$

$0 = j\omega L_2 \underline{I}_3 - j\omega L_m \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_2 \cdot L_m/L_2$

$\underline{U} = j\omega L_1 \underline{I}_2 - j\omega L_m \cdot (\underline{I}_2 L_m/L_2) = j\omega(L_1 - L_m^2/L_2)\underline{I}_2$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$

$\underline{U} = j\omega(\underline{I} - \underline{I}_1)\cdot(L_1 - L_m^2/L_2) = j\omega(\underline{I} - j\omega C\underline{U})\cdot(L_1 - L_m^2/L_2) = j\omega\underline{I}(L_1 - L_m^2/L_2) + \omega^2 C\underline{U}(L_1 - L_m^2/L_2) \Rightarrow$

$\underline{U}(1 - \omega^2 CL_1 + \omega^2 CL_m^2/L_2) = j\omega\underline{I}(L_1 - L_m^2/L_2) \Rightarrow$

$$\underline{Y}_{ul} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1 - \omega^2 CL_1 + \omega^2 C\left.L_m^2\right/L_2}{j\omega\left(L_1 - \left.L_m^2\right/L_2\right)} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L_1(1-k^2)}\right).$$

Kako je kod antirezonanse susceptansa jednaka nuli (B = 0), sledi

$$\omega_o C = \frac{1}{\omega_o L_1(1-k^2)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_1 C(1-k^2)}}}$$

8.38. ----- $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ..... (1)

$\underline{U} = (j\omega L_1 - j\,1/\omega C)\underline{I}_1 - j\omega L_m \underline{I}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega L_m \underline{I}_1$ ..... (2)

$\underline{I}_1(j\omega L_1 + j\omega L_m - j\,1/\omega C) = \underline{I}_2(j\omega L_2 + j\omega L_m) \Rightarrow$

$$\underline{I}_1 = \frac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m}\underline{I}_2$$

$$\underline{U} = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega L_m \underline{I}_1 = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega L_m \frac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C}}\underline{I}_2 = j\omega\underline{I}_2\left(L_2 - \frac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m}L_m\right)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{j\omega\left(L_2 - \dfrac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m} L_m\right)} = -j\frac{\underline{U}}{\omega\left(L_2 - \dfrac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m} L_m\right)}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m}\underline{I}_2 + \underline{I}_2 = \underline{I}_2\left(\frac{\omega L_2 + \omega L_m + \omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m}{\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m}\right)$$

$$\underline{I} = -j\frac{\underline{U}}{\omega\left(L_2 - \dfrac{\omega L_2 + \omega L_m}{\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m} L_m\right)} \cdot \frac{\omega L_2 + \omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C} + 2\omega L_m}{\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C} + \omega L_m}$$

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = -j\frac{\omega L_1 + \omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C} + 2\omega L_m}{\omega^2 L_1 L_2 - \dfrac{L_2}{C} + \omega^2 L_2 L_m + \omega^2 L_2 + \omega^2 L_m} = -jB$$

Kako je kod antirezonanse susceptansa jednaka nuli (B = 0), sledi:

$\omega L_1 + \omega L_2 - 1/\omega C + 2\omega L_m = 0 \;/\cdot\omega \;\Rightarrow\; \omega^2(L_1 + L_2 + 2L_m) - 1/C = 0 \;\Rightarrow$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{C\left(L_1 + L_2 + 2k\sqrt{L_1 L_2}\right)}}\,.$$

8.39. ----- $\underline{Z}_m = -j\omega L_m = -j10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = -j3\ \Omega$; $\underline{Z}_{1u} = \underline{Z}_1 + j\omega L_1 = (10 - j5) + j10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = (10 - j3)\ \Omega$;
$\underline{Z}_{2u} = \underline{Z}_2 + j\omega L_2 = (5 + j5) + j10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = (5 + j10)\ \Omega$.

$\underline{E} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{1u} + \underline{I}_2 \underline{Z}_m$ ..... (1)

$0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{2u} + \underline{I}_1 \underline{Z}_m$ ..... (2) .

Sređivanjem ovih jednačina slede izrazi za određivanje struja (videti rešenje zadatka 8.1.), koje iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{2u} \cdot \underline{E}}{\underline{Z}_{1u} \cdot \underline{Z}_{2u} - \underline{Z}_m{}^2} = \frac{(5 + j10) \cdot 1}{(10 - j3) \cdot (5 + j10) - (-j3)^2} = \frac{5 + j10}{89 + j85} = (0{,}0855 + j0{,}0307)[\mathrm{A}] = (85{,}5 + j30{,}7)[\mathrm{mA}]$$ i

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{Z}_m \cdot \underline{E}}{\underline{Z}_{1u} \cdot \underline{Z}_{2u} - \underline{Z}_m{}^2} = \frac{j3}{89 + j85} = (0{,}0168 + j0{,}0176)[\mathrm{A}] = (16{,}8 + j17{,}6)[\mathrm{mA}].$$

9.1. ----- a) $\underline{Z}_1 = \dfrac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}\underline{Z}_2 = \dfrac{2}{-\mathrm{j}40}\cdot 5 = \mathrm{j}0{,}25\,[\Omega]$

b) $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = \dfrac{100}{5+\mathrm{j}0{,}25} = 19{,}9501 - \mathrm{j}0{,}9975\,[\mathrm{A}]$; $I_1 = I_2 = 19{,}975$ A;

$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4} = \dfrac{100}{2-\mathrm{j}40} = 0{,}1247 + \mathrm{j}2{,}4938\,[\mathrm{A}]$; $I_3 = I_4 = 2{,}4969$ A; $\underline{I}_5 = 0$ (most u ravnoteži)

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = 20{,}0748 + \mathrm{j}1{,}4963$; $I = 20{,}1305$ A.

9.2. ----- a) $R_4 = 10\ \Omega$; $L_4 = 1$ H; b) $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = \dfrac{\underline{U}}{R_1+R_2} + \dfrac{\underline{U}}{R_3+\mathrm{j}\omega L_3+R_4+\mathrm{j}\omega L_4} = (1{,}66 - \mathrm{j}0{,}265)\,[\mathrm{A}]$.

9.3. ---- $\underline{Z}_1 = R_1$; $\underline{Z}_2 = R_2$; $\underline{Z}_3 = R_3 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_3}$;

$$\underline{Z}_4 = \frac{R_4\cdot\left(-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_4}\right)}{R_4 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_4}} = \frac{-\mathrm{j}\dfrac{R_4}{\omega C_4}}{\dfrac{R_4\omega C_4 - \mathrm{j}1}{\omega C_4}} = \frac{-\mathrm{j}R_4}{R_4\omega C_4 - \mathrm{j}1} = \frac{R_4}{1+\mathrm{j}R_4\omega C_4}$$

a) Uslov ravnoteže mosta je:

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3 \Rightarrow R_1\cdot R_2 = \left(R_3 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_3}\right)\cdot\frac{R_4}{1+\mathrm{j}\omega R_4 C_4}.$$

Uvrštavanjem vrednosti elemenata u navedenu jednačinu slede rešenja: $\omega = 1/RC = 3\,140$ rad/s $\Rightarrow$ f = 500 Hz.

b) $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{R_1+R_2} = 1\,[\mathrm{A}]$. Da bi most bio u ravnoteži (tačke C i D moraju biti na istom potencijalu), tj. mora biti zadovoljen uslov: $\underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{I}_3\underline{Z}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\underline{I}_3 = (1+\mathrm{j}1)\,[\mathrm{A}]$.

c) $P_3 = I_3^2\cdot R_3 = (1^2 + 1^2)\cdot 160 = 160$ [W].

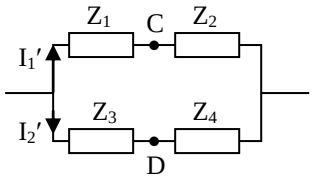
9.4. ----- Iz uslova ravnotrže $\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3 \Rightarrow R_1\cdot R_4 = (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3)\dfrac{R_2}{1+\mathrm{j}R_2\omega C_2}$ (Maksvel Vinov most):

$R_1R_4 + \mathrm{j}R_1R_4R_2\omega C_2 = R_2R_3 + \mathrm{j}R_2\omega L_3 \Rightarrow R_1R_4 = R_2R_3$ ..... (1) i $L_3 = R_1R_4C_4$ ..... (2).

a) $R_3 = R_1R_4/R_2 = 10\cdot 20 / 100 = 2\ [\Omega]$; $L_3 = 10\cdot 20\cdot 1\cdot 10^{-6} = 0{,}2\cdot 10^{-3}$ [H] = 0,2 [mH].

b) Zamenom treće i četvrte grane, most nije više u ravnoteži, pa će zbog otpora instrumenta u kolu biti prisutno pet impedansi, koje su vezane u trougao, odnosno zvezdu. Zadatak se dalje može rešiti metodom transformacije jednog trougla u zvezdu, ili pak metodom Tevenena. U ovakvim slučajevima je metoda Tevenena najpogodnija metoda, pa se ona najčešće i koristi.

Dakle, izbacimo dijagonalu CD i odredimo napon na tim tačkama (napon Tevenena).



$\underline{Z}_1 = R_1 = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = R_2/(1+\mathrm{j}R_2\omega C_2) = (100 - \mathrm{j}3{,}14)\ \Omega$;

$\underline{Z}_3 = R_4 = 20\ \Omega$; $\underline{Z}_4 = (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3) = (2 + \mathrm{j}0{,}0628)\ \Omega$.

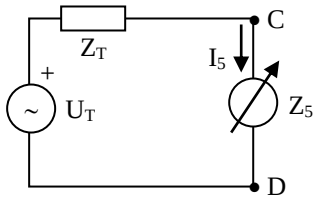
$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = \frac{220}{10+100-\mathrm{j}3{,}14} = (2+\mathrm{j}0{,}057)\,[\mathrm{A}];$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4} = \frac{220}{20+2+\mathrm{j}0{,}0628} = (10-\mathrm{j}0{,}285)\,[\mathrm{A}]$$

$\underline{U}_{CD} + \underline{I}_1'\underline{Z}_1 - \underline{I}_2'\underline{Z}_3 = 0 \Rightarrow \underline{U}_T = \underline{U}_{CD} = \underline{I}_2'\underline{Z}_3 - \underline{I}_1'\underline{Z}_1 = (10 - \mathrm{j}0{,}285)\cdot 20 - (2 + \mathrm{j}0{,}057)\cdot 10 = (180 - \mathrm{j}5{,}13)$ V.

Impedansa Tevenena (između tačaka CD – gde je isključena dijagonala) iznosi:

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3\cdot\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4} = \frac{10\cdot(100-\mathrm{j}3{,}14)}{10+100-\mathrm{j}3{,}14} + \frac{20\cdot(2+\mathrm{j}0{,}0628)}{20+2+\mathrm{j}0{,}0628} = (10{,}92 - \mathrm{j}0{,}021)\,[\Omega]$$



Struja koja prolazi kroz instrument nakon zamene treće i četvrte grane iznosi:

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_5} = \frac{180 - j5{,}13}{10{,}92 - j0{,}021 + 20} = (5{,}82 - j0{,}16)[A] \Rightarrow$$

$$I_5 = \sqrt{5{,}82^2 + 0{,}16^2} = 5{,}822 \text{ A}$$

9.5. ----- $\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow R_1\cdot[\,R_4 + j(\omega L_4 - 1/\omega C_4\,)] = R_2R_3 \Rightarrow R_1R_4 = R_2R_3 \ldots (\,1\,);\quad \omega L_4 = 1/\omega C_4 \ldots (\,2\,).$

Iz prve jednačine sledi: $R_4 = \dfrac{R_2R_3}{R_1} = 5[\Omega]$, a iz druge: $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_4C_4}} = \dfrac{1}{6{,}28\cdot\sqrt{0{,}025\cdot 400\cdot 10^{-12}}} = 50[\text{Hz}]$.

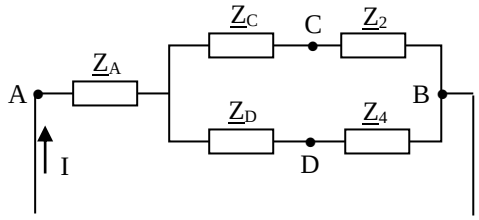
9.6. ----- $\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 / \underline{Z}_4 = 6\cdot 3 / (\,2 + j3{,}14\,) = (\,1{,}7 - j\,2{,}7\,)\,[\Omega]$.

Elementi prve impedanse su otpornik otpornosti $R_1 = 1{,}7\ \Omega$ i kondenzator kapacitivne otpornosti $X_c = 2{,}7\ \Omega$, odnosno kapacitivnosti: $C_1 = 1 / \omega X_{C1} = 1 / 314\cdot 2{,}7 = 1{,}175\cdot 10^{-3}$ [F] = 1 175 [μF].

Ukupna struja iznosi:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{100}{1{,}7 - j2{,}7 + 6} + \frac{100}{2 + 2 + j3{,}14} = (27 - j8)[A] \Rightarrow \quad I = 28{,}3 \text{ A}.$$

9.7. -----



Trougao ACD transformisati u zvezdu, pri čemu nastaju impedanse:

$$\underline{Z}_A = \frac{R_1\cdot j\omega L_3}{R_1 + j\omega L_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}} = \frac{5\cdot j3}{5} = j3[\Omega]$$

$$\underline{Z}_C = \frac{5\cdot(-j3)}{5} = -j3[\Omega];\quad \underline{Z}_D = \frac{j3\cdot(-j3)}{5} = 1{,}8[\Omega].$$

Ukupna impedansa kola iznosi:

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_A + \frac{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_2)\cdot(\underline{Z}_D + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_D + \underline{Z}_4} = j3 + \frac{(-j3 + 2{,}2 + j6)\cdot(1{,}8 + 6 - j3)}{-j3 + 2{,}2 + j6 + 1{,}8 + 6 - j3} = j3 + \frac{(2{,}2 + j3)\cdot(7{,}8 - j3)}{10} = 2{,}616 + j4{,}68.$$

Ukupna struja je:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{53{,}64}{2{,}616 + j4{,}68} = (4{,}88 - j8{,}73)[A].$$

9.8. ----- $(\,R_x + R_3\,) / (\,R + R_4\,) = R_1 / R_2 \ldots\ldots (\,1\,);\quad \omega L_x / \omega L = R_1 / R_2 \ldots\ldots\ldots (\,2\,).$

Zbog dve jednačine (uslov ravnoteže mosta) da bi se most doveo u ravnotežu naizmenično se moraju pomerati oba klizača.

Iz druge jednačine, sledi: $R_1 / R_2 = 30 / 20 = 1{,}5 \Rightarrow R_1 = 1{,}5\ R_2$

$R_1 + R_2 = 100 \Rightarrow 1{,}5\ R_2 + R_2 = 100 \Rightarrow R_2 = 40\ \Omega;\ R_1 = 60\ \Omega.$

$R_3 + R_4 = 30 \Rightarrow R_3 = 30 - R_4.$

$(\,10 + 30 - R_4\,) / (\,10 + R_4\,) = 1{,}5 \Rightarrow 40 - R_4 = 15 + 1{,}5\ R_4 \Rightarrow 25 = 2{,}5\ R_4 \Rightarrow R_4 = 10\ \Omega;\ R_3 = 20\ \Omega.$

Dakle, rešenja su sledeća: $R_1 = 60\ \Omega;\ R_2 = 40\ \Omega;\ R_3 = 20\ \Omega$ i $R_4 = 10\ \Omega$.

9.9. ----- $\underline{Z}_1 = R - j\ 1/\omega C;\ \underline{Z}_2 = R / (\,1 + jR\omega C\,)$, vidi zadatak 9.2; $\underline{Z}_3 = R_3;\ \underline{Z}_4 = R_4;$

$\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow (\,R - j1 / \omega C\,)\cdot R_4 = R_3\cdot R / (\,1 + jR\omega C\,) \Rightarrow (\,RR_4 - jR_4 / \omega C\,)\cdot(\,1 + jR\omega C\,) = RR_3 \Rightarrow$

$RR_4 + j\,R^2R_4\omega C - jR_4 / \omega C + R_4R\omega C / \omega C = RR_3 \Rightarrow$

$2RR_4 = RR_3 \ldots\ldots (\,1\,);\quad R^2\omega C = 1/\omega C \ldots\ldots (\,2\,).$

Iz prve jednačine sledi. $R_3 = 2R_4$, a iz druge $\omega = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{10^4\cdot 100\cdot 10^{-9}} = \dfrac{10^5}{10^2} = 1000\left[\text{rad}/\text{s}\right].$

9.10. ----- $\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow (\,R_1 + j\omega L_x\,)\cdot R_4 / (\,1 + jR_4\omega C_4\,) = R_2R_3 \Rightarrow$

$R_1R_4 + jR_4\omega L_x = R_2R_3 + jR_2R_3R_4\omega C_4$

$R_1R_4 = R_2R_3 \ldots\ldots (\,1\,);\ L_x = R_2R_3C_4 \ldots.. (\,2\,).$

$L_x = 400\cdot 5\,000\cdot 10\cdot 10^{-9} = 20\cdot 10^{-3}$ H = 20 mH.

9.11. ----- $[R_1 / (1 + jR_1\omega C_1)]\cdot(R_X + j\omega L_X) = R_2 R_3 \Rightarrow R_1R_X + jR_1\omega L_X = R_2R_3 + jR_2R_3R_1\omega C_1 \Rightarrow$
$R_X = R_2R_3 / R_4$ …. (1); $L_X = R_2R_3\omega C_1$ ……. (2).

9.12. ….. $(R_1 - j\ 1/\omega C_1)\cdot(R_X + j\omega L_X) = R_2R_3 \Rightarrow R_1R_X + jR_1\omega L_X - jR_X /\omega C_1 + \omega L_X / \omega C_1 = R_2R_3 \Rightarrow$
$R_1R_X + L_X / C_1 = R_2R_3$ …… (1); $R_1\omega L_X = R_X /\omega C_1$ …….. (2)

Iz druge jednačine $R_X = R_1\omega^2L_XC_1$ uvrstimo u prvu, pa sledi:
$R_1^2\omega^2L_XC_1 + L_X / C_1 = R_2R_3 \Rightarrow L_X (R_1^2\omega^2C_1 + 1 / C_1) = R_2R_3 \Rightarrow L_X\cdot(R_1^2\omega^2C_1^2 + 1) / C_1 = R_2R_3 \Rightarrow$

$$L_X = \frac{R_2R_3C_1}{1+R_1^{\,2}\omega^2C_1^{\,2}} \quad ; \qquad R_X = \frac{R_1R_2R_3\omega^2C_1^{\,2}}{1+R_1^2\omega^2C_1^{\,2}}.$$

9.13. ----- $\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow R_X = R_2\,R_3 / R_4$ …… (1); $L_X = R_2R_3C_4$ …….. (2).

Da bi se most doveo u ravnotežu moraju se menjati dva otpora. Jedan otpor ima zadatak da sređuje jednu jednačinu a drugi drugu. Promene su naizmenične i postepene sve dok indikator nule ne pokaže nulu (most uravnotežen). Najjednostavnija varijanta je da su promenljivi R_4 i C_4, gde R_4 sređuje na prvu jednačinu a C_4 drugu.

9.14. ----- $\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow (R_x - j1/\omega C_x)\cdot R_4 / (1 + jR_4\omega C_4) = R_2\cdot(- j1/\omega C_3) \Rightarrow$
$R_xR_4 - jR_4/\omega C_x = - jR_2/\omega C_3 + R_2R_4\omega C_4/\omega C_3 \Rightarrow R_x = R_2C_4/C_3$ …. (1); $R_4/C_x = R_2/C_3$ …… (2), odnosno:

$$R_x = \frac{C_4}{C_3}R_2 \text{ ….. (1) ; } \quad C_x = \frac{R_4}{R_2}C_3 \text{ …….. (2)}$$

Da bi zadovoljili obe jednačine (uslov ravnoteže mosta) naizmenično menjati R_4 i C_4 (C_4 za prvu jednačinu a R_4 za drugu). Moguća je i varijanta C_3 i C_4 ali je ona nešto nepovoljnija, jer C_3 ima istovremeno uticaja na obe jednačine, a samim tim i teže će se ispuniti uslov ravnoteže mosta.

Kako ni u jednoj jednačini (uslov ravnoteže mosta) nema učestanosti, sledi da jednačine ne zavise od frekvencije (odgovaraju na svim frekvencijama). Dakle, C_x ne zavisi od učestanosti naizmeničnog izvora.

9.15. -----

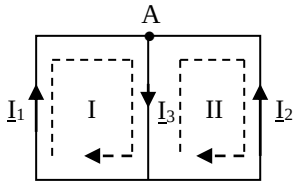
$$\underline{Z}_1\,\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3 \Rightarrow \left(R_X + j\omega L_X\right)\cdot\left(R_4 - j\frac{1}{\omega C_4}\right) = R_2R_3 \Rightarrow R_XR_4 - j\frac{R_X}{\omega C_4} + jR_4\omega L_X + \frac{L_X}{C_4} = R_2R_3$$

$$R_XR_4 + \frac{L_X}{C_4} = R_2R_3 \text{ …… (1); } \quad R_4\omega L_X = \frac{R_X}{\omega C_4} \text{ …….. (2). (uslovi ravnoteže mosta).}$$

Iz druge jednačine $R_X = R_4\omega^2C_4L_X$ uvrstimo u prvu jednačinu, pa sledi:
$R_4^2\omega^2C_4L_X + L_X /C_4 = R_2R_3 \Rightarrow L_X\cdot(R_4^2\omega^2C_4 + L_X /C_4) = R_2R_3 \Rightarrow$

$$L_X = \frac{R_2R_3C_4}{R_4^{\,2}\omega^2C_4^{\,2}+1} \text{ ; odnosno } \quad R_X = \frac{R_2R_3R_4\omega^2C_4^{\,2}}{R_4^{\,2}\omega^2C_4^{\,2}+1}.$$

10.1.1. -----

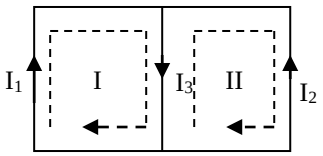


čvor A: $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ ..... (1)
kontura I: $\underline{E}_1 - \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 - \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 = 0$ ..... (2)
kontura II: $-\underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - \underline{E}_2 + \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 = 0$ ..... (3)

$100 + j2(\,\underline{I}_2 + \underline{I}_3\,) - 5\,\underline{I}_3 = 0 \Rightarrow j2\,\underline{I}_2 = (\,5 - j2\,)\underline{I}_3 - 100 \Rightarrow$
$\underline{I}_2 = -\,j2{,}5\,\underline{I}_3 - \underline{I}_3 + j50$

$-j5\,(-\,j2{,}5\,\underline{I}_3 - \underline{I}_3 + j50\,) - j100 + 5\,\underline{I}_3 = 0 \Rightarrow -\,12{,}5\underline{I}_3 + j5\underline{I}_3 + 250 - j100 + 5\underline{I}_3 = 0 \Rightarrow$
$(\,-\,7{,}5 + j5\,)\underline{I}_3 = -250 + j100 \Rightarrow \quad \underline{I}_3 = 29{,}23 + j6{,}15\ )\ \text{A};\ \ \underline{I}_2 = (\,-\,13{,}85 - j29{,}23\,)\ \text{A};\ \ \underline{I}_1 = (\,15{,}38 - j23{,}08\,)\ \text{A}.$

10.1.2. -----



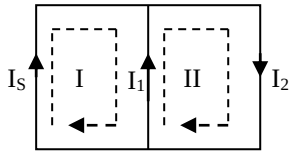
$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3$ ..... (1)
$\underline{E}_1 - \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 - \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 = 0$ ..... (2)
$\underline{Z}_3\,\underline{I}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$ ..... (3)

$100 - (\,1 + j4\,)\underline{I}_1 + j3(\,\underline{I}_1 + \underline{I}_2\,) = 0$
$-\,j3\,(\,\underline{I}_1 + \underline{I}_2\,) + (\,1 + j4\,)\,\underline{I}_2 + j50 = 0$

$100 - \underline{I}_1 - j4\underline{I}_1 + j3\underline{I}_1 + j3\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow j3\underline{I}_2 = -\,100 + (\,1 + j1\,)\,\underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_2 = j100/3 + (\,1/3 - j1/3\,)\,\underline{I}_1$
$-\,j3\underline{I}_1 - j3(\,j1/3 + 1/3\,\underline{I}_1 - j1/3\,\underline{I}_1\,) + (\,1 + j4\,)(\,j100/3 + 1/3\,\underline{I}_1 - j1/3\,\underline{I}_1\,) + j50 = 0$
$-\,j3\underline{I}_1 + 100 - j\underline{I}_1 - \underline{I}_1 + j100/3 + 1/3\,\underline{I}_1 - j1/3\,\underline{I}_1 - 400/3 + j4/3\,\underline{I}_1 + 4/3\,\underline{I}_1 + j50 = 0$
$(\,2/3 - j3\,)\,\underline{I}_1 = 100/3 - j250/3 \Rightarrow (\,2 - j9\,)\,\underline{I}_1 = 100 - j250 \Rightarrow (\,28{,}823 + j4{,}706\,)\ \text{A}$
$\underline{I}_2 = j100/3 + (\,1/3 - j1/3\,)\,(\,28{,}824 + j4{,}706\,) = (\,11{,}177 + j25{,}294\,)\ \text{A};\ \ \underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (\,40 + j30\,)\ \text{A}.$

10.1.3. ----- $\underline{I}_1 = (\,2{,}988 - j2{,}466\,)\ \text{A};\ \ \underline{I}_2 = (\,-\,3{,}07 + j1{,}99\,)\ \text{A};\ \ \underline{I}_3 = (\,-\,0{,}082 - j0{,}476\,)\ \text{A}.$
Videti rešenje zadatka 10.2.3.

10.1.4. ----- a)



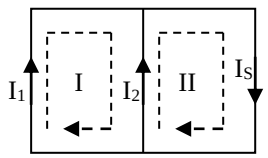
$\underline{I}_2 = \underline{I}_S + \underline{I}_1 = 0{,}7 + j1{,}4 + \underline{I}_1$ 1
$\underline{E} - \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 - \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow 15 + j5 = (\,10 - j30\,)\,\underline{I}_1 + (\,30 + j20\,)\,\underline{I}_2$ 2
$15 + j5 = 10\,\underline{I}_1 - j30\,\underline{I}_1 + (\,30 + j20\,)\,(\,0{,}7 + j1{,}4 + \underline{I}_1\,) \Rightarrow$
$15 + j5 = 10\,I_1 - j30\,I_1 + 21 + j42 + 30\,I_1 + j14 - 28 + j20\,I_1 \Rightarrow$
$22 - j51 = (\,40 - j10\,)\,I_1 \Rightarrow \quad I_1 = (\,0{,}818 - j1{,}071\,)\ \text{A}.$

$I_2 = 0{,}7 + j1{,}4 + 0{,}818 - j1{,}071 = (\,1{,}518 + j0{,}329\,)\ \text{A}.$

b)
$\underline{U}_S + \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 - \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{U}_S = \underline{E} - \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 = 15 + j5 - (\,10 - j30\,)\,(\,0{,}818 - j1{,}071\,) = 15 + j5 + 23{,}95 + j35{,}25 \Rightarrow$
$\underline{U}_S = (\,38{,}95 + j40{,}25\,)$
$\underline{S}_E = \underline{E}\cdot\underline{I}_1^{\,*} = (\,15 + j5\,)\,(\,0{,}818 + j1{,}071\,) = (\,6{,}915 + j20{,}155\,)\ \text{VA} \Rightarrow P_E = 6{,}915\ \text{W}.$
$\underline{S}_{Is} = \underline{U}_S\cdot\underline{I}_S^{\,*} = (\,38{,}95 + j40{,}25\,)\,(\,0{,}7 - j1{,}4\,) = (\,83{,}629 - j26{,}383\,)\ \text{VA} \Rightarrow P_{Is} = 83{,}629\ \text{W}.$

10.1.5. ----- a) $I_3 = 0{,}5\ \text{A};$ b) $\psi_{23} = -\,126°6'$

10.1.6. -----



$\underline{Z}_1 = R = 10\ \Omega;\ \ \underline{Z}_2 = j\,(\,\omega L - 1/\omega C\,) = j\,(\,10 - 20\,) = -\,j10\ \Omega;$
$\underline{Z}_3 = R + j\omega L = (\,10 + j10\,)\ \Omega.$
$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_S \Rightarrow \underline{I}_1 = 0{,}6 - j0{,}2 - \underline{I}_2$ ..... (1);
$\underline{E}_1 - \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$.....(2).

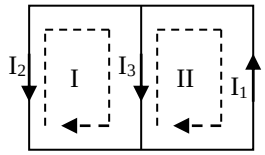
$10 - 10\cdot(\,0{,}6 - j0{,}2 - \underline{I}_2\,) + (\,-\,j10\,)\cdot\underline{I}_2 - 20 + j10 = 0$

$-\,10 + j10 - 6 + j2 + 10\,\underline{I}_2 - j10\,\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = \dfrac{16 - j12}{10 - j10} = (1{,}4 + j0{,}2)\,[\text{A}].$

$\underline{I}_1 = 0{,}6 - j0{,}2 - 1{,}4 - j0{,}2 = (\,-\,0{,}8 - j\,0{,}4\,)\ [\text{A}] \quad \Rightarrow \quad I_1^2 = 0{,}8^2 + 0{,}4^2 = 0{,}8;\ \ I_2^2 = 1{,}4^2 + 0{,}2^2 = 2.$

Kompleksne snage na pasivnim elementima (otporima) su:
$\underline{S}_{Z1} = I_1^2\,\underline{Z}_1 = 0{,}8\cdot 10 = 8$ VA $\Rightarrow$ $S_{Z1} = P_{R1} = 8$ W , $Q_1 = 0$ Var ;
$\underline{S}_{Z2} = I_2^2\,\underline{Z}_2 = 2\cdot(-j10) = -j20$ VA $\Rightarrow$ $P_2 = 0$ W, $Q_{L2} = I_2^2\cdot\omega L_2 = 20$ Var, $Q_{C2} = I_2^2\cdot 1/\omega C = 40$ Var .
$\underline{S}_{Z3} = I_S^2\,\underline{Z}_3 = (0{,}6^2 + 0{,}2^2)\cdot(10 + j10) = (4 + j4)$ VA $\Rightarrow$ $P_3 = 4$ W, $Q_3 = Q_{L3} = 4$ Var .
Kompleksne snage na naponskim generatorima su:
$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1\cdot\underline{I}_1^* = 10\cdot(-0{,}8 + j0{,}4) = (-8 + j4)$VA, ($P_{E1} = -8$ W $\Rightarrow$ ovaj generator je potrošač);
$\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2\cdot\underline{I}_2^* = (20 - j10)\cdot(1{,}4 - j0{,}2) = (26 - j18)$ VA, ($P_{E2} = 26$ W $\Rightarrow$ izvor),
a na strujnom generatoru: $\underline{S}_{Is} = \underline{U}_S\cdot\underline{I}_S^*$;
Iz druge konture $\underline{E}_1 - \underline{I}_1 R_1 - \underline{I}_S R_3 - \underline{I}_S\,j\omega L_3 + \underline{U}_S = 0 \Rightarrow \underline{U}_S = -\underline{E}_1 + \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_S(R_3 + j\omega L_3) = -10$ V $\Rightarrow$
$\underline{S}_{Is} = -10\cdot(0{,}6 + j0{,}2) = (-6 - j2)$ VA (I strujni generator se ponaša kao potrošač , jer je $P_S = -6$ W).
Ukupna snaga generatora je: $\Sigma\,\underline{S}_g = \underline{S}_{E1} + \underline{S}_{E2} + \underline{S}_{Is} = -8 + j4 + 26 - j18 - 6 - j2 = (12 - j16)$ VA.
Ukupna snaga svih otpora (pasivnih elemenata) je: $\Sigma\,\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z1} + \underline{S}_{Z2} + \underline{S}_{Z3} = 8 - j20 + 4 + j4 = (12 - j16)$ VA.
Ovim je potvrđen zakon (teorema) o održanju energija (snaga), jer je $\Sigma\,\underline{S}_g = \Sigma\,\underline{S}_Z$.

10.1.7. -----

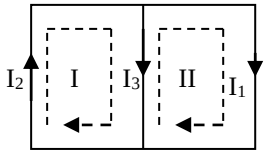


$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = (8 + j62{,}8)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = (20 + j94{,}2)\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = R_3 - j1/\omega C = (50 - j31{,}85)\ \Omega$; $\underline{E}_1 = 50$ V; $\underline{E}_2 = (7{,}071 - j7{,}071)$ V.

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ ..... (1)
$-\underline{E}_2 + \underline{I}_2\,\underline{Z}_2 - \underline{I}_3\,\underline{Z}_3 = 0$..... (2)
$\underline{I}_3\,\underline{Z}_3 + \underline{I}_1\,\underline{Z}_1 - \underline{E}_1 = 0$ ..... (3)

Rešenjem datog sistema jednačina nastaju i rešenja struja po granama, koja iznose:
$\underline{I}_1 = -(0{,}155 + j0{,}394)$ A; $\underline{I}_2 = (0{,}132 - j0{,}328)$ A; $\underline{I}_3 = -(0{,}287 + j0{,}066)$ A.
Kompleksne snage po generatorima iznose:
$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1\cdot\underline{I}_1^* = (1{,}689 + j3{,}886)$ VA; $\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2\cdot\underline{I}_2^* = (6{,}58 + j16{,}41)$ VA $\Rightarrow$ $\Sigma\,\underline{S}_E = (8{,}269 + j20{,}26)$ VA.
Kompleksne snage po impedansama iznose:
$\underline{S}_{Z1} = I_1^2\,Z_1 = (1{,}43 + j11{,}23)$ VA; $\underline{S}_{Z2} = I_2^2\,Z_2 = (2{,}49 + j11{,}74)$ VA; $\underline{S}_{Z3} = I_3^2\,Z_3 = (4{,}32 - j2{,}75)$ VA.
$\Sigma\,\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z1} + \underline{S}_{Z2} + \underline{S}_{Z3} = (8{,}265 + j20{,}26)$ VA, što potvrđuje zakon o održanju snaga ($\Sigma\,\underline{S}_E = \Sigma\,\underline{S}_Z$).

10.1.8. -----

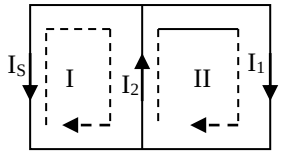


$\underline{Z}_1 = R/2 = 20\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = R + R + j(\omega L - 1/\omega C) = 80 + j(80 - 20) \Rightarrow$
$\underline{Z}_2 = (80 + j60)\ \Omega$; $\underline{Z}_3 = j(\omega L - 1/\omega C) = j60\ \Omega$.
$\underline{E}_1 = 10$ V; $\underline{E}_2 = j20$ V.

$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3$ ..... (1)
$\underline{E}_2 - \underline{I}_2\,\underline{Z}_2 - \underline{I}_3\,\underline{Z}_3 = 0$ ..... (2)
$\underline{I}_3\,\underline{Z}_3 - \underline{I}_1\,\underline{Z}_1 - \underline{E}_1 = 0$ ..... (3)

Rešenja navedenog sistema jednačina su:
$\underline{I}_1 = (0{,}08335 - j0{,}30101)$ A; $\underline{I}_2 = (0{,}0172 + j0{,}1618)$ A; $\underline{I}_3 = (-0{,}1005 + j0{,}1392)$ A.
Čitaocu se preporučuje da proveri zakon o održanju energije (kompleksne snage), što je ujedno i potvrda o tačnosti (ili netačnosti) navedenih rešenja.

10.1.9. -----



$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L = (100 + j30)\ \Omega$; $\underline{Z}_2 = -j1/\omega C = -j100\ \Omega$;
$\underline{Z}_3 = R_2 = 80\ \Omega$; $\underline{I}_S = -j2$ A; $\underline{E} = 220$ V.

$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_S = \underline{I}_1 - j2$ ..... (1)
Kontura II: $-\underline{I}_2\,\underline{Z}_2 - \underline{I}_1\,\underline{Z}_1 + \underline{E} = 0$..... (2)

$-(\underline{I}_1 - j2)\cdot(-j100) - \underline{I}_1\cdot(100 + j30) + 220 = 0 \Rightarrow j100\,\underline{I}_1 + 200 - 100\,\underline{I}_1 - j30\,\underline{I}_1 + 220 = 0 \Rightarrow$

$\underline{I}_1(-100 + j70) = -420 \Rightarrow \underline{I}_1(100 - j70) = 420 \Rightarrow \underline{I}_1 = \dfrac{420}{100 - j70} = (2{,}82 + j1{,}97)[\mathrm{A}]$.

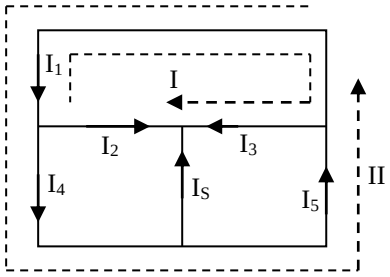
$\underline{I}_2 = 2{,}82 + j1{,}97 - j2 = (2{,}82 - j0{,}03)$ [A].
$I_1^2 = 2{,}82^2 + 1{,}97^2 = 11{,}83$; $I_2^2 = 2{,}82^2 + 0{,}03^2 = 7{,}95$; $I_S^2 = 2^2 = 4$.

Snage na impedansama (pasivnim elementima) su:
$\underline{S}_{Z1} = I_1^2\underline{Z}_1 = 11{,}83\cdot(\ 100 + j30\ ) = (\ 1183 + j354{,}9\ )$ VA; $\underline{S}_{Z2} = I_2^2\ \underline{Z}_2 = 7{,}95\cdot(-j100) = -j795$ VA;
$\underline{S}_{Z3} = I_S^2\ \underline{Z}_3 = 4\cdot 80 = 320$ W.

Snaga na naponskom generatoru je: $\underline{S}_E = \underline{E}\cdot\underline{I}_1^* = 220\cdot(\ 2{,}82 - j1{,}97\ ) = (\ 620{,}4 - j433{,}4\ )$ VA,
a na strujnom $\underline{S}_{Is} = \underline{U}_S\cdot\underline{I}_S^*$.
$\underline{U}_S$ odredimo iz prve konture: $-\underline{U}_S + \underline{I}_S\ \underline{Z}_3 + \underline{I}_2\ \underline{Z}_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_S = \underline{I}_S\underline{Z}_3 + \underline{I}_2\ \underline{Z}_2 = -j2\cdot 80 + (\ 2{,}82 - j0{,}03\ )\cdot(-j100\ )\Rightarrow$
$\underline{U}_S = (\ -3 - j442\ )$ V $\Rightarrow$ $\underline{S}_{Is} = (\ -3 - j442\ )\cdot j2 = (\ 884 - j6\ )$ VA.

Ukupna snaga oba generatora je: $\Sigma\ \underline{S}_G = \underline{S}_E + \underline{S}_{Is} = (\ 1\ 504{,}4 - j439{,}4\ )$ VA,
a impedansi: $\Sigma\ \underline{S}_Z = \underline{S}_{Z1} + \underline{S}_{Z2} + \underline{S}_{Z3} = (\ 1503 - j440{,}1\ )$ VA, što potvrđuje zakon o održanju snaga u kolu.

10.1.10. ----- a)



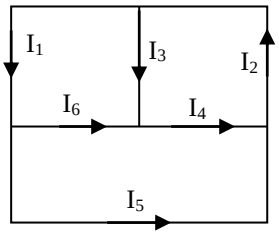
A: $I_2 + \underline{I}_4 = \underline{I}_1$ .....(1)
B: $I_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_S = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -j0{,}5$ ..... (2)
D: $I_5 + \underline{I}_S = \underline{I}_4 \Rightarrow \underline{I}_5 - \underline{I}_4 = -j0{,}5$ ..... (3)

I : $\underline{E} - \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_2\ \underline{I}_2 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 = 0$ ..... (4)
II: $\underline{E} - \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_4\underline{I}_4 - \underline{Z}_5\underline{I}_5 = 0$..... (5)

Rešenjem navedenih 5 jedn. sa 5 nepoznatih slede rešenja:
$\underline{I}_1 = (\ 0{,}11 + j0{,}07\ )$ A; $\underline{I}_2 = (\ 0{,}04 - j0{,}24\ )$ A;
$\underline{I}_3 = (\ -0{,}04 - j0{,}26\ )$ A; $\underline{I}_4 = (\ 0{,}07 + j0{,}31\ )$ A;
$\underline{I}_5 = (\ 0{,}07 - j0{,}19\ )$ A.

b) Kompleksni izraz za napon na krajevima struijnog generatora je:
$\underline{U}_S + \underline{Z}_3\underline{I}_3 + \underline{Z}_5\underline{I}_5 = 0 \Rightarrow \underline{U}_S = (\ 1 + j15\ )$ V.

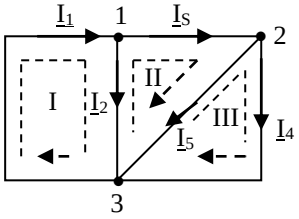
10.1.11. -----



a) Struje po granama iznose:
$\underline{I}_1 = (\ 2 + j6\ )$ mA; $\underline{I}_2 = (\ 4 + j2\ )$ mA; $\underline{I}_3 = (\ 2 - j4\ )$ mA;
$\underline{I}_4 = (\ 3 + j1\ )$ mA; $\underline{I}_5 = (\ 1 + j1\ )$ mA; $\underline{I}_6 = (\ 1 + j5\ )$ mA.

b) Kompleksni izrazi za napone su:
$\underline{U}_3 = \underline{U}_{BC} = -j20$ V; $\underline{U}_4 = \underline{U}_{CD} = (\ 10 + j20\ )$ V.

10.1.12. -----



čvor 1: $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_S$ .....(1)
čvor 2: $\underline{I}_S = \underline{I}_4 + \underline{I}_5$ .....(2)
kontura I: $\underline{E}_1 - \underline{Z}_1\ \underline{I}_1 - \underline{Z}_2\ \underline{I}_2 = 0$ ..... (3)
kontura II: $\underline{Z}_2\ \underline{I}_2 + \underline{U}_S - \underline{Z}_5\ \underline{I}_5 = 0$ .....(4)
kontura III: $\underline{E}_4 - \underline{Z}_4\ \underline{I}_4 + \underline{Z}_5\ \underline{I}_5 = 0$ ..... (5)

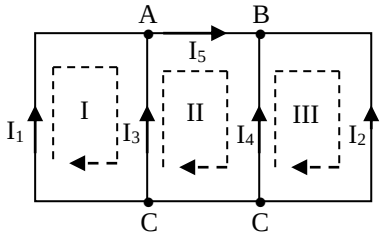
Kako su u kolu nepoznate četiri struje ($\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_4$ i $\underline{I}_5$) za njihovo rešenje potrebno je postaviti četiri linearne jednačine sa četiri nepoznate. Dakle, jedna jednačina je suvišna, pa četvrtu jednačinu možemo izbaciti.

Iz jednačine (1): $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 - 0{,}1 - j0{,}1$. Uvrštavanjem ove vrednosti u treću jednačinu dobije se rešenje struje $\underline{I}_1$, koja iznosi : $\underline{I}_1 = (\ 0{,}2 + j0{,}2\ )$ A $\Rightarrow$ $\underline{I}_2 = (\ 0{,}1 + j0{,}1\ )$ A.

Iz druge jednačine sledi: $\underline{I}_4 = 0{,}1 + j0{,}1 - \underline{I}_5$. Uvrštenjem struje $\underline{I}_4$ u jednačinu (5) sledi rešenje struje $\underline{I}_5$, koja je jednaka: $\underline{I}_5 = (\ 0{,}2 - j0{,}1\ )$ A. $\Rightarrow$ $\underline{I}_4 = (\ -0{,}1 + j0{,}2\ )$ A.

Dakle, konačna rešenja struja po granama iznose:
$\underline{I}_1 = (\ 0{,}2 + j0{,}2\ )$ A; $\underline{I}_2 = (\ 0{,}1 + j0{,}1\ )$ A; $\underline{I}_4 = (\ -0{,}1 + j0{,}2\ )$ A; $\underline{I}_5 = (\ 0{,}2 - j0{,}1\ )$ A.

10.1.13. -----



čvor A: $\underline{I}_1 + \underline{I}_3 = \underline{I}_5$ ..... (1)
čvor B: $\underline{I}_5 + \underline{I}_4 + \underline{I}_2 = 0$ ..... (2)
kontura I: $\underline{E}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = 0$ ..... (3)
kontura II: $-\underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_5 \underline{I}_5 + \underline{Z}_4 \underline{I}_4 = 0$ ..... (4)
kontura III: $-\underline{Z}_4 \underline{I}_4 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$ ..... (5)

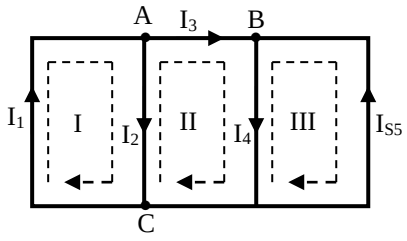
$\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0$ ..... (1′)
$50 - 5\,\underline{I}_1 + j2\,\underline{I}_3 = 0 \Rightarrow -5\,\underline{I}_1 + j2\,\underline{I}_3 = -50$ ..... (2′)
$-j2\,\underline{I}_3 - 4\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_3) - j2\,\underline{I}_4 = 0 \Rightarrow -4\,\underline{I}_1 - (4 + j2)\,\underline{I}_3 + 2\,\underline{I}_4 = 0$ ..... (3′)
$j2\,\underline{I}_4 + 2\,\underline{I}_2 - j50 = 0 \;/:(-2) \Rightarrow -\underline{I}_2 - j\,\underline{I}_4 = -j25$ ..... (4′)

(1′ i 4′): $\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + (1 + j1)\,\underline{I}_4 = j2$ ..... (1a). Iz 2′ $\Rightarrow \underline{I}_1 = 10 + j0{,}4\,\underline{I}_3$

Daljim sređivanjem sistema jednačina dolazi se do rešenja struja po granama:
$\underline{I}_1 = (8{,}5 - j4{,}72)$ A; $\underline{I}_2 = (-10{,}38 + j11{,}32)$ A; $\underline{I}_3 = (-11{,}8 + j3{,}78)$ A; $\underline{I}_4 = (13{,}68 - j10{,}38)$ A;
$\underline{I}_5 = (-3{,}3 - j0{,}94)$ A.

Iz ovog rešenja zadatka se može izvući zaključak da se Kirhofova pravila u praksi retko koriste kod većeg broja jednačina (više od tri). Cilj ovog zadatka i jeste da se vidi koliki je problem ako se on rešava neodgovarajućom metodom. Čitalac treba da prerpozna za svaki zadatak najoptimalniju metodu sa kojom se rešava svaki zadatak.

10.1.14. -----



A: $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$ ..... (1)
B: $\underline{I}_3 + \underline{I}_{S5} = \underline{I}_4$ ..... (2)
I: $-j\omega L_1\,\underline{I}_1 + \underline{E}_1 - R_2\,\underline{I}_2 = 0$ ..... (3)
II: $R_2\,\underline{I}_2 - (-j\,1/\omega C)\,\underline{I}_3 - R_4\,\underline{I}_4 = 0$ ..... (4)

$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$ ..... (1)
$\underline{I}_3 - \underline{I}_4 = -\underline{I}_{S5} = -0{,}2 + j0{,}1$ ..... (2)
$-j31{,}4\,\underline{I}_1 + 50 - 30\,\underline{I}_2 = 0$ ..... (3)
$30\,\underline{I}_2 + j31{,}85\,\underline{I}_3 - 10\,\underline{I}_4 = 0$ ..... (4)

Pomnožimo prvu jednačinu sa j31,4 i udružimo je sa trećom $\Rightarrow$
$j31{,}4\,\underline{I}_1 - j31{,}4\,\underline{I}_2 - j31{,}4\,\underline{I}_3 = 0$
$-j31{,}4\,\underline{I}_1 - 30\,\underline{I}_2 = -50$

$-(30 + j31{,}4)\,\underline{I}_2 - j31{,}4\,\underline{I}_3 = -50$ ..... (1′)

Iz jed 2 $\Rightarrow$ $\underline{I}_4 = \underline{I}_3 + \underline{I}_{S5} = \underline{I}_3 + 0{,}2 - j0{,}1$. Ovu vrednost uvrstimo u jednačinu 4 pa sledi:
$30\,\underline{I}_2 + j31{,}85\,\underline{I}_3 - 10\cdot(\underline{I}_3 + 0{,}2 - j0{,}1) = 0 \Rightarrow 30\,\underline{I}_2 + (-10 + j31{,}85)\,\underline{I}_3 - 2 + j1 = 0$ ..... (4′)

$30\,\underline{I}_2 + (-10 + j31{,}85)\,\underline{I}_3 = 2 - j1$ ..... (4′) / · (30 + j31,4)
$-(30 + j31{,}4)\,\underline{I}_2 - j31{,}4\,\underline{I}_3 = -50$ ..... (1′) / · 30

$-(1300 + j300{,}5)\,\underline{I}_3 = -1408{,}6 + j32{,}8 \Rightarrow \underline{I}_3 = (1{,}023 - j0{,}262)$ A.

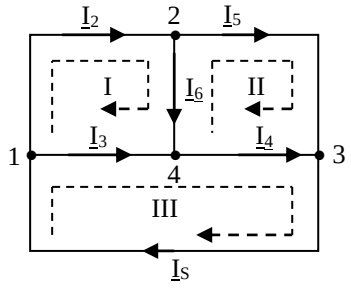
Daljim rešavanjem nastaju sledeća rešenja struja po granama:
$\underline{I}_1 = (1{,}153 - j1{,}469)$ A; $\underline{I}_2 = (0{,}13 - j1{,}207)$ A i $\underline{I}_4 = (1{,}223 - j0{,}362)$ A.

10.1.15. ----- $\underline{I}_3 = (0{,}262 - j272)$ A.

10.1.16. ----- $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 2 + \underline{I}_3$ .... (1); $\underline{E}_1 - \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 - \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 = 0$ ..... (2); $\underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 - \underline{E}_2 = 0$ .... (3).
$5 - 10\cdot(2 + \underline{I}_3) - (2 + j2)\cdot 2 = 0 \Rightarrow 5 - 20 - 10\,\underline{I}_3 - 4 - j4 = 0 \Rightarrow -19 - j4 = 10\,\underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = (-1{,}9 - j0{,}4)$ A.
$\underline{I}_1 = (0{,}1 - j0{,}4)$ A.

Iz jedn.3. $\Rightarrow$
$\underline{E}_2 = \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 = (2 + j2)\cdot 2 - (3 + j6)\cdot(-1{,}9 - j0{,}4) = 4 + j4 - (-3{,}3 - j12{,}6) = (7{,}3 + j16{,}6)$ V.

10.1.17. -----



čvor 1: $\underline{I}_S = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = 0{,}25 + j0{,}1 - \underline{I}_2$..... (1)
čvor 2 : $\underline{I}_2 = \underline{I}_5 + \underline{I}_6$ ..... (2)
čvor 3 : $\underline{I}_5 + \underline{I}_4 = \underline{I}_S \Rightarrow \underline{I}_4 = 0{,}25 + j0{,}1 - \underline{I}_5$ .....(3)
kontura I : $-\underline{Z}_2\underline{I}_2 - \underline{Z}_6\underline{I}_6 + \underline{E}_6 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 = 0$ ....(4)
kontura II : $-\underline{E}_6 + \underline{Z}_6\underline{I}_6 - \underline{Z}_5\underline{I}_5 + \underline{Z}_4\underline{I}_4 = 0$ ..... (5)
kontura III : $\underline{U}_S - \underline{Z}_1\underline{I}_S - \underline{Z}_3\underline{I}_3 - \underline{Z}_4\underline{I}_4 = 0$ ..... (6)

a)

Iz jedn. 1,2 i 4 $\Rightarrow$ $-(25+ j100)\cdot(\underline{I}_5 + \underline{I}_6) - j50\cdot\underline{I}_6 + j20 + (- j150)\cdot(0{,}25 + j0{,}1 - \underline{I}_5 - \underline{I}_6) = 0$
Iz jedn. 3 i 5 $\Rightarrow$ $-j20 + j50\cdot\underline{I}_6 - (- j50)\cdot\underline{I}_5 + 100\cdot(0{,}25 + j0{,}1 - \underline{I}_5) = 0$

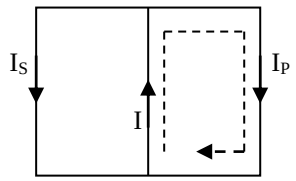
$-25\underline{I}_5 - j100\underline{I}_5 - 25\underline{I}_6 - j100\underline{I}_6 - j50\underline{I}_6 + j20 - j37{,}5 + 15 + j150\underline{I}_5 + j\,150\underline{I}_6 = 0$ ……. (1′)
$-j20 + j50\underline{I}_6 + j50\underline{I}_5 + 25 + j10 - 100\underline{I}_5 = 0$ ……... (2′)

$(- 25 + j50)\underline{I}_5 - 25\,\underline{I}_6 = -15 + j17{,}5$ ……. (1′)
$(- 100 + j50)\underline{I}_5 + j50\underline{I}_6 = -25 + j10$ …….. (2′)

Iz jedn. 1′ $\Rightarrow$ $\underline{I}_6 = (- 1 + j2)\underline{I}_5 + 0{,}6 - j0{,}7$. Ovu vrednost uvrstimo u jedn. 2′, pa sledi:
$(- 100 + j50)\underline{I}_5 + j50(- \underline{I}_5 + j2\underline{I}_5 + 0{,}6 - j0{,}7) = - 25 + j10 \Rightarrow$
$-100\underline{I}_5 + j50\underline{I}_5 - j50\underline{I}_5 - 100\underline{I}_5 + j30 + 35 = - 25 + j10 \Rightarrow -200\underline{I}_5 = - 60 - j20 \Rightarrow \underline{I}_5 = 0{,}3 + j0{,}1.$
Daljim uvrštavanjem dobiju se konačna rešenja struja po granama:
$\underline{I}_2 = (400 - j100)$ mA; $\underline{I}_3 = (- 150 + j200)$ mA; $\underline{I}_4 = - 50$ mA; $\underline{I}_5 = (300 + j100)$ mA; $\underline{I}_6 = (100 - j200)$ mA.

b) Iz 6 jednačine sledi: $\underline{U}_S = (200 + j150)\cdot(0{,}25 + j0{,}1) - j150\cdot(- 0{,}15 + j0{,}2) + 100\cdot(- 0{,}05) \Rightarrow$
$\underline{U}_S = 35 + j57{,}5 + 30 + j22{,}5 - 5 = (60 + j80)$ V.
$\underline{S}_E = \underline{E}\cdot\underline{I}_6^* = j20\cdot(0{,}1 + j0{,}2) = (- 4 + j2)$ VA.
$\underline{S}_{Is} = \underline{U}_S\cdot\underline{I}_S^* = (60 + j80)\cdot(0{,}25 - j0{,}1) = (23 + j14)$ VA.

10.1.18.

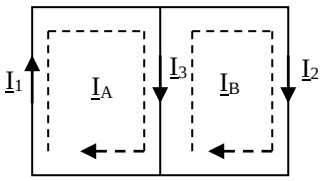


$\underline{I}_S + \underline{I}_P = \underline{I} \Rightarrow \underline{I} = 0{,}9 - j1{,}8 + \underline{I}_P$ .. ... (1)
$-\underline{I}\cdot\underline{Z} + \underline{E} - \underline{I}_P\cdot\underline{Z}_P = 0$ ....(2)

$-(0{,}9 - j1{,}8 + \underline{I}_P)\cdot(10 + j20) + 14 - j2 - \underline{I}_P\cdot(90 - j20) = 0 \Rightarrow$
$-9 + j18 - 10\,\underline{I}_P - j18 - 36 - j20\,\underline{I}_P + 14 - j2 - 90\,\underline{I}_P + j20\,\underline{I}_P = 0$
$-31 - j2 = \underline{I}_P \cdot 100 \Rightarrow$
$\underline{I}_P = (- 0{,}31 - j0{,}02)$ [A]

Aktivna snaga prijemnika iznosi: $P = |\underline{I}_P^2|\cdot R_P = (0{,}31^2 + 0{,}02^2)\cdot 90 = 0{,}096\cdot 90 = 8{,}64$ [W],
A reaktivna: $Q = |\underline{I}_P^2|\cdot X = 0{,}096\cdot(-20) = -1{,}92$ [VAr] (kapacitivnog karaktera).

10.2.1. -----



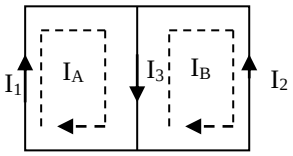
$\underline{E}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \underline{I}_A - \underline{Z}_3 \underline{I}_B$ ..... (1)
$-\underline{E}_2 = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_B - \underline{Z}_3 \underline{I}_A$ ..... (2)
$100 = (-j2 + 5) \underline{I}_A - 5 \underline{I}_B \Rightarrow \underline{I}_B = (-j0{,}4 + 1) \underline{I}_A - 20$
$-j100 = (j5 + 5) \underline{I}_B - 5 \underline{I}_A \Rightarrow$
$-j100 = (5 + j5) \cdot [(1 - j0{,}4) \underline{I}_A - 20] - 5 \underline{I}_A \Rightarrow$
$-j100 = 5\underline{I}_A - j2\underline{I}_A - 100 + j5\underline{I}_A + 2\underline{I}_A - j100 - 5\underline{I}_A$

$100 = (2 + j3) \underline{I}_A \Rightarrow \underline{I}_A = (15{,}38 - j23{,}08)$ A; $\underline{I}_B = (1 - j0{,}4) \cdot (15{,}38 - j23{,}08) - 20 = (-13{,}85 - j29{,}23)$ A.

Struje po granama iznose:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = (15{,}38 - j23{,}08)$ A; $\underline{I}_2 = \underline{I}_B = (-13{,}85 - j29{,}23)$ A; $\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (29{,}23 + j6{,}15)$ A.

10.2.2. -----



$\underline{E}_1 = (Z_1 + Z_3) \underline{I}_A - Z_3 \underline{I}_B \Rightarrow 100 = (1 + j1) \underline{I}_A + j3 \underline{I}_B$.... (1)
$-\underline{E}_2 = (Z_2 + Z_3) \underline{I}_B - Z_3 \underline{I}_A \Rightarrow j50 = (1 + j1) \underline{I}_B + j3 \underline{I}_A$.....(2)

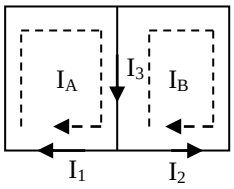
Iz prve jednačine: $\underline{I}_B = -j100/3 + j1/3 \underline{I}_A - 1/3 \underline{I}_A$
$j50 = (1 + j1) (-j100/3 + j1/3 \underline{I}_A - 1/3 \underline{I}_A) + j3 \underline{I}_A \Rightarrow$
$j50 = -j100/3 + j1/3 \underline{I}_A - 1/3 \underline{I}_A + 100/3 - 1/3 \underline{I}_A - j1/3 \underline{I}_A + j3 \underline{I}_A$

$(2/3 - j3) \underline{I}_A = 100/3 - j250/3 \Rightarrow (2 - j9) \underline{I}_A = 100 - j250 \Rightarrow \underline{I}_A = (28{,}823 + j4{,}706)$ A.
$\underline{I}_B = -j100/3 + (-1/3 + j1/3) (28{,}823 + j4{,}706) = (-11.177 - j25{,}294)$.

Struje po granama iznose:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = (28{,}823 + j4{,}706)$ A; $\underline{I}_2 = -\underline{I}_B = (11{,}177 + j25{,}294)$ A; $\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (40 + j30)$ A.

10.2.3. -----



$\underline{E}_1 = 10 \cdot e^{-j45°} \Rightarrow \underline{E}_1 = 10 (\cos(-45°) + j\sin(-45°))$;
$\underline{E}_2 = 10 \cdot e^{j45°} \Rightarrow \underline{E}_2 = 10 (\cos 45° + j \sin 45°)$;
$\underline{E}_1 = (5\sqrt{2} - j5\sqrt{2})[\mathrm{V}]$; $\underline{E}_2 = (5\sqrt{2} + j5\sqrt{2})[\mathrm{V}]$.

$\underline{E}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_A - \underline{Z}_3 \underline{I}_B$ ..... (1)
$-\underline{E}_2 = (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \underline{I}_B - \underline{Z}_3 \underline{I}_A$ .....(2)

$7{,}07 - j7{,}07 = (2 + j2 - j2 + 4 + j3) \underline{I}_A - (4 + j3) \underline{I}_B \Rightarrow 7{,}07 - j7{,}07 = (6 + j3) \underline{I}_A - (4 + j3) \underline{I}_B$ … (1)
$-7{,}07 - j7{,}07 = (4 + j3 - j3) \underline{I}_B - (4 + j3) \underline{I}_A \Rightarrow -7{,}07 - j7{,}07 = -(4 + j3) \underline{I}_A + 4 \underline{I}_B$ …….. (2)

Pomnožimo prvu jednačinu sa 4 a drugu sa (4 + j3), kako bi se konturna struja I_B poništila

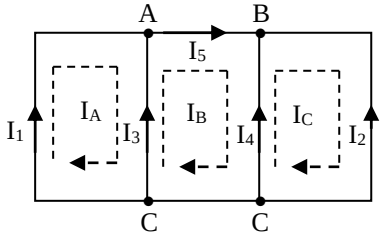
$(7{,}07 - j7{,}07) 4 = (6 + j3) \cdot 4 \underline{I}_A - (4 + j3) \cdot 4 \underline{I}_B$
$(-7{,}07 - j7{,}07) (4 + j3) = -(4 + j3) (4 + j3) \underline{I}_A + (4 + j3) \cdot 4 \underline{I}_B$

$28{,}28 - j28{,}28 - 7{,}07 - j49{,}49 = 24 \underline{I}_A + j12 \underline{I}_A - (16 \underline{I}_A + j24 \underline{I}_A - 9 \underline{I}_A) \Rightarrow 21{,}21 - j77{,}77 = (17 - j12) \underline{I}_A \Rightarrow$
$\underline{I}_A = (2{,}988 - j2{,}466)$;
$\underline{I}_B = [-7{,}07 - j7{,}07 + (4 + j3) (2{,}988 - j2{,}466)] / 4 = (-7{,}07 - j7{,}07 + 19{,}349 - j0{,}898) / 4 = (3{,}07 - j1{,}992)$.

Struje po granama iznose:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = ((2{,}988 - j2{,}466)$ A; $\underline{I}_2 = -\underline{I}_B = (-3{,}07 + j1{,}992)$ A; $\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (-0{,}082 - j0{,}476)$ A.

10.2.4. -----



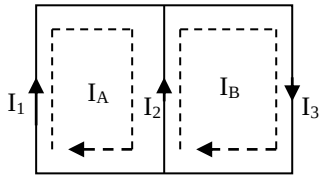
$\underline{E}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \underline{I}_A - \underline{Z}_3 \underline{I}_B$ ..... (1)
$0 = (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_4) \underline{I}_B - \underline{Z}_3 \underline{I}_A - \underline{Z}_4 \underline{I}_C$.... ..... (2)
$-\underline{E}_2 = (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_2) \underline{I}_C - \underline{Z}_4 \underline{I}_B = 0$ ..... (3)
$50 = (5 + j2) \underline{I}_A - j2 \underline{I}_B$ ..... (1)
$0 = -j2 \underline{I}_A + 4 \underline{I}_B + j2 \underline{I}_C$ ..... (2)
$-j50 = j2 \underline{I}_B + (2 - j2) \underline{I}_C$..... (3)

Iz treće jednačine sledi. $\underline{I}_B = (1 + j1) \underline{I}_C - 25 \Rightarrow$

$50 = (5 + j2)\,\underline{I}_A - j2(\,\underline{I}_C + j\underline{I}_C - 25\,) \;\Rightarrow\; 50 - j50 = (5 + j2)\,\underline{I}_A + (2 - j2)\,\underline{I}_C$..... (1′)
$0 = - j2\,\underline{I}_A + 4\,(\,\underline{I}_C + j\,\underline{I}_C - 25\,) + j2\,\underline{I}_C \;\Rightarrow\; 100 = - j2\,\underline{I}_A + (4 + j6)$ ..... (2′)

Iz jednačine 2′ $\Rightarrow\; \underline{I}_A = (3 - j2)\,\underline{I}_C + j50.$
Struju I_A uvrstimo u jednačinu 1′:
$50 - j50 = (j50 + 3\,\underline{I}_C - j2\,\underline{I}_C)\,(5 + j2) + (2 - j2)\,\underline{I}_C \;\Rightarrow\; \underline{I}_C = (10{,}38 - j11{,}32)$ A;
$\underline{I}_A = (8{,}5 - j4{,}72)$ A; $\underline{I}_B = (- 3{,}3 - j0{,}94)$ A.
Struje po granama iznose:
$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = (8{,}5 - j4{,}72)$ A; $\underline{I}_2 = - \underline{I}_C = (- 10{,}38 + j11{,}32)$ A; $\underline{I}_3 = \underline{I}_B - \underline{I}_A = (- 11{,}8 + j3{,}78)$ A;
$\underline{I}_4 = \underline{I}_C - \underline{I}_B = (13{,}68 - j10{,}38)$ A; $\underline{I}_5 = \underline{I}_B = - (3{,}3 + 0{,}94)$ A.

10.2.5. ----- a)



$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = (R_1 + j\omega L_2 - j1/\omega C_2)\,\underline{I}_A - (j\omega L_2 - j1/\omega C_2)\,\underline{I}_B$
$\underline{E}_2 + \underline{E}_3 = (R_3 + j\omega L_2 + j\omega L_3 - j1/\omega C_2)\,\underline{I}_B - (j\omega L_2 - j1/\omega C_2)\,\underline{I}_A$

$- 10 + j10 = (10 + j10 - j20)\,\underline{I}_A - (j10 - j20)\,\underline{I}_B$
$10 - j10 = (10 + j10 + j10 - j20)\,\underline{I}_B - (j10 - j20)\,\underline{I}_A$

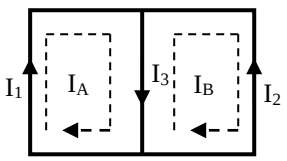
$- 10 + j10 = (10 - j10)\,\underline{I}_A + j10\,\underline{I}_B$ ..... (1)
$10 - j10 = j10\,\underline{I}_A + 10\,\underline{I}_B$ ..... (2)

Ako pomnožimo drugu jednačinu sa imaginarnom jedinicom (– j) nastaje sistem jednačina:
$- 10 + j10 = 10\,\underline{I}_A - j10\,\underline{I}_A + j10\,\underline{I}_B$….. (1)
$- j10 - 10 = 10\,\underline{I}_A - j10\,\underline{I}_B$ ….. (2)

$- 20 = (20 - j10)\,\underline{I}_A \;\Rightarrow\; \underline{I}_A = (- 0{,}4 - j0{,}4);\;\; \underline{I}_B = (0{,}6 - j0{,}2).$
Struje po granama iznose:
$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = (- 0{,}8 - j0{,}4)$ A; $\underline{I}_2 = \underline{I}_B - \underline{I}_A = (1 + j0{,}2)$ A; $\underline{I}_3 = \underline{I}_B = (0{,}6 - j0{,}2)$ A.

b) $\underline{S}_{E3} = \underline{E}_3\,\underline{I}_3^{\,*} = - 10\cdot(0{,}6 + j0{,}2) = (- 6 - j2)$ VA $\Rightarrow\; P_{E3} = - 6$ W; $Q_{E3} = - 2$ VAR.
Dakle, ovaj generator troši energiju (negativna snaga), odnosno, on se ponaša kao potrošač.
$P_{R1} = I_1^2\,R_1 = (0{,}8^2 + 0{,}4^2)\cdot 10 = (0{,}64 + 0{,}16)\cdot 10 = 8$ W.

10.2.6. -----



a) $j10 = j3\,\underline{I}_A + j2\,\underline{I}_B$ ..... (1) / ·2
$-10 = (5 - j2)\,\underline{I}_B + j2\,\underline{I}_A$ ..... (2) / ·(– 3)

$j20 = j6\,\underline{I}_A + j4\,\underline{I}_B$ ..... (1)
$30 = -j6\,\underline{I}_A + (-15 + j6)\,\underline{I}_B$ ..... (2)

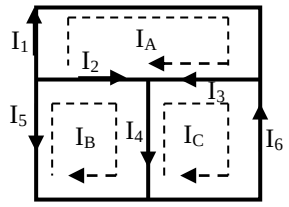
$30 + j20 = (-15 + j10)\,\underline{I}_B \;\Rightarrow\; \underline{I}_B = (30 + j20) / (-15 + j10) = (-0{,}769 - j1{,}846)$ A.
$-10 - (5 - j2)\cdot(-0{,}769 - j1{,}846) = j2\,\underline{I}_A \;\Rightarrow\; \underline{I}_A = -10 + 7{,}538 + j7{,}692) / j2 = (3{,}846 + j1{,}231)$ A.
$\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (4{,}615 + j3{,}077)$ A

b) $\underline{I}_2 = - \underline{I}_B = (0{,}769 + j1{,}846) \;\Rightarrow\; I_2 = 2$ A $\Rightarrow\; P = R\,I_2^2 = 20$ W (aktivna snaga je prisutna samo na aktivnom otporniku, koji se nalazi samo u impedansi Z_2 ($\underline{Z}_2 = R = 5\,\Omega$).

10.2.7. ----- $\underline{I} = (-0{,}8 + j0{,}6)$ A.

10.2.8. ----- $\underline{I}_1 = (100 - j60)$ mA; $\underline{I}_2 = (5 + j25)$ mA; $\underline{I}_3 = - (105 - j35)$ mA (svi smerovi ka tačci A).

10.2.9. -----

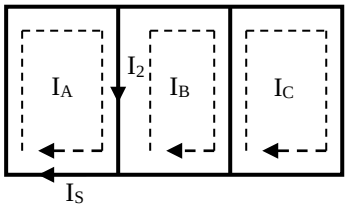


$-\underline{E}_1 + \underline{E}_3 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\,\underline{I}_A - \underline{Z}_2\,\underline{I}_B$ …… (1)
$-\underline{E}_5 = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)\underline{I}_B - \underline{Z}_2\,\underline{I}_A - \underline{Z}_4\,\underline{I}_C$ …… (2)
$-\underline{E}_3 = (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)\,\underline{I}_C - \underline{Z}_4\,\underline{I}_B$…… (3)

$100 - j20 = 400\,\underline{I}_A - j200\,\underline{I}_B$ …….... (1)
$-j40 = -\,j200\,\underline{I}_A + 300\,\underline{I}_B + j100\,\underline{I}_C$ …… (2)
$-80 = \quad j100\,\underline{I}_B + 100\,\underline{I}_C$ ……..…. (3)

Rešenjem navedenog sistema jednačina slede rešenja konturnih struja:
$\underline{I}_A = (160 - j40)$ mA; $\underline{I}_B = (20 + j180)$ mA; $\underline{I}_C = (-620 - j20)$ mA.
Struje po granama su:
$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = (160 - j40)$ mA; $\underline{I}_2 = \underline{I}_B - \underline{I}_A = (-140 + j220)$ mA; $\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_C = (780 - j20)$ mA;
$\underline{I}_4 = \underline{I}_B - \underline{I}_C = (640 + j200)$ mA; $\underline{I}_5 = -\,\underline{I}_B = (-20 - j180)$ mA; $\underline{I}_6 = -\,\underline{I}_C = (620 + j20)$ mA.

10.2.10. -----



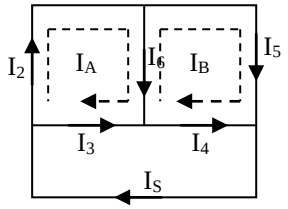
$\underline{I}_A = \underline{I}_S = (0{,}16 - j0{,}48)$ A;
$\underline{E}_5 = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)\,\underline{I}_B - \underline{Z}_2\,\underline{I}_A - \underline{Z}_5\,\underline{I}_C$ ..... (1)
$\underline{E}_6 - \underline{E}_5 = (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)\,\underline{I}_C - \underline{Z}_5\,\underline{I}_B$ .....(2);

$148 + j16 = (300 - j500)\,\underline{I}_B - j50\,\underline{I}_C \;/\cdot (100 + j50)$
$-100 + j200 = -\,j50\,\underline{I}_B + (100 + j50)\,\underline{I}_C \;/\cdot j50$

$14\,000 + j9\,000 = 37\,500\,\underline{I}_B - j50\cdot(100 + j50)\,\underline{I}_C$
$-10\,000 - j5\,000 = 2\,500\,\underline{I}_B + j50\cdot(100 + j50)\,\underline{I}_C$

$\underline{I}_B = (0{,}1 + j0{,}1)$ A,
$\underline{I}_2 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = 0{,}16 - j0{,}48 - 0{,}1 - j0{,}1 = (0{,}06 - j0{,}58)$ A $= (60 - j580)$ mA.
$\underline{U}_S - \underline{Z}_1\,\underline{I}_S + \underline{E}_1 - \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 = 0 \;\Rightarrow$
$\underline{U}_S = \underline{Z}_1\,\underline{I}_S + \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - \underline{E}_1 = (0{,}16 - j0{,}48)\cdot(50 - j50) + (0{,}06 - j0{,}58)\cdot j100 - 50 + j50 = (-8 + j24)$ V.
$\underline{S}_S = \underline{U}_S\,\underline{I}_S^{*} = (-8 + j24)\cdot(50 - j50) = -12{,}8$ VA.
Sledi da strujni generator radi kao potrošač koji troši snagu (aktivnu) od 12,8 W.

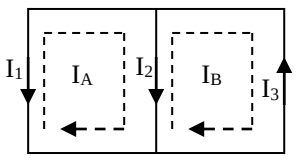
10.2.11. ----- a)



$\underline{E} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_3)\underline{I}_A - \underline{Z}_6\,\underline{I}_B - \underline{Z}_3(0{,}25 + j0{,}1)$ ….……...(1)
$-\,\underline{E} = (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)\underline{I}_B - \underline{Z}_6\,\underline{I}_A - \underline{Z}_4(0{,}25 + j0{,}1)$ …… (2)
Treća jednačina nije potrebna, jer je $\underline{I}_C = \underline{I}_S = (0{,}25 + j0{,}1)$
Rešenjem navedenih dveju linearnih jednačina sa dve nepoznate, slede rešenja konturnih struja:
$\underline{I}_A = (0{,}4 - j0{,}1)$ A; $\underline{I}_B = (0{,}3 + j0{,}1)$.
Struje po granama iznose:
$\underline{I}_2 = \underline{I}_A = (400 - j100)$ mA; $\underline{I}_3 = \underline{I}_C - \underline{I}_A = (-150 + j200)$ mA;
$\underline{I}_4 = \underline{I}_C - \underline{I}_B = -50$ mA;
$\underline{I}_5 = \underline{I}_B = (300 + j100)$ mA; $\underline{I}_6 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (100 - j200)$ mA.

b) $\underline{S}_E = (-4 + j2)$ VA; $\underline{S}_{Is} = (23 + j14)$ VA. Vidi rešenje zadatka 10.1.17.

10.2.12. -----



$\omega L_1 = 62{,}8\ \Omega$; $\omega L_2 = 94{,}2\ \Omega$; $1/\omega C = 31{,}85\ \Omega$;

$-\,\underline{E}_2 = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\,\underline{I}_A - \underline{Z}_3\,\underline{I}_B$…… (1)
$-\,\underline{E}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)\,\underline{I}_B - \underline{Z}_3\,\underline{I}_A$ …….. (2)

$-50 = (70 + 62{,}35)\,\underline{I}_A - (50 - j31{,}85)\,\underline{I}_B \qquad /\cdot (50 - j31{,}85)$
$-7{,}071 + j7{,}071 = -\,(50 - j31{,}85)\,\underline{I}_A + (58 + j30{,}95)\,\underline{I}_B \;/\cdot (70 + j62{,}35)$

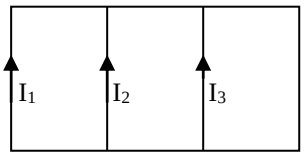
$-2\,500 + j1592{,}5 = (\,70 + j62{,}35\,)\cdot(\,50 - j31{,}85\,)\,\underline{I}_A - (\,1\,485{,}58 - j3\,185\,)\,\underline{I}_B$ ..... (1)
$-935{,}85 + j54{,}09 = -(\,70 + j62{,}35\,)\cdot(\,50 - j31{,}85\,)\,\underline{I}_A + (\,2\,130{,}27 + j5\,782{,}8\,)\,\underline{I}_B$..... (2)

$-3\,435{,}85 + j1\,646{,}59 = (\,644{,}69 + j8\,967{,}8\,)\,\underline{I}_B \;\Rightarrow\; \underline{I}_B = (\,0{,}155 + j0{,}394\,)$ A; $\underline{I}_A = (\,-0{,}132 + j0{,}328\,)$ A.

Struje po granama iznose:
$\underline{I}_1 = -\underline{I}_B = -(\,0{,}155 + j0{,}394\,)$ A; $\underline{I}_2 = -\underline{I}_A = (\,0{,}132 - j0{,}328\,)$ A; $\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (\,-0{,}287 - j0{,}066\,)$ A.
Kompleksne snage generatora su:
$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1\,\underline{I}_1^{*} = (\,1{,}689 + j3{,}886\,)$ VA; $\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2\,\underline{I}_2^{*} = (\,6{,}58 + j16{,}41\,)$ VA;
$\underline{S}_{Z1} = \underline{Z}_1\,I_1^2 = (\,1{,}43 + j11{,}23\,)$ Var; $\underline{S}_{Z2} = \underline{Z}_2\,I_2^2 = (\,2{,}49 + j11{,}74\,)$ Var; $\underline{S}_{Z3} = \underline{Z}_3\,I_3^2 = (\,4{,}32 - j2{,}75\,)$ Var.
Čitaocu se ostavlja da proveri zakon o održanju energija.

10.2.13. ----- $I_1 = (\,1{,}153 - j1{,}469\,)$ A; $I_2 = (\,0{,}13 - j1{,}207\,)$ A; $I_3 = (\,(\,1{,}023 - j0{,}262\,)$ A;
$I_4 = (\,1{,}223 - j0{,}362\,)$ A.

10.2.14. -----

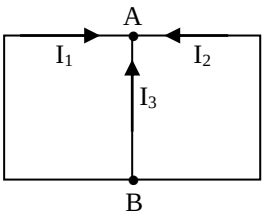


$\underline{I}_1 = (\,-0{,}2 - j1{,}4\,)$ A; $\underline{I}_2 = (\,-1{,}6 + j2{,}8\,)$ A; $\underline{I}_3 = (\,0{,}8 - j0{,}4\,)$ A;

Čitaocu se ostavlja da izračuna preostali deo zadatka

10.3.1. ----- Videti rešenja u zadatku 10.2.6.

10.3.2.



$$\underline{U}_{AB}=\frac{\dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{1}{\underline{Z}_2}+\dfrac{1}{\underline{Z}_3}}=\frac{\dfrac{10-j10}{200-j400}+\dfrac{j50}{200+j600}}{\dfrac{1}{200-j400}+\dfrac{1}{200+j600}+\dfrac{1}{j400}}=(14+j42)[V]$$

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{E}_1-\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1}=\frac{10-j10-14-j42}{200-j400}=(0{,}1-j0{,}06)[A]$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{E}_2-\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2}=\frac{j50-14-j42}{200+j600}=(0{,}005+j0{,}025)[A]$$

$$\underline{I}_3=-\frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3}=-\frac{14+j42}{j400}=(-0{,}105+j0{,}035)[A].$$

10.3.3. ----- $\underline{U}_3 = 10$ V $\Rightarrow$ $U_3 = 10$ V.

10.3.4. ----- $$\underline{U}_{AB}=\underline{U}_3=\frac{\dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{1}{\underline{Z}_2}+\dfrac{1}{\underline{Z}_3}}=\frac{\dfrac{20}{6}+\dfrac{j5}{-j4}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{-j4}+\dfrac{1}{j8}}=(8-j6)[V]$$

a) $$\underline{I}_2=\frac{\underline{E}_2-\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2}=\frac{j5-8+j6}{-j4}=\frac{-8+j11}{-j4}=(-2{,}75-j2)=-(2{,}75+j2)[A].$$

Dakle,zbog predznaka « – » stvarni smer struje je od tačke B ka tački A (suprotan u odnosu na pretpostavljeni).

b) $\underline{U}_{AB} = (8 - j6) \Rightarrow \psi_{AB} = \text{arc tg}\,(-6/8) = -36°52'$

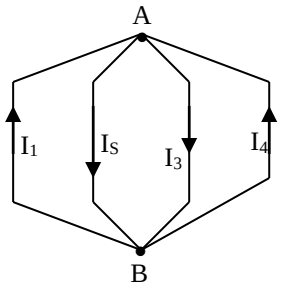
Fazna razlika između napona U_{AB} i ems E_2 je:

$\psi = \psi_{AB} - \psi_2 = -36°52' - 90° = -126°52'$.

10.3.5. ----- Videti rešenje zadatka 10.1.6.

10.3.6. ----- Videti rešenje zadatka 10.1.7.

10.3.7. -----



$\underline{I}_1 + \underline{I}_4 - \underline{I}_S - \underline{I}_3 = 0$;

$\underline{U}_{AB} - \underline{E}_1 + \underline{I}_1\underline{Z}_1 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = (\underline{E}_1 - \underline{U}_{AB})/\underline{Z}_1$;

$\underline{U}_{AB} + \underline{E}_3 - \underline{I}_3\underline{Z}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_3 = (\underline{E}_3 + \underline{U}_{AB})/\underline{Z}_3$;

$\underline{U}_{AB} + \underline{I}_4\underline{Z}_4 = 0 \Rightarrow \underline{I}_4 = -\underline{U}_{AB}/\underline{Z}_4$

$$\frac{\underline{E}_1-\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1}-\underline{I}_S-\frac{\underline{E}_3+\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3}-\frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_4}=0\Rightarrow$$

$$\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}-\underline{I}_S-\frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3}=\underline{U}_{AB}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}\right)\Rightarrow \underline{U}_{AB}=\frac{\dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}-\dfrac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3}-\underline{I}_S}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{1}{\underline{Z}_3}+\dfrac{1}{\underline{Z}_4}}=(4+j8)[V]$$

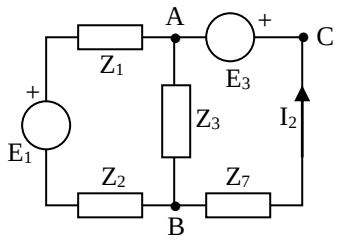
Struje po granama, vodeći računa o usvojenim smerovima uznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{j12 - 4 - j8}{200 + j200} = \frac{-4 + j4}{200 + j200} = j0{,}02\,[\mathrm{A}] = j20\,[\mathrm{mA}].$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-j34 + 4 + j8}{100} = \frac{4 - j26}{100} = (0{,}04 - j0{,}26)\,[\mathrm{A}] = (40 - j260)\,[\mathrm{mA}].$$

$$\underline{I}_4 = -\frac{4 + j8}{30 - j40} = -(-0{,}08 + j0{,}16)\,[\mathrm{A}] = -(-80 + j160)\,[\mathrm{mA}] = (80 - j160)\,[\mathrm{mA}].$$

10.3.8. -----



Impedanse $\underline{Z}_5$ i $\underline{Z}_6$ čine kratku vezu ($Z_5 + Z_6 = 0$), pa je složeno kolo predstavljeno novom (jednostavnijom) slikom.

Napon između tačaka A i B iznosI:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \dfrac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_7}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} + \dfrac{1}{\underline{Z}_7}} = \frac{\dfrac{20}{12 + j2 + 8 + j10} - \dfrac{2 + j2}{12}}{\dfrac{1}{12 + j2 + 8 + j10} + \dfrac{1}{10 - j12} + \dfrac{1}{12}}$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{0{,}735 - j0{,}441 - 0{,}167 - j0{,}167}{0{,}037 - j0{,}022 + 0{,}041 + j0{,}049 + 0{,}083} = \frac{0{,}568 - j0{,}608}{0{,}161 + j0{,}027} = (2{,}815 - j4{,}249)\,[\mathrm{V}].$$

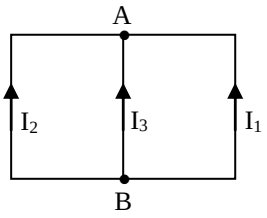
$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{E}_3 - \underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_7} = \frac{-2 - j2 - 2{,}815 + j4{,}249}{12} = \frac{-4{,}815 + j2{,}249}{12} = (-0{,}401 + j0{,}187)\,[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{CB} + \underline{I}_2 \underline{Z}_7 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{CB} = -\underline{I}_2 \underline{Z}_7 = (0{,}401 - j0{,}187)\cdot 12 = (4{,}815 - j2{,}249)\,[\mathrm{V}]$$

10.3.9. ----- $\underline{I}_1$ = (28,823 + j4,706) A; $\underline{I}_2$ = (11,177 + j25,294) A; $\underline{I}_3$ = – (40 + j30) A.

10.3.10. ----- $\underline{I}_1$ = (2,988 – j2,466) A; $\underline{I}_2$ = (–3,07 + j1,99) A; $\underline{I}_3$ = (0,082 + j0,476) A.
Data rešenja odgovaraju smeru struje od tačke B ka tački A (sve struje ulaze u čvor A).

10.3.11.



$$\underline{U}_{AB} = \frac{\dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\dfrac{10}{20} + \dfrac{j20}{80 + j60}}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{80 + j60} + \dfrac{1}{j60}} = (8{,}333 + j6{,}0202)\,[\mathrm{V}]$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = \frac{10 - 8{,}333 - j6{,}0202}{20} = (0{,}0835 - j0{,}30101)\,[\mathrm{A}] \Rightarrow I_1^{\,2} = 0{,}0835^{\,2} + 0{,}30101^{\,2} = 0{,}0975$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{j20 - 8{,}333 - j6{,}0202}{80 + j60} = (0{,}0172 + j0{,}1618)\,[\mathrm{A}] \Rightarrow I_2^{\,2} = 0{,}0265$$

$$\underline{I}_3 = -\frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = (-0{,}1005 + j0{,}1392)\,[\mathrm{A}] \Rightarrow I_3^{\,2} = 0{,}0294\,.$$

$\underline{S}_{Z1} = \underline{Z}_1 I_1^2 = 20\cdot 0{,}0975 = 1{,}95$ VA; $\underline{S}_{Z2} = \underline{Z}_2 I_2^2 = (80 + j60)\cdot 0{,}0265 = (2{,}12 + j1{,}59)$ VA;
$\underline{S}_{Z3} = \underline{Z}_3 I_3^2 = j60\cdot 0{,}0294 = j1{,}764$ VA.
$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1\cdot \underline{I}_1^{\,*} = 10\cdot(0{,}08335 + j0{,}301) = (0{,}8335 + j3{,}01)$ VA;
$\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2\cdot \underline{I}_2^{\,*} = j20\cdot(0{,}0172 - j0{,}1618) = (3{,}236 + j0{,}344)$ VA.
$\Sigma\,\underline{S}_g = \underline{S}_{E1} + \underline{S}_{E2} = (4{,}0695 + j3{,}354)$ VA; $\Sigma\,\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z1} + \underline{S}_{Z2} + \underline{S}_{Z3} = (4{,}07 + j3{,}354)$ VA $\Rightarrow$ $\mathbf{\Sigma\,\underline{S}_g = \Sigma\,\underline{S}_Z}$.

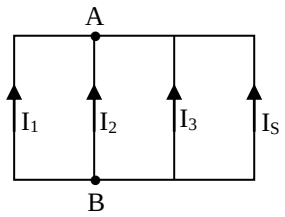
10.3.12. ----- $\underline{U}_{AB} = I_2 Z_2 = 2\cdot(2 + j2) = (4 + j4)$ V;

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = \frac{5-4-j4}{10} = (0{,}1 - j0{,}4)[\text{A}] \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0{,}1 - j0{,}4 - 2 = (-1{,}9 - j0{,}4)[\text{A}]$$

$$\underline{U}_{AB} - \underline{I}_3 \underline{Z}_3 - \underline{E}_2 = 0 \Rightarrow \underline{E}_2 = \underline{U}_{AB} - \underline{I}_3 \underline{Z}_{13} = 4 + j4 - (-1{,}9 - j0{,}4)\cdot(3 + j6) = 4 + j4 + 3{,}3 + j12{,}6 = (7{,}3 + j16{,}6)[\text{V}].$$

10.3.13. ----- Videti rešenje zadatka 10.1.14

10.3.14. -----



$$\underline{U}_{AB} = \frac{\frac{10}{5+j5} + \frac{-10}{j5} + (1 - j1)}{\frac{1}{5+j5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{-j10}} = \frac{1 - j1 + j2 + 1 - j1}{0{,}1 - j0{,}1 - j0{,}2 + j0{,}1} = \frac{2}{0{,}1 - j0{,}2} = (4 + j8)[\text{V}]$$

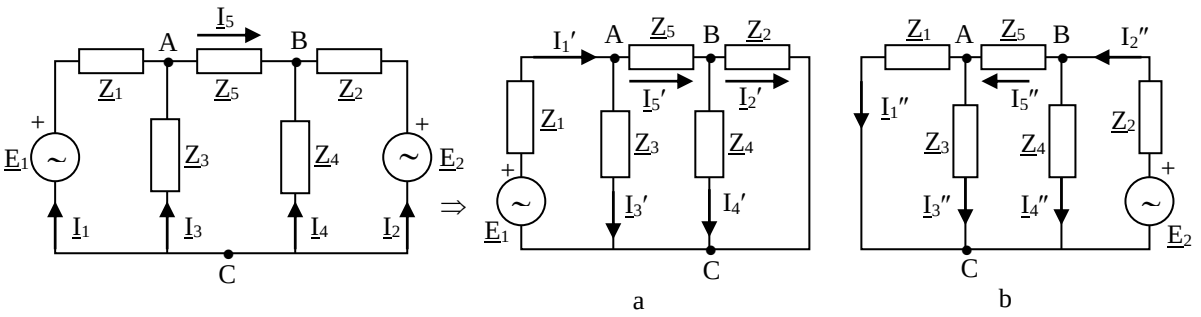
$$\underline{I}_1 = \frac{10 - 4 - j8}{5 + j5} = \frac{6 - j8}{5 + j5} = (-0{,}2 - j0{,}4)[\text{A}]$$

$$\underline{I}_2 = \frac{-10 - 4 - j8}{j5} = \frac{-14 - j8}{j5} = (-1{,}6 + j2{,}8)[\text{A}]$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-4 - j8}{-j10} = (0{,}8 - j0{,}4)[\text{A}]$$

10.3.15. ----- P = 8,64 W; Q = 1,92 Var.

10.4.1. -----



Za sliku a:

$$\underline{Z}_{24}' = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \frac{2 \cdot (-j2)}{2 - j2} = (1 - j1)[\Omega]; \quad \underline{Z}_{524}' = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_{24}' = (\,5 - j1\,)\ [\Omega].$$

$$\underline{Z}_{3524}' = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_{524}'}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{524}'} = \frac{j2 \cdot (5 - j1)}{j2 + 5 - j1} = (0{,}77 + j1{,}85)[\Omega]; \quad \underline{Z}' = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{3524}' = (\,5{,}77 + j1{,}85\,)\ [\Omega].$$

$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}'} = \frac{50}{5{,}77 + j1{,}85} = (7{,}86 - j2{,}52)[\mathrm{A}]; \quad \underline{U}_{AB}' = \underline{E}_1 - \underline{I}_1'\underline{Z}_1 = 50 - (\,7{,}86 - j2{,}52\,)\cdot 5 = (\,10{,}7 + j12{,}6\,)\ [\mathrm{V}].$$

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_{AB}'}{\underline{Z}_3} = \frac{10{,}7 + j12{,}6}{j2} = (6{,}3 - j5{,}35)[\Omega]; \quad \underline{I}_5' = \underline{I}_1' - \underline{I}_3' = (\,1{,}56 + j2{,}83\,)\ [\Omega].$$

$$\underline{U}_{BC}' = \underline{I}_5' \cdot \underline{Z}_{24}' = (1{,}56 + j2{,}83) \cdot (1 - j1) = (4{,}39 + j1{,}27[\mathrm{V}];$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_{BC}'}{\underline{Z}_2} = \frac{4{,}39 + j1{,}27}{2} = (2{,}195 + j0{,}635[\mathrm{A}]; \quad \underline{I}_4' = \frac{\underline{U}_{BC}'}{\underline{Z}_4} = \frac{4{,}39 + j1{,}27}{-j2} = (-0{,}635 + j2{,}195)[\mathrm{A}].$$

Za sliku b:

$$\underline{Z}_{13}'' = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{5 \cdot j2}{5 + j2} = (0{,}69 + j1{,}72)[\Omega]; \quad \underline{Z}_{135}'' = \underline{Z}_{13}'' + \underline{Z}_5 = (\,4{,}69 + j1{,}72\,)\ [\Omega];$$

$$\underline{Z}_{1354}'' = \frac{\underline{Z}_{135}'' \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_{135}'' + \underline{Z}_4} = \frac{(4{,}69 + j1{,}72) \cdot (-j2)}{4{,}69 + j1{,}72 - j2} = (0{,}85 - j1{,}95)[\Omega]; \quad \underline{Z}'' = \underline{Z}_{1354} + \underline{Z}_2 = (\,2{,}85 - j1{,}95\,)\ [\Omega].$$

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}''} = \frac{j50}{2{,}85 - j1{,}95} = (-8{,}18 + j11{,}95)[\mathrm{A}]; \quad \underline{U}_{BC}'' = \underline{E}_2 - \underline{Z}_2\,\underline{I}_2'' = j50 - (-\,8{,}18 + j11{,}95) = (16{,}36 + j26{,}1)\ [\mathrm{V}].$$

$$\underline{I}_4'' = \frac{\underline{U}_{BC}''}{\underline{Z}_4} = \frac{16{,}36 + j26{,}1}{-j2} = (-13{,}05 + j8{,}18)[\mathrm{A}]; \quad \underline{I}_5'' = \underline{I}_2'' - \underline{I}_4'' = (\,4{,}87 + j3{,}77\,)\ [\mathrm{A}].$$

$$\underline{U}_{13}'' = Z_{13}'' \cdot \underline{I}_5'' = (\,0{,}69 + j1{,}72\,) \cdot (\,4{,}87 + j3{,}77\,) = (\,-\,3{,}124 + j10{,}978\,)$$

$$\underline{I}_1'' = \frac{\underline{U}_{13}''}{\underline{Z}_1} = \frac{-3{,}124 + j10{,}978}{5} = (-0{,}625 + j2{,}196)[\mathrm{A}]; \quad \underline{I}_3'' = \frac{\underline{U}_{13}''}{\underline{Z}_3} = \frac{-3{,}124 + j10{,}978}{j2} = (5{,}489 + j1{,}562)[\mathrm{A}].$$

Konačno, struje po granama iznose:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = 7{,}86 - j2{,}52 - (\,-\,0{,}6248 + j2{,}1955\,) = (\,8{,}4848 - j4{,}7155\,)\ [\mathrm{A}];$

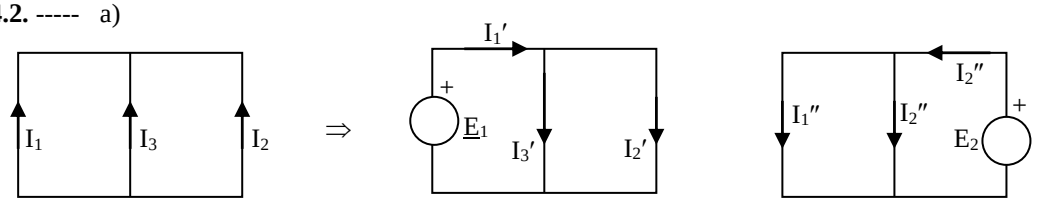
$\underline{I}_2 = \underline{I}_2'' - \underline{I}_2' = -\,8{,}18 + j11{,}95 - (\,2{,}195 + j0{,}635\,) = (\,-\,10{,}375 + j11{,}315\,)\ [\mathrm{A}].$

$\underline{I}_3 = -\,(\,\underline{I}_3' + \underline{I}_3''\,) = -\,(\,6{,}3 - j5{,}35 + 5{,}49 + j1{,}56\,) = -\,(\,11{,}79 - j3{,}79\,)\ [\mathrm{A}].$

$\underline{I}_4 = -\,(\,\underline{I}_4' - \underline{I}_4''\,) = -\,(\,-\,0{,}635 + j2{,}195 - 13{,}05 + j8{,}18 = -\,(\,-\,13{,}69 + j10{,}38\,)\ [\mathrm{A}],$

$\underline{I}_5 = \underline{I}_5' - \underline{I}_5'' = 1{,}56 + j2{,}83 - (\,4{,}87 + j3{,}77\,) = -\,(\,3{,}31 + j0{,}94\,)\ [\mathrm{A}].$

10.4.2. ----- a)



a) b)

Za sliku a:

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_1 = \frac{5 \cdot (-j2)}{5 - j2} + j5 = (0{,}67 + j3{,}276)\,\Omega$$

$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}'} = \frac{j10}{0{,}67 + j3{,}276} = (2{,}93 + j0{,}599)\,[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{23}' = \underline{I}_1' \cdot \underline{Z}_{23} = (2{,}93 + j0{,}599) \cdot (0{,}67 - j1{,}724) = (2{,}996 - j4{,}65)\,[\ ],$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_{23}'}{\underline{Z}_2} = \frac{2{,}996 - j4{,}65}{5} = (0{,}56 - j0{,}93)\,[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_{23}'}{\underline{Z}_3} = \frac{2{,}996 - j4{,}65}{-j2} = (2{,}325 + j1{,}498)\,[\mathrm{A}.]$$

Za sliku b:

$$\underline{Z}'' = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2 = \frac{j5 \cdot (-j2)}{j5 - j2} + 5 = \left(5 - j\frac{10}{3}\right)[\Omega]$$

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}''} = \frac{10}{\dfrac{15 - j10}{3}} = \frac{30}{15 - j10} = (1{,}385 + j0{,}923)\,[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{13}'' = \underline{I}_2'' \cdot \underline{Z}_{13} = (1{,}385 + j0{,}923) \cdot (-j3{,}333) = (3{,}077 - j4{,}615)\,[\mathrm{V}],$$

$$\underline{I}_1'' = \frac{\underline{U}_{13}''}{\underline{Z}_1} = \frac{3{,}077 - j4{,}615}{j5} = (-0{,}923 - j0{,}615)\,[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_3'' = \frac{\underline{U}_{13}''}{\underline{Z}_3} = \frac{3{,}077 - j4{,}615}{-j2} = (2{,}308 + j1{,}539)\,[\mathrm{A}.]$$

Struje po granama iznose:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = 2{,}93 + j0{,}599 + 0{,}923 + j0{,}615 = (\ 3{,}853 + j1{,}214\ )$ A;

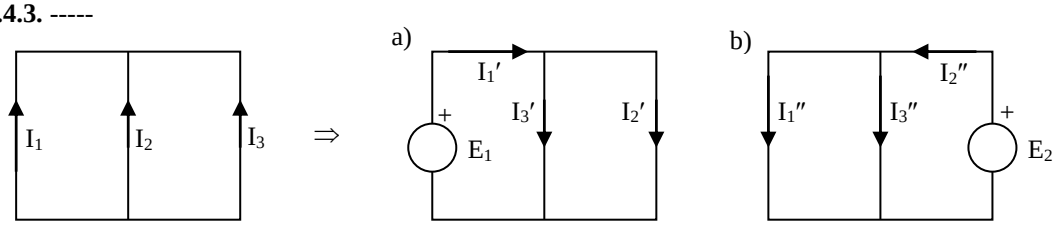
$\underline{I}_2 = \underline{I}_2'' - \underline{I}_2' = 1{,}385 + j0{,}923 - 0{,}56 + j0{,}93 = (\ 0{,}825 + j1{,}853\ )$ A;

$\underline{I}_3 = -(\ \underline{I}_3' + \underline{I}_3''\ ) = -(\ 2{,}325 + j1{,}498 + 2{,}308 + j1{,}539\ ) = -(\ 4.633 + j3{,}037\ )$ A.

b) Aktivna snaga je prisutna samo na termogenom otporniku, i ona oznosi:

$P = I_2^2 R = (\ 0{,}825^2 + 1{,}853^2\ ) \cdot 5 = 10$ W.

10.4.3. -----



Za sliku a:

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_1 = \frac{(200 + j600)\cdot j400}{200 + j600 + j400} + 200 - j400 = (230,77 - j153,85)[\Omega];$$

$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}'} = \frac{10 - j10}{230,77 - j153,85} = (0,05 - j0,01)[A].$$

$$\underline{U}_{AB}' = \underline{U}_2' = \underline{U}_3' = \underline{Z}_{23}' \cdot \underline{I}_1' = (30,77 + j246,15)\cdot(0,05 - j0,01) = (4 + j12)[V]$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_2'}{\underline{Z}_2} = \frac{4 + j12}{200 + j600} = 0,02[A];$$

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_3'}{\underline{Z}_3} = \frac{4 + j12}{j400} = (0,03 - j0,01)[A]$$

Za sliku b:

$$\underline{Z}'' = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = 200 + j600 + \frac{(200 - j400)\cdot j400}{200 - j400 + j400} = (1000 + j1000)[\Omega].$$

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}''} = \frac{j50}{1000 + j1000} = (0,025 + j0,025)[A],$$

$$\underline{U}_{AB}'' = \underline{Z}_{13} \cdot \underline{I}_2'' = (800 + j400)\cdot(0,025 + j0,025) = (10 + j30)[V],$$

$$\underline{I}_1'' = \frac{\underline{U}_{AB}''}{\underline{Z}_1} = \frac{10 + j30}{200 - j400} = (-0,05 + j0,05)[A],$$

$$\underline{I}_3'' = \frac{\underline{U}_{AB}''}{\underline{Z}_3} = \frac{10 + j30}{j400} = (0,075 - j0,025)[A]$$

Struje po granama iznose (prva slika):

$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = 0,05 - j0,01 + 0,05 - j0,05 = (\ 0,1 - j0,06\ )$ A;

$\underline{I}_2 = \underline{I}_2'' - \underline{I}_2' = 0,025 + j0,025 - 0,02 = (\ 0,005 + j0,025\ )$ A;

$\underline{I}_3 = -(\ \underline{I}_3' + \underline{I}_3''\ ) = -(\ 0,03 - j0,01 + 0,075 - j0,025\ ) = (\ -0,105 + j0,035\ )$ A.

10.4.4. ----- Videti rešenje zadatka 10.3.3.

10.4.5. ----- Videti rešenje zadatka 10.3.9.

10.4.6. ----- Videti rešenje zadatka 10.3.10.

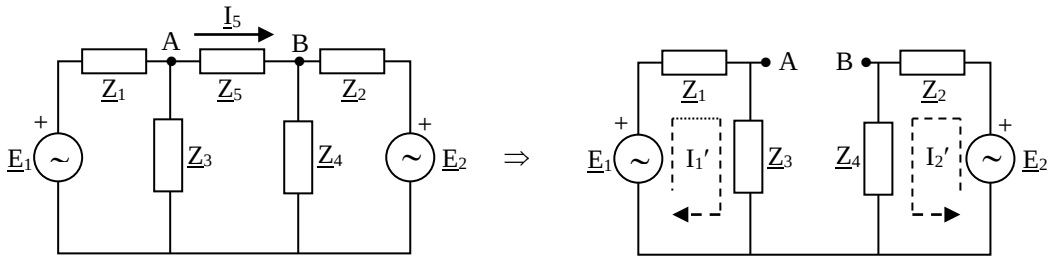
10.4.7. ----- Videti rešenje zadatka 10.2.9.

10.4.8. ----- Videti rešenje zadatka 10.2.5.

10.4.9. ----- Videti rešenje zadatka 10.1.11.

10.4.10. ----- Videti rešenje zadatka 10.1.8.

10.5.1.



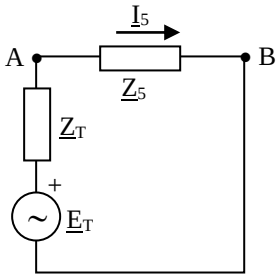
$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{50}{5 + j2} = (8{,}62 - j3{,}45)[A]; \qquad \underline{I}_2' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \frac{j50}{2 - j2} = (-12{,}56 + j12{,}56)[A];$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \frac{5 \cdot j2}{5 + j2} + \frac{2 \cdot (-j2)}{2 - j2} = (0{,}69 + j1{,}72) + (1 - j1) = (1{,}69 + j0{,}72)[\Omega].$$

(Prilikom određivanja Z_T umesto ems E_1 i E_2 uspostavlja se kratka veza).

$\underline{U}_{AB} - \underline{Z}_3 \underline{I}_1' + \underline{Z}_4 \underline{I}_2' = 0 \Rightarrow \underline{E}_T = \underline{U}_{AB} = \underline{Z}_3 \underline{I}_1' - \underline{Z}_4 \underline{I}_2' = j2 \cdot (8{,}62 - j3{,}45) - (-j2) \cdot (-12{,}56 + j12{,}56)$

$\underline{E}_T = (-18{,}1 - j7{,}76) = -(18{,}1 + j7{,}76)$ [V].



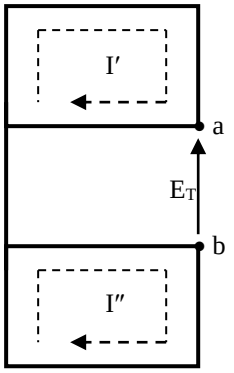
Da je tačka B uzeta za veći potencijal (što u stvarnosti i jeste) bilo bi: $U_{BA} = -U_{AB} = (18{,}1 + j7{,}76)$ [V], što ne utiče natačnost rešenja zadatka (u tom slučaju + pol ems E_T je spojen na tačku B).

Konačno, struja kroz impedansu Z_5, poštujući usvojeni smer, iznosi:

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_5} = \frac{-18{,}1 - j7{,}76}{1{,}69 + j0{,}72 + 4} = \frac{-18{,}1 - j7{,}76}{5{,}69 + j0{,}72} = (-3{,}3 - j0{,}95)[A].$$

$$I_5 = \sqrt{3{,}3^2 + 0{,}95^2} = 3{,}43[A]$$

10.5.2.



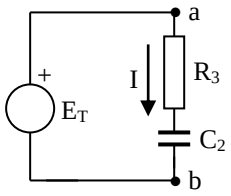
$$\underline{I}' = \frac{\underline{E}_1}{R_1 - jX_{C1}} = \frac{10 + j10}{10 - j10} = j1[A]$$

$$\underline{I}'' = \frac{\underline{E}_2 + \underline{E}_3}{R_2 + jX_L} = \frac{5 - j10}{10 + j5} = -j1[A],$$

$$\underline{U}_{ab}' = \underline{E}_T \Rightarrow \underline{E}_T - R_1 \underline{I}' + \underline{E}_1 + \underline{E}_3 - jX_L \underline{I}'' = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{E}_T = -10 - j10 + j10 + 10 \cdot j1 + j5 \cdot (-j1) = (-5 + j10)[V].$$

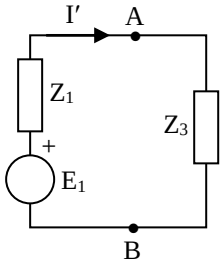
$$\underline{Z}_T = \frac{R_1 \cdot (-jX_{C1})}{R_1 - jX_{C1}} + \frac{R_2 + jX_L}{R_2 + jX_L} = \frac{10 \cdot (-j10)}{10 - j10} + \frac{10 \cdot j5}{10 + j5} = 5 - j5 + 2 + j4 = (7 - j1)[\Omega].$$



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + R_3 - jX_{C2}} = \frac{-5 + j10}{7 - j1 + 3 - j4} = \frac{-5 + j10}{10 - j5} = (-0{,}8 + j0{,}6)[A].$$

10.5.3. ----- $\underline{S}_{E6} = \underline{E}_6 \cdot \underline{I}_6^* = (-4 + j2)$ VA.

10.5.4. ----- a) Izbacivanjem druge grane iz kola nastaje novo kolo u kojem je struja: $\underline{I}' = \dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$

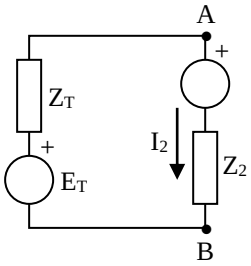


$$\underline{I}' = \frac{20}{6 + j8} = (1{,}2 - j1{,}6)\,[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_T = \underline{I}' \cdot \underline{Z}_3 = (12{,}8 + j9{,}6)\,[\mathrm{V}]$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{6 \cdot j8}{6 + j8} = (3{,}84 + j2{,}88)\,[\Omega]$$

Vezivanjem isključene grane na Tevenenov (naponski) generator, nastaje prosto kolo, prema slici:

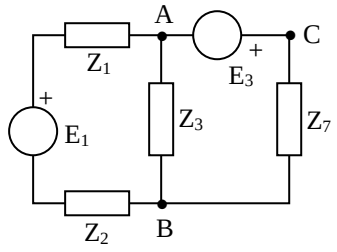


Iz ovog kola sledi struja I_2 koja iznosi:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_T - \underline{E}_2}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_2} = \frac{12{,}8 + j9{,}6 - j5}{3{,}84 + j2{,}88 - j4} = \frac{12{,}8 + j4{,}6}{3{,}84 - j1{,}12} = (2{,}75 + j2)\,[\mathrm{A}]$$

b) $\underline{U}_{AB} - \underline{E}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_{AB} = \underline{E}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_2 = j5 + (\,2{,}75 + j2\,) \cdot (-j4\,) = j5 - j11 + 8 = (\,8 - j6\,)\;[\mathrm{V}]$.
Početni ugao za napon U_{AB} iznosi $\psi_{AB} = \operatorname{arc\,tg}(-6/8) = -36°52'$.
a za ems E_2 početni ugao je $\psi_2 = 90°$.
Fazna razlika između napona U_{AB} i ems E_2 je: $\psi = \psi_{AB} - \psi_2 = -36°52' - 90° = -126°52'$.

4.5.5. ----- Zbog kratke veze koju čine impedanse Z_5 i Z_6 ($\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 = 0$) dato kolo se može predstaviti jednostavnijom šemom, kao na slici:

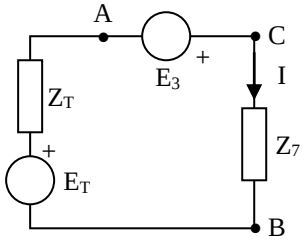


Isključenjem E_3 i impedanse Z_7 ostaje prosto kolo sa ems E_1 i redno vezanim impedansama Z_1, Z_2 i Z_3, pa je struja u takvom kolu jednaka:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{20}{12 + j2 + 8 + j10 + 10 - j12} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}\,[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_T = \underline{I}' \cdot \underline{Z}_3 = \frac{2}{3} \cdot (10 - j12) = (6{,}667 - j8)\,[\mathrm{V}]$$

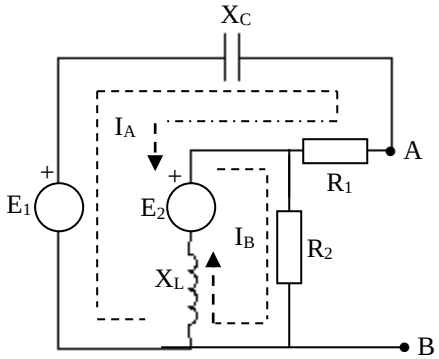
Otpor Tevenenovog generatora iznosi: $\underline{Z}_T = \dfrac{\underline{Z}_3 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \dfrac{(10 - j12) \cdot (12 + j2 + 8 + j10)}{10 - j12 + 12 + j2 + 8 + j10} = (11{,}5 - j4)\,[\Omega]$.



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_T + \underline{E}_3}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_7} = \frac{6{,}667 - j8 + 2 + j2}{11{,}5 - j4 + 12} = \frac{8{,}667 - j6}{23{,}5 - j4} = (0{,}4 - j0{,}187)\,[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{CB} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_7 = (4{,}81 - j2{,}25)\,[\mathrm{V}]$$

10.5.6. -----



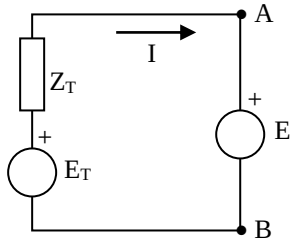
$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \underline{I}_A\cdot(-jX_C + R_1 + jX_L) - \underline{I}_B\cdot jX_L$ ..... (1)
$\underline{E}_2 = \underline{I}_B\cdot(jX_L + R_2) - \underline{I}_A\cdot jX_L$ ..... (2)

$1 = \underline{I}_A - j\underline{I}_B \Rightarrow \underline{I}_A = 1 + j\underline{I}_B$ ..... (1)
$1 + j2 = (1 + j1)\cdot\underline{I}_B - j\underline{I}_A$ ..... (2)

$1+j2 = \underline{I}_B + j\underline{I}_B - j(1 + j\underline{I}_B) = \underline{I}_B + j\underline{I}_B - j1 + \underline{I}_B \Rightarrow$
$\underline{I}_B\cdot(2+j1) = 1 + j3 \Rightarrow \mathbf{\underline{I}_B = (1 + j1) A}$
$\underline{I}_A = 1 + j (1 + j1) = 1 + j1 - 1 \Rightarrow \mathbf{\underline{I}_A = j1\ A}.$

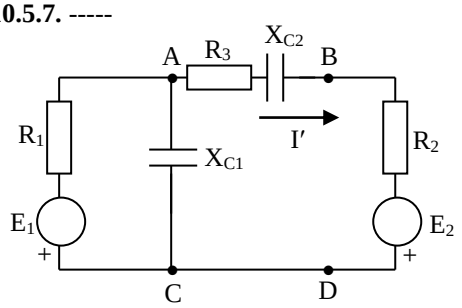
$\underline{U}_{AB} - \underline{I}_A\cdot R_1 - \underline{I}_B\cdot R_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AB} = \underline{I}_A R_1 + \underline{I}_B R_2 \Rightarrow$
$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_T = j1 + 1 + j1 \Rightarrow \mathbf{\underline{E}_T = (1 + j2) V}.$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB} = \frac{\left(\frac{R_2\cdot jX_L}{R_2+jX_L}+R_1\right)\cdot(-jX_C)}{\left(\frac{R_2\cdot jX_L}{R_2+jX_L}+R_1\right)-jX_C} = \frac{\left(\frac{j1}{1+j1}+1\right)\cdot(-j1)}{\left(\frac{j1}{1+j1}+1\right)-j1} = \frac{(0{,}5+j0{,}5+1)\cdot(-j1)}{0{,}5+j0{,}5+1-j1} = (0{,}6-j0{,}8)\,\Omega.$$



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_T - \underline{E}}{\underline{Z}_T} = \frac{1+j2-j2}{0{,}6-j0{,}8} = (0{,}6+j0{,}8)[\mathrm{A}].$$
$$\underline{S} = \underline{E}\cdot\underline{I}^{+} = j2\cdot(0{,}6-j0{,}8) = (1{,}6+j1{,}2)[\mathrm{VA}] \Rightarrow S = 2[\mathrm{VA}.]$$

10.5.7. -----

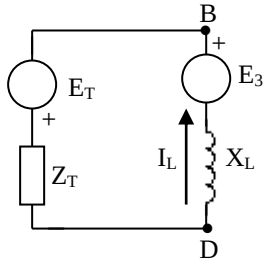


$$\underline{U}_{CA} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{R_1}+\frac{\underline{E}_2}{R_2+R_3-jX_{C2}}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{-jX_{C1}}+\frac{1}{R_2+R_3-jX_{C2}}} = \frac{\frac{10+j10}{10}+\frac{5}{13-j4}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{-j10}+\frac{1}{13-j4}} \Rightarrow$$
$$\underline{U}_{CA} = \frac{1+j1+0{,}351+j0{,}108}{0{,}1+j0{,}1+0{,}07+j0{,}022} = \frac{1{,}351+j1{,}108}{0{,}17+j0{,}122} = (8{,}333+j0{,}538)[\mathrm{V}]$$

$$\underline{I}' = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_{CA}}{R_2+R_3-jX_{C2}} = \frac{5-8{,}333-j0{,}538}{13-j4} = \frac{-3{,}333-j0{,}538}{13-j4} = (-0{,}223-j0{,}11) = -(0{,}223+j0{,}11)[\mathrm{A}].$$

$\underline{U}_{BD} - I'\cdot R_2 + \underline{E}_2 = 0 \Rightarrow E_T = U_{BD} = -E_2 + I'\cdot R_2 = -5 - (0{,}223 + j0{,}11)\cdot 10 = (-7{,}23 - j1{,}1)$ [V].

$$\underline{Z}_T = \frac{\left[\frac{R_1\cdot(-jX_{C1})}{R_1-jX_{C1}}+R_3-jX_{C2}\right]\cdot R_2}{\frac{R_1\cdot(-jX_{C1})}{R_1-jX_{C1}}+R_3-jX_{C2}+R_2} = \frac{\left[\frac{10\cdot(-j10)}{10-j10}+3-j4\right]\cdot 10}{\frac{10\cdot(-j10)}{10-j10}+3-j4+10} = \frac{(5-j5+3-j4)\cdot 10}{5-j5+3-j4+10} = \frac{80-j90}{18-j9} \Rightarrow$$
$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{BD} = (5{,}556-j2{,}222)[\Omega].$$



$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}_T + \underline{E}_3}{\underline{Z}_T + jX_L} = \frac{-7{,}23 - j1{,}1 - j10}{5{,}556 - j2{,}222 + j5} = \frac{-7{,}23 - j11{,}1}{5{,}556 + j2{,}778} = (-1{,}84 - j1{,}078)\,[\mathrm{A}]$$

10.5.8. ----- $\underline{E}_T = (-18{,}104 - j7{,}76)$ V; $\underline{Z}_T = (1{,}69 + j0{,}724)\ \Omega$; $\underline{I}_5 = \underline{E}_T / (\underline{Z}_T + \underline{Z}_5) = (-3{,}302 - j0{,}944)$ A.

10.5.9. ----- $\underline{E}_T = \underline{U}_{AC}' - \underline{U}_{AB}' = (0{,}324 - j0{,}054)$ V; $\underline{Z}_T = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_5 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \Rightarrow$
$\underline{Z}_T = (42{,}259 + j21{,}357)\ \Omega$; $\underline{I}_3 = \underline{E}_T / (\underline{Z}_T + \underline{Z}_3) = (2{,}237 - j2{,}647) \cdot 10^{-3}$ [A] = $(2{,}237 - j2{,}647)$ [mA].

10.5.10. -----

$$-\underline{I}_1' R_1 - \underline{U}_{AB}' + \underline{I}_2' \cdot (-jX_C) = 0 \Rightarrow \underline{E}_T = \underline{U}_{AB}' = -\underline{I}_1' R_1 - jX_C \underline{I}_2'$$

$$\underline{I}_1' = \frac{\dfrac{(R_1 + jX_L)\cdot(R_2 - jX_C)}{R_1 + jX_L + R_2 - jX_C}}{R_1 + jX_L} \cdot \underline{I}_S = \frac{R_2 - jX_C}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)} \cdot \underline{I}_S = \frac{150 - j50}{200 + j200} \cdot j100 = (50 + j25)\,[\mathrm{mA}]$$

$$\underline{I}_2' = \frac{R_1 + jX_L}{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)} \cdot \underline{I}_S = \frac{50 + j250}{200 + j200} \cdot j100 = (-50 + j75)\,[\mathrm{mA}]$$

$$\underline{E}_T = -(0{,}05 + j0{,}025) \cdot 50 - (-0{,}05 + j0{,}075) \cdot j50 = -2{,}5 - j1{,}25 + j2{,}5 + 3{,}75 = (1{,}25 + j1{,}25)\,[\mathrm{V}]$$

$$\underline{Z}_T = \frac{(R_1 - jX_C)\cdot(R_2 + jX_L)}{R_1 - jX_C + R_2 + jX_L} = \frac{(50 - j50)\cdot(150 + j250)}{50 - j50 + 150 + j250} = \frac{20000 + j5000}{200 + j200} = (62{,}5 - j37{,}5)\,\Omega.$$

(NAPOMENA! Kod određivanja unutrašnjeg otpora Tevenenovog generatora umesto strujnih generatora pravi se prekid grane – beskonačan otpor te grane. Kako je unutrašnji otpor strujnog generatora paralelno vezan sa strujnim generatorom, otpor strujnog generatora iz paralelne veze ostaje prisutan u kolu. Kod naponskog pri računanju otpora Tevenenovog generatora umesto ems pravi se kratka veza.)

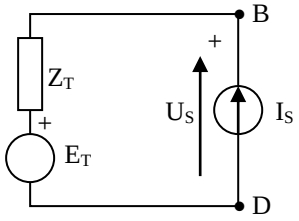
$$\underline{I} = \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}} = \frac{1{,}25 + j1{,}25}{62{,}5 - j37{,}5 + 25 + j50} = (0{,}016 + j0{,}012)\,[\mathrm{A}] = (16 + j12)\,[\mathrm{mA}],$$

sa smerom od tačke A ka tački B.

10.5.11. ----- Parametri Tevenenovog generatora su:
$\underline{E}_T = \underline{U}_{BD}' = (-10 + j30)$ [V] i $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB}' = (400 + j800)$ [Ω].

Kompleksna struja prijemnika je: $\underline{I}_P = \underline{I}_{BD} = \dfrac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = (20 + j40)\,[\mathrm{mA}]$ (smer od tačke B ka D).

10.5.12. ----- Isključenjem strujnog generatora između tačaka B i D za iste tačke se dobiju paramatri Tevenenovog generatora koji iznose: $\underline{E}_T = \underline{U}_{BD}' = (-2 - j1)$ [V] i $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{BD}' = (32 - j6)$ [Ω].



Napon na strujnom generatoru odredimo pomoću II Kirh. Zakona:
$\underline{U}_S - \underline{I}_S \cdot \underline{Z}_T - \underline{E}_T = 0 \Rightarrow \underline{U}_S = \underline{E}_T + \underline{I}_S \underline{Z}_T = -2 - j1 + j0{,}5 \cdot (32 - j6) \Rightarrow$
$\underline{U}_S = (1 + j15)$ V.

Kompleksna prividna snaga strujnog generatora iznosi:
$\underline{S}_{Is} = \underline{U}_S \cdot \underline{I}_S^* = (1 + j15) \cdot (-j0{,}5) = (7{,}5 - j0{,}5)$ [VA]

10.5.13. ----- Kompleksna impedansa Tevenenovog generatora je:

$$\underline{Z}_T = \frac{jX_{L1}\cdot(-jX_{C1})}{jX_{L1}-jX_{C1}} + \frac{jX_{L2}\cdot(-jX_{C2})}{jX_{L2}-jX_{C2}} = \frac{j60\cdot(-j40)}{j60-j40} + \frac{j50\cdot(-j50)}{j50-j50} = \frac{2400}{j20} + \frac{2500}{0} = -j120 + \infty = \infty$$

I elektromotorna sila Tevenenovog generatora je beskonačna: $E_T = \infty$.

Kako su parametri Tevenenovog generatora beskonačni, **sledi da se ovom metodom ovaj zadatak ne može rešiti.**

Čitaocu se preporučuje da zadatak reši metodom konturnih struja.

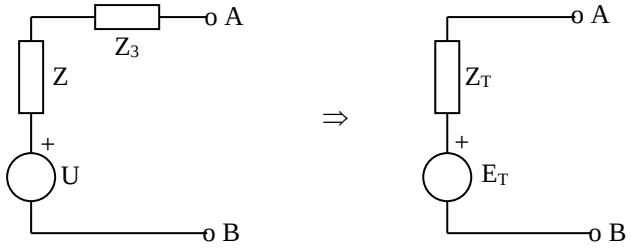
Konačno rešenje zadatka je: $I_R = -j2$ A (sa smerom odozgo ka dole).

10.5.14. ----- Metodom zajedničkog napona možemo odrediti napon na zajedničkim krajevima sve tri grane. On iznosi:

$$\underline{U} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} + \underline{I}_S}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\frac{10}{5} + \frac{15}{4} + 0{,}5}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = \frac{2 + 3{,}75 + 0{,}5}{0{,}2 + 0{,}25} = \frac{6{,}25}{0{,}45} = 13{,}889\,[\mathrm{V}]$$

Ekvivalentna impedansa na krajevima ovih grana je (ems naponskih generatora kratko spojene a strujni generator u prekidu):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = \frac{5\cdot 4}{5+4} = \frac{20}{9}\,[\Omega].$$



$E_T = U \approx 13{,}889$ V , jer na otporniku R_3 nema pada napona (kolo je otvoreno)

$Z_T = Z + Z_3 = 20 / 9 + 1 = 29 / 9 \approx 3{,}222\ [\Omega]$.

10.5.15. ----- $P_4 = I_4^2R_4 = R_4\cdot U_{45}^2/R_4^2 = U_{45}^2/R_4$; $P_5 = I_5^2R_5 = U_{45}^2/R_5$

$$\frac{P_4}{P_5} = \frac{\frac{U_{45}^2}{R_4}}{\frac{U_{45}^2}{R_5}} = \frac{R_5}{R_4} = 4 \Rightarrow R_5 = 4R_4$$

$$R_{45} = \frac{R_4\cdot R_5}{R_4+R_5} = \frac{4R_4^2}{5R_4} = \frac{4}{5}R_4 = 0{,}8R_4$$

Ako isključimo otpore R_4 i R_5 tada će otpor Tevenenovog generatora između tih tačaka (A i B) iznositi: $Z_T = R_T = R_3 = 320\,[\Omega]$.

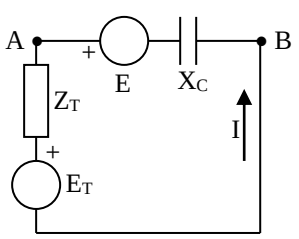
Maksimalna snaga nastaje pri uslovu: $\underline{Z}_P = \underline{Z}^* \Rightarrow R_P = R_T = 320\ [\Omega]$.

$R_{45} = 0{,}8\cdot R_4 = 320\ [\Omega] \Rightarrow R_4 = 400\ [\Omega]$; $R_5 = 1\,600\ [\Omega]$.

10.5.16. ----- $\underline{I}_S = (30 + j30)$ mA = (0,03 + j0,03) A;
Isključenjem grane AB (naponskog generatora i kondenzatora C) dobiju se parametri Tevenenovog generatora, koji oznose:

$\underline{E}_T = (-10 + j6)$ V; $\underline{Z}_T = (400/3 + j800/3) \Omega$; $X_C = 1/\omega C = 8\cdot10^6/10^4\cdot3 = 800/3 \Omega$.

Kada vratimo isključenu granu kroz koju protiče struja I (koja ostaje nepromenjena), dobije se kolo prema slici:



$\underline{E} - \underline{E}_T = (\underline{Z}_T - jX_C)\cdot I \Rightarrow \underline{E} + 10 - j6 = (400/3 + j800/3 - j800/3)\cdot\underline{I}$

Iz datih podataka se vidi da je ems E u kompleksnom obliku jednaka imaginarnom delu, dok je struja I jednaka realnom delu, te je:
$\underline{E} = jE$; $\underline{I} = I \Rightarrow 10 + j (E - 6) = 400\cdot I/3 + j0 \Rightarrow$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela jednačina, sledi:
$10 = 400\cdot I/3 \Rightarrow I = 0,075$ A = 75 mA (realni deo jednačine);
$E - 6 = 0 \Rightarrow E = 6$ V (imaginarni deo jednačine)

Amplitude (maksimalne vrednosti) iznose:
Ems za naponski generator $E_m = 1,41\cdot E = 8,46$ [V], a za struju te grane $I_m = 1,41\cdot I = 105,75$ mA.

Kompleksna snaga naponskog generatora je: $\underline{S} = \underline{E}\cdot\underline{I}^* = j6\cdot0,075 = j0,45$ [VA].

10.5.17. ----- Isključenjem Z_P između tačaka A i B, slede parametri Tevenenovog generatora, koji iznose:
$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB}' = (3,47 + j1,86)$ [Ω] i $\underline{E}_T = \underline{U}_{AB}' (9,02 + j1,88)$ V.

Maksimalna snaga na prijemniku nastaje kada je: $\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = (3,47 - j1,86)$ [Ω].
Struja prijemnika, uz navedeni uslov, iznosi: $\underline{I}_P = \underline{E}_T / (\underline{Z}_T + \underline{Z}_P) = (9,02 + j1,88)/2\cdot3,47 = (1,3 + j0,27)$ [A].
Kompleksna snaga prijemnika je: $\underline{S}_P = |I_P|^2\cdot\underline{Z}_P = (6,01 - j3,11)$ [VA] $\Rightarrow$ P 6,01 W; Q = –3,11 VAR (kap.).

10.5.18. ----- $\underline{E}_1 = 7,09$ V; $\underline{E}_2 = j7,09$ V.
Pri isključenju kalema u kolu je prisutna struja: $\underline{I}' = (\underline{E}_1 + \underline{E}_2) / (R - jX_C) = (7,09 + j7,09) / (2 - j2) = j3,545$ A.
$\underline{U}_{AB}' + \underline{E}_1 - \underline{I}'R = 0 \Rightarrow \underline{E}_T = -\underline{E}_1 + \underline{I}'R = -7,09 + j3,545\cdot2 = (-7,09 + j7,09)$ [V].

$$\underline{Z}_T = \frac{R\cdot(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{-j4}{2 - j2} = (1 - j1)[\Omega]$$

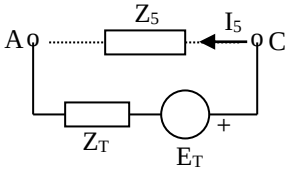
$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + jX_L} = \frac{-7,09 + j7,09}{1 - j1 + j1} = (-7,09 + j7,09)[A]$$

10.5.19. ----- $\underline{I}_5 = \underline{I}_{CD} = (1,58 + j0,27)$ A, sa smerom od tačke C ka D.

10.5.20. ----- a) $\underline{E}_T = \underline{U}_{AB}' = (12 - j16)$ V; $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB}' = (6,4 + j10,8) \Omega$;
b) $\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = (6,4 - j10,8) \Omega$; P = 15,6 W.

10.5.21. ----- $\underline{E}_T = \underline{U}_{AB}' = (-0,65 + j11,15)$ V; $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB}' = (4 + j3) \Omega$.

10.5.22. ----- Pretvoriti strijni generator u naponski: $\underline{E}_S = \underline{I}_S\cdot\underline{Z}_6 = (6 + j6)$ V; $\underline{Z}_S = \underline{Z}_6 = 3 \Omega$.
Parametri Tevenenovog generatora za tačke A i C su:
$\underline{E}_T = \underline{U}_{CA}' = (-3,6 - j1) = -(3,6 + j1)$ [V] $\Rightarrow \underline{U}_{AC}' = (3,6 + j1)$ [V]; $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AC}' = (6 + j4)$ [Ω].
Kako je tačka A na većem potencijalu od tačke Csledi da struja I_5 neći imati naznačeni smer, već suprotan.
To isto važi i za ems E_T, koja je suprotnog smera od naznačenog (negativni predznak). U rešenje zadatka smer struje nije bitan, te uz pretpostavku da si ti smerovi suprotni od naznačenih, sledi:

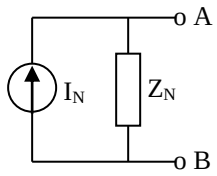


$\underline{Z}_5 + \underline{Z}_T = \underline{E}_T / \underline{I}_5 = (-3,6 - j1) / (0,05 + j0,05) = (-46 + j26)$.
$\underline{Z}_5 = -46 + j26 - 6 - j4 = (-52 + j22)$. Ovo rešenje je nemoguće jer termogena otpornost mora biti pozitivna. To potvrđuje predhodnu pretpostavku da je ems E_T suprotnog smera, a samim tim i struja I_5 može imati samo suprotan smer.

Ako promenimo smer struje I_5 (tačka A na većem potencijalu od tačke C), tada je $\underline{E}_T = (3,6 + j1) \Rightarrow$
$\underline{Z}_5 = \underline{E}_T / \underline{I}_5 - \underline{Z}_T = (3,6 + j1)/(0,05 + j0,05) - 6 - j4 = 46 - j26 - 6 - j4 = (40 - j30)$ [Ω].

10.5.23. ----- $\underline{E}_T = \underline{U}_{BD}' = (-10 + j30)$V; $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{BD}' = (4 + j8) \Omega$; $\underline{I} = \underline{E}_T / (\underline{Z}_T + \underline{Z}_P) = (2 + j4)$ A.

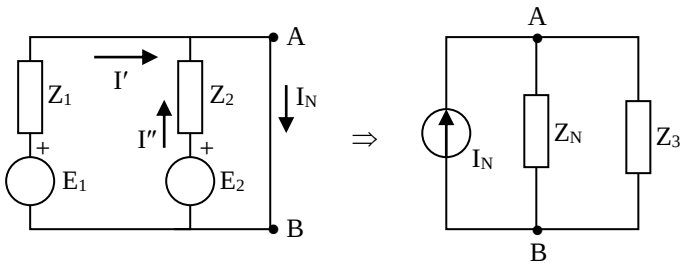
10.6.1. -----



Naponski generator (Tevenenov) se pretvara u strujni (Nortonov) koristeći poznata pravila o pretvaranju (formule):

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T} = \frac{13{,}889}{3{,}222} = 4{,}311[\mathrm{A}];\ \text{odnosno}\ \underline{Z}_N = \underline{Z}_T = 3{,}222\ [\Omega].$$

10.6.2. -----



$$\underline{I}' = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{25}{5} = 5\{\mathrm{A}\},\ldots\underline{I}'' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{15}{-\mathrm{j}5} = \mathrm{j}3[\mathrm{A}]$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}' + \underline{I}'' = (5 + \mathrm{j}3)[\mathrm{A}]$$

$$\underline{Z}_N = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{5 \cdot (-\mathrm{j}5)}{5 - \mathrm{j}5} = (2{,}5 - \mathrm{j}2{,}5)[\Omega].$$

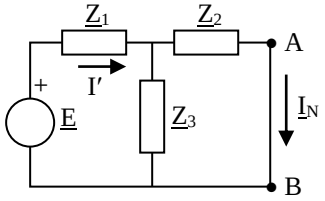
$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{AB} = \underline{I}_N \cdot \frac{\underline{Z}_N \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_N + \underline{Z}_3} = (5 + \mathrm{j}3) \cdot \frac{(2{,}5 - \mathrm{j}2{,}5) \cdot (3 - \mathrm{j}1)}{2{,}5 - \mathrm{j}2{,}5 + 3 - \mathrm{j}1} = (5 + \mathrm{j}3)\frac{5 - \mathrm{j}10}{5{,}5 - \mathrm{j}3{,}5} = 10[\mathrm{V}]$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{10}{3 - \mathrm{j}1} = (3 + \mathrm{j}1)[\mathrm{A}]$$

10.6.3. ----- Ako Nortonov generator pretvorimo u Tevenenov, sledi: $\underline{Z}_T = \underline{Z}_N = (\ 2{,}5 - \mathrm{j}2{,}5\ )\ [\Omega]$.
Maksimalna snaga se javlja kada je: $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_T^* = (\ 2{,}5 + \mathrm{j}2{,}5\ )\ [\Omega]$.
Kako je $\underline{E}_T = \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N = (\ 3 + \mathrm{j}1\ ) \cdot (\ 2{,}5 - \mathrm{j}2{,}5\ ) = (\ 10 - \mathrm{j}5\ )\ [\mathrm{V}]$.
$\underline{I}_3 = \underline{E}_T / (\ \underline{Z}_T + \underline{Z}_3\ ) = (\ 10 - \mathrm{j}5\ ) / 5 = (\ 2 - \mathrm{j}1\ )\ [\mathrm{A}]$.
Aktivna snaga na impedansi Z_3 je: $P_3 = |I_3^2| \cdot R_3 = (\ 2^2 + 1^2\ ) \cdot 2{,}5 = 12{,}5\ [\mathrm{W}]$.

10.6.4. ----- $\underline{I}_N = (\ 1{,}234 + \mathrm{j}1{,}862\ )\ \mathrm{A}$; $\underline{Z}_N = (\ 4 + \mathrm{j}3\ )\ \Omega$.

10.6.5. -----



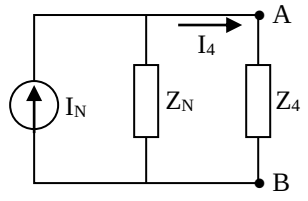
$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_1 = \frac{(30 + \mathrm{j}2) \cdot 200}{30 + \mathrm{j}2 + 200} + 20 - \mathrm{j}100 = (46{,}1 - \mathrm{j}98{,}488)[\Omega]$$

$$\underline{I}' = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}'} = \frac{100}{46{,}1 - \mathrm{j}98{,}488} = (0{,}390 + \mathrm{j}0{,}833)[\mathrm{A}]$$

$$\underline{U}_{23}' = \underline{I}' \cdot \underline{Z}_{23} = (0{,}390 + \mathrm{j}0{,}833) \cdot \frac{6000 + \mathrm{j}400}{230 + \mathrm{j}2} = (8{,}916 + \mathrm{j}22{,}328)[\mathrm{V}]$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}'}{\underline{Z}_2} = \frac{8{,}916 + j22{,}328}{30 + j2} = (0{,}345 + j0{,}721)\,[A]$$

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_{AB}' = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2 = \frac{(20 - j100)\cdot 200}{20 - j100 + 200} + 30 + j2 = \frac{4000 - j20000}{220 - j100} + 30 + j2 = (79{,}315 - j66{,}493)\,[\Omega].$$



$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_N \cdot \frac{\underline{Z}_N \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_N + \underline{Z}_4} = (0{,}345 + j0{,}721)\cdot \frac{(79{,}315 - j66{,}493)\cdot(10 + j10)}{79{,}315 - j66{,}493 + 10 + j10} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_{AB} = (0{,}345 + j0{,}721)\cdot \frac{1458{,}08 + j128{,}22}{89{,}315 - j56{,}483} = (0{,}345 + j0{,}721)\cdot(11{,}013 + j8{,}400) \Rightarrow$$

$$\underline{U}_{AB} = (-2{,}257 + j10{,}838)\,[V]$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_4} = \frac{-2{,}257 + j10{,}838}{10 + j10} = (0{,}429 + j0{,}655)\,[A].$$

10.6.6. ----- $\underline{I}_N = (3 - j1)$ [A]; $\underline{Z}_N = (14 - j2)$ [Ω] $\Rightarrow \underline{E}_T = \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N = (40 - j20)$ [V]; $\underline{Z}_T = \underline{Z}_N = (14 - j2)$ [Ω].
Impedansa prijemnika iznosi: $\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = (14 + j2)$ [Ω] ;
Struja prijemnika je: $\underline{I}_P = \underline{E}_T / (\underline{Z}_P + \underline{Z}_T) = (40 - j20) / 28 = (1{,}429 - j0{,}714)$ [A].
Aktivna snaga prijemnika je: $P = |I_P^2| \cdot R_P = (1{,}429^2 + 0{,}714^2)\cdot 14 = 35{,}726$ [W].

10.6.7. ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.6; **10.6.8.** ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.9;

10.6.9. ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.10; **10.6.10.** ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.13;

10.6.11. ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.15; **10.6.12.** ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.18.

10.6.13. ----- Vidi rešenje zadatka 10.5.19.

11.1. ----- a) $U_1:U_2 = N_1 : N_2 \Rightarrow U_2 = 5{,}5$ V; b) $I_2 : I_1 = N_1:N_2 \Rightarrow I_2 = 40$ A.

11.2. ----- $U_1 = mU_2 = 20\cdot 6 = 120$ V;

11.3. ---- $m = N_1/N_2 = 30$; $I_2/I_1 = m \Rightarrow I_1 = I_2/m = 20/30 = 2/3$ A; $P_1 = U_1I_1\cos\varphi_1 = U_1I_1 = 120\cdot 2/3 = 80$ W; $P_2 = U_2I_2\cos\varphi_2 = U_2I_2$; $\eta = P_2/P_1 \Rightarrow P_2 = \eta P_1 = 80\cdot 0{,}8 = 64$ W.

11.4. ---- $P_1 = U_1I_1\cos\varphi$; $P_2 = U_2I_2\cos\varphi$; $\eta = P_2/P_1 = U_2I_2/U_1I_1 = 324/440 = 0{,}7364$ (73,64 %).

11.5. ---- $U_1/U_2 = N_1/N_2 = m \Rightarrow U_1 = mU_2 = 13{,}2\cdot m$. Kada se na sekundar priključi primarni napon , tada je odnos transformacije: $U_2'/U_1' = N_2/N_1$, gde sekundar poprima ulogu primara a primar ulogu sekundara. Dakle, primarni napon je sada U_2' i on je: $U_2' = mU_2 = 13{,}2\cdot m$, a sekundarni napon (napon na primaru) je $U_1' = 120$ V. Sledi, $m = N_1/N_2 = U_1'/U_2' = 120/13{,}2\cdot m \Rightarrow m^2 = 120/13{,}2 = 9{,}09 \Rightarrow m = 3$.

11.6. ------ $U_1:U_2 = N_1:N_2 \Rightarrow U_2 = U_1/m = 1000U_1 \Rightarrow m = 0{,}001$.
Kako je $I_2:I_1 = N_1:N_2 = U_1:U_2 \Rightarrow I_2 = mI_1 = 10^{-3}I_1$, što znači da će se sekundarna struja smanjiti hiljadu puta. Džulovi gubici na dalekovodu su rezultat sekundarne struje, koja je ujedno struja dalekovoda, i oni iznose: $P_d = I_2^2R_d = (0{,}001I_1)^2R_d = 10^{-6}I_1^2R_d = 10^{-6}P$. Dakle smanjenjem sekundarne struje za hiljadu puta smanjuju se Džulovi gubici na dalekovodu za miliom puta (R_d je otpor dalekovodne žice).

11.7. ----- a) $m = U_1/U_2 = 55$;
b) 1) $P_1 = U_1I_1\cos\varphi_1 = P_2 = U_2I_2\cos\varphi_2 \Rightarrow I_2/I_1 = U_1/U_2 = 55 \Rightarrow I_1/I_2 = 1/55 = 0{,}0182$;
2) $\eta = P_2/P_1 \Rightarrow U_2I_2/U_1I_1 = 0{,}75 \Rightarrow I_2/I_1 = 0{,}75\cdot U_1/U_2 \Rightarrow I_1/I_2 = U_2/U_1\cdot 0{,}75 = 1/0{,}75\cdot m \Rightarrow$
$I_1/I_2 = 1/0{,}75\cdot 55 = 1/41{,}25 = 0{,}024$.

11.8. ----- $S_1 = U_1I_1 \Rightarrow I_1 = S_1/U_1 = 10/3$ [A]; $I_2/I_1 = N_1/N_2 \Rightarrow I_2 = I_1N_1/N_2 = 45{,}45$ [A].

11.9. ----- odnos preobražaja transformatora je $m = U_1/U_2 = 11$.
Kada na sekundar dodamo 10 navojaka nastaje novi odnos transformacije koji iznosi $m' = U_1/U_2' = 220/22 = 10$. Napon primara je, kod prve varijente $m = 11$, a kod druge $m' = 11 \Rightarrow N_1/N_2 = 10$ i $N_1/(N_2+10) = 10 \Rightarrow$ $N_1 = 11\cdot N_2 = 10\cdot(N_2 + 10) \Rightarrow 11N_2 = 10N_2 + 100 \Rightarrow N_2 = 100$ navojaka i $N_1 = m\cdot N_2 = 1\,100$ navojaka.

11.10. ----- $m = N_1/N_2 = 0{,}125$; $U_1/U_2 = m \Rightarrow U_2 = U_1/m = 1\,600$ [V].
Reaktivni otpori na sekundaru transformatora iynose:
$X_L = \omega L = 314\cdot 3 = 942$ [Ω] i $X_C = 1/\omega C = 10^6/314\cdot 5 = 639{,}94$ [Ω] .
Ukupna impedansa sekundara je:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 321{,}03[\Omega].$$

Struja na sekundaru je:
$I_2 = U_2/Z = 1\,600/321{,}03 = 4{,}98$ [A].

11.11. ----- Na primaru drugog transformatora deluje sekundarni napon prvog transformatora umanjen za pad napona na dalekovodu. Dakle, $U_1'' = U_2' - \Delta U$.
Kada transformatori rade u praznom hodu, tj na sekundar drugog transformatora nije priključen potrošač, tada se ukupna energija elektrane os 6 kW troši na Džulove gubitke na dalekovodima. Kako su ovi gubici na dalekovodu jednaki: $P_d = I_d^2R_d \Rightarrow$

$$I_d = \sqrt{\frac{P}{R_d}} = \sqrt{\frac{P}{\rho\cdot\frac{2l}{S}}} = \sqrt{\frac{6\cdot 10^3}{0{,}0178\cdot\frac{2\cdot 50\cdot 10^3}{0{,}5\cdot 10^2}}} = \sqrt{\frac{6\cdot 10^3\cdot 0{,}5\cdot 10^2}{0{,}0178\cdot 10^5}} = \sqrt{\frac{3}{0{,}0178}} = 12{,}98[\mathrm{A}].$$

Ova struja na dalekovodu je i struja sekundara prvog transformatora i struja primara drugog transformatora.
Dakle, $I_2' = I_d = I_1'' = 12{,}98$ [A]
Napon na primaru drugog transformatora je:
$U_1'' = U_2' - \Delta U = 20\,000 - I_d\cdot R_d = 20\,000 - 12{,}98\cdot\rho\cdot 2l/s = 20\,000 - 12{,}98\cdot 0{,}0178\cdot 2\cdot 50\,000/50 = 19\,537{,}9$ [V].
Kako je odnos transformacije kod drugog transformatora: $N_1''/N_2'' = U_1''/U_2''$, broj navojaka sekundara na drugom transformatoru iznosi:

$$N_2'' = \frac{U_2''}{U_1''}N_1'' = \frac{200}{19537{,}9}\cdot 4000 = 40{,}95 \approx 41\,\text{navojak}.$$

11.12. ----- $P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1$; $P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2$.

Kako je $\eta = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{P_1 - 0{,}08P_1}{P_1} = \dfrac{0{,}92P_1}{P_1} = 0{,}92 \Rightarrow P_2 = 0{,}92P_1 \Rightarrow U_2 I_2 \cos\varphi_2 = 0{,}92 U_1 I_1 \cos\varphi_1$,

napon na sekundaru transformatora je:

$$U_2 = \frac{0{,}92 \cdot U_1 I_1}{I_2} = \frac{0{,}92 \cdot 150 \cdot 2}{0{,}1} = 2760\,[\mathrm{V}]$$

gde je struja potrošača ujedno i struja na sekundaru transformatora.

11.13. ----- a) $m = 66/4 = 16{,}5$; $S_1 = U_1 I_1 = 200 \cdot 10^3 \Rightarrow I_1 = 200 \cdot 10^3 / 6\,600 = 30{,}3$ [A]; $I_2 = mI_1 = 500$ [A].

b) $N_1 = mN_2 = 1320$ navojaka

c) $E_1 = U_1 = 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_m \Rightarrow \Phi_m = U_1 / 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 = 6\,600 / 4{,}44 \cdot 50 \cdot 1\,320 = 0{,}0225$ [Wb].

11.14. ----- a) $m = 5$; $U_1 = mU_2 = 2\,000$ [V];

b) $S_1 = U_1 I_1 \Rightarrow I_1 = S_1 / U_1 = 100\,000 / 2\,000 = 50$ [A]; $I_2 = mI_1 = 250$ [A];

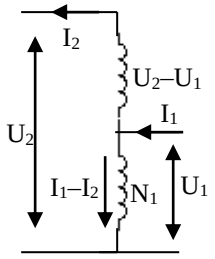
c) $P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2 \Rightarrow I_2 = P_2 / U_2 \cos\varphi_2 = 50\,000 / 400 \cdot 0{,}8 = 156{,}25$ [A].

11.15. ----- a) $m = 1{,}27$; $I_1 = I_2/m = 10 / 1{,}27 = 7{,}87$ [A];

b) $N_2 = N_1/m = 188{,}98 \approx 189$ navojaka

c) $S_{AB} = I_1 / J = 7{,}87 / 2 = 3{,}935$ [mm^2] ; $S_{BC} = |(I_1 - I_2)| / J = (10 - 7{,}87) / 2 = 1{,}065$ [mm^2].

11.16. -----



Snaga primara kod autotransformatora je:
$P_{1A} = U_1 \cdot (I_1 - I_2) = U_1 \cdot (I_1 - mI_1) = U_1 I_1 - 0{,}8 U_1 I_1 = 0{,}2 U_1 I_1$.

Ako odvojimo primar od sekundara, tada će snaga primara biti jednaka $P_1 = U_1 I_1$.

Kako je snaga primara kod autotransformatora $P_{1A} = 0{,}2 U_1 I_1 \Rightarrow P_{1A} = 0{,}2 P_1$.

Snaga transformatora, kod idealnih transformatora, je jednaka snazi primara, odnosno snazi sekundara ($P_1 = P_2$).

Snaga kod autotransformatora, za navedeni primer, iznosi 20% u odnosu na snagu kada namotaje razdvojimo primarni i sekundarni namotaj.

11.17. ------ a) $E_1 \approx U_1 = 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_m \Rightarrow \Phi_m = E_1 / 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 = 500 / 4{,}44 \cdot 50 \cdot 400 = 0{,}00563$ [Wb].
Ovo je fluks bez rasipanja, tj. fluks koji indukuje ems e_1 i e_2. Kako se na rasipanje izgubi 5 % fluksa, ukupni rezultantni fluks je:

$$\Phi_{rm} = \Phi_m + 0{,}05\Phi_m = 1{,}05 \cdot \Phi_m = 0{,}005912 \text{ [Wb]}.$$

Ukupna rezultantna magnetna indukcija (amplituda) iznosi:

$B_{rm} = \Phi_{rm}/S = 0{,}005912 / 63 \cdot 10^{-4} = 0{,}938$ [T].

b) $m = N_1 / N_2 = 400 / 1000 = 0{,}4$; $U_1 / U_2 \approx N_1 / N_2 \Rightarrow U_2 \approx U_1/m = 500 / 0{,}4 \approx 1\,250$ [V].

11.18. -----

a) $U_1/U_2 = N_1/N_2 \Rightarrow N_2 = N_1 U_2 / U_1 \Rightarrow N_2 = 620 \cdot 3 / 220 = 8{,}45 \approx 8$ navojaka; 14 i 23 navojka;

b) $I_1 N_1 = I_2 N_2 \Rightarrow I_1 = I_2 N_2 / N_1 \Rightarrow I_1 = 1 \cdot 8 / 620 = 0{,}013$ A; $0{,}8 \cdot 14 / 620 = 0{,}018$ A; $0{,}4 \cdot 23 / 620 = 0{,}015$ A;

c) $S_1 = S_2 = U_1 I_1 \Rightarrow S_1 = 220 \cdot 0{,}013 = 2{,}86$ VA; $220 \cdot 0{,}018 = 3{,}96$ VA; $220 \cdot 0{,}015 = 4{,}8$ VA;

d) $E_1 = U_1 = 4{,}44 \cdot N_1 \cdot f \cdot \Phi_m = 4{,}44 \cdot N_1 \cdot f \cdot B_m \cdot S_{Fe} \Rightarrow S_{Fe} = U_1 / 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 \cdot B_m = 220 / 4{,}44 \cdot 50 \cdot 620 \cdot 1 = 16$ cm^2.

11.19. ----- $E_1 = U_1 = 4{,}44 \cdot N_1 \cdot f \cdot B_m \cdot S_{Fe} \Rightarrow N_1 = U_1 / 4{,}44 \cdot f \cdot B_m \cdot S_{Fe}$

a) $N_1 = 220 / 4{,}44 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9 = 138$ nav, $U_1/U_2 = N_1/N_2 \Rightarrow N_2 = U_2 \cdot N_1 / U_1 = 42 \cdot 138 / 220 = 26$ nav.

c) $N_1 = 300 / 4{,}44 \cdot 50 \cdot 105 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}82 = 157$ navojaka; $N_2 = U_2 N_1 / U_1 = 60 \cdot 157 / 300 = 31$ navojka,

d) $N_1 = 217$ navojaka; $N_2 = 48$ navojaka,

e) $N_1 = 300$ navojaka; $N_2 = 88$ navojaka.

NAPOMENA! Broj navojaka se uvek zaokružuje sa celim brojem.

11.20. ----- $S_1 = S_2 = S = U_1I_1 = U_2I_2$

a) $S = U_2I_2 = 42\cdot20 = 840$ VA; $S_1 = U_1I_1 \Rightarrow I_1 = S_1/U_1 = 840/220 = 3{,}82$ A;
b) $S = U_2I_2 = 60\cdot50 = 3\,000$ VA; $I_1 = S_1/U_1 = 10$ A;
c) $S = U_2I_2 = 110\cdot90 = 9\,900$ VA; $I_1 = S_1/U_1 = 9\,900/500 = 19{,}8$ A;
d) $S = U_2\cdot I_2 = 220\cdot130 = 28\,600$ VA; $I_1 = S_1/U_1 = 28\,600/750 = 38{,}13$ A.

11.21. -----

Kako je $$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\omega L_1}{\omega L_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{U_1}{I_1}}{\frac{U_2}{I_2}} = \frac{U_1}{U_2}\cdot\frac{I_2}{I_1} = m\cdot m = m^2 \;\Rightarrow\; m = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

Induktivnost sekundarnog kalema je: $L_2 = L_1/m^2 = 6/9 = 0{,}667$ [mH].
Međusobna induktivnost je:

$$L_m = M = k\cdot\sqrt{L_1\cdot L_2} = 0{,}1\cdot\sqrt{6\cdot\frac{2}{3}} = 0{,}2\,[\text{mH}].$$

11.22. -----

Odnos transformacije je:

$$m = N_1/N_2 = 200/50 = 4.$$

Napon na sekundaru iznosi ($m = U_1/U_2$) :

$$U_2 = U_1/m = 25\ [\text{V}].$$

Struja sekundara je:

$$I_2 = U_2/R = 25\ [\text{A}].$$

Primarna struja ($m = I_2/I_1$) je:

$$I_1 = I_2/m = 25/4 = 6{,}25\ [\text{A}].$$

Magnetni fluks Φ_m sledi iz izraza za indukovanu ems primara, ili sekundara, gde je: $E_1 = U_1 \approx 4{,}44\cdot f\cdot N_1\cdot\Phi_m$, pa sledi:

$$\Phi_m = \frac{U_1}{4{,}44\cdot f\cdot N_1} = 2{,}25\,[\text{mWb}].$$

11.23. -----

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{U_1}{I_1}}{\frac{U_2}{I_2}} = \frac{U_1I_2}{U_2I_1} = m^2$$

Odnos transformacvije je:

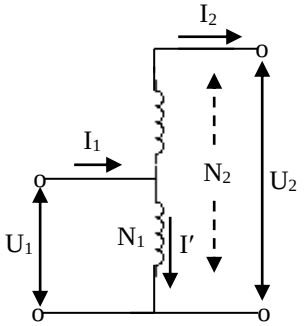
$$m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = 31{,}623$$

Sekundarni broj navojaka ($m = N_1/N_2$) je:

$$N_2 = N_1/m = 63{,}25.$$

Kako se za broj navojaka uvek uzima celi broj, sledida je $N_2 = 63$ navojka.

11.24. -----



Struja sekundara je: $I_2 = S_2/U_2 = 2000\cdot10^3/5000 = 400$ [A].
Odnos transformacije je: $m = U_1/U_2 = 0{,}94$.
Struja primara iznosi: $I_1 = I_2/m = 400/0{,}94 = 425{,}53$ [A].
Kroz primarni namotaj, koji je ujedno i zajednički namotaj, protiče struja ($I_1 = I_2 + I'$) I', koja iznosi:

$$I' = I_1 - I_2 = 25{,}23\ [\text{A}].$$

Snaga na koju je dimenzionisan transformator je jednaka proizvodu napona na primarnom namotaju i struje koja protiče kriz primarni namotaj, pa je:

$S = S_1 = U_1\cdot I' = 4700\cdot25{,}53 = 120\,000$ [VA] = 120 [kVA].

11.25. ----- Odnos transformacije je: $m = N_1/N_2 = 0{,}909$, pa je električna šema ovog autotransformatora ista kao i u predhodnom zadatku, što znači da je i način njegovog rešenja isti ($N_2 > N_1$).

Primarni napon je $U_1 = U = 200$ V.

Napon na sekundaru jednak: $U_2 = U_1/m = 220$ [V].

Struja sekundara je: $I_2 = P_2/U_2 = 10\,000/220 = 45{,}45$ [A].

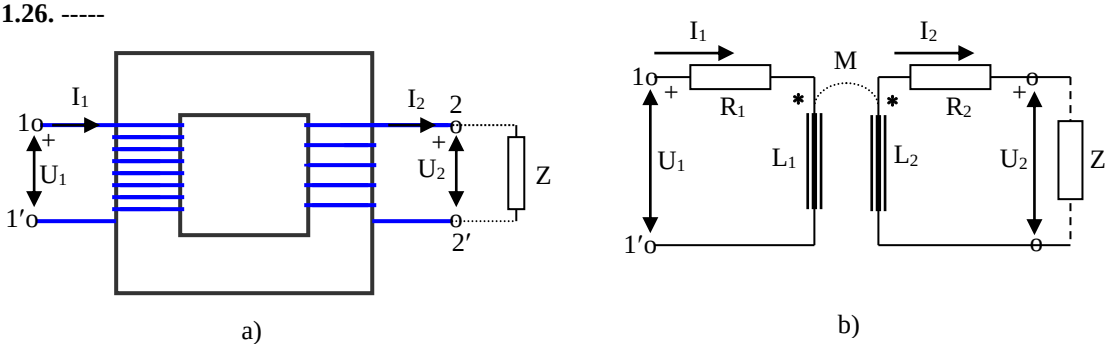
Primarna struja je $I_1 = I_2/m = 50$ [A].

Kroz primarni namotaj (zajednički) N_1 protiče struja I', koja iznosi: $I' = I_1 - I_2 = 4{,}55$ [A].

Snaga za koju je transformator dimenzionisan je:

$$P = P_1 = U_1 \cdot I' = 200 \cdot 4{,}55 = 910 \text{ [VA]}.$$

11.26. -----



a) transformator i b) električna šema

Primar i sekundar su induktivno povezani, pa dolazi do međusobne induktivnosti, koja je takvog smera da im se fluksevi međusobno suprostavljaju. Zbog toga su zvezdice uvek postavljene tako da je međusobna induktivnost L_m negativna, tj. $L_m < 0$ (umesto L_m često se uzima oznaka M).

Na osnovu električne šeme transformatora i induktivno spregnutih kola, dolazimo do osnovnih jednačina transformatora:

$$\underline{U}_1 - \underline{I}_1\underline{Z}_{11} + \underline{I}_2\underline{Z}_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_{11} - \underline{I}_2\underline{Z}_{12} \quad \text{..... (1)}$$

$$\underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_{22} - \underline{I}_1\underline{Z}_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_2 = \underline{I}_1\underline{Z}_{21} - \underline{I}_2\underline{Z}_{22} \text{ ..... (2) ; } \quad \underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}$$

gde je:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1; \quad \underline{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 \quad \text{i} \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_m = j\omega L_m \quad (Z_m = |j\omega M|).$$

Napon na sekundaru iznosi: $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}$,

Kako je impedansa prijemnika Z (Z = R) priključena na sekundar sledi (iz druge jednačine):

$\underline{I}_2\underline{Z} = \underline{I}_1 \cdot j\omega L_m - \underline{I}_2 \cdot (R_2 + j\omega L_2) \Rightarrow \underline{I}_2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^6 = \underline{I}_1 \cdot j8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}001 - \underline{I}_2 \cdot (80 + j8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}008) \Rightarrow$

$\underline{I}_2 \cdot (200\,000 + 80 + j64\,000) = j\underline{I}_1 8\,000 \Rightarrow$

$$\underline{I}_1 = \frac{200080 + j64000}{j8000}\,\underline{I}_2 = (8 - j25{,}01)\underline{I}_2 .$$

Zamenom ovih struja u prvu jednačinu, sledi: $\underline{U}_1 = (8 - j25{,}01)\underline{I}_2 \cdot (R_1 + j\omega L_1) - j\underline{I}_2\omega L_m \Rightarrow$

Uz pretpostavku da je napon mreže u faznoj osi (početni ugao jednak nuli), navedena jednačina iznosi:

$5 = \underline{I}_2 \cdot (8 + j25{,}01) \cdot (50 + j8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}004) - j\underline{I}_2 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}001 \Rightarrow 5 = \underline{I}_2 \cdot (800\,720 + j254\,749{,}5) - j\,\underline{I}_2 \cdot 8\,000 \Rightarrow$

$5 = \underline{I}_2 \cdot (800\,720 + j254\,749{,}5 - j8\,000) \Rightarrow 5 = \underline{I}_2 \cdot (800\,720 + j246\,749{,}5) \Rightarrow$

$\underline{I}_2 = (5{,}70 - j1{,}76) \cdot 10^{-6}$ [A] = (5,70 – 1,76) [μA].

Efektivna vrednost sekundarne struje iznosi: $I_2 = 5{,}97$ [μA].

Primarna struja je jednaka:

$$\underline{I}_1 = (8 - j25{,}01) \cdot (5{,}70 - j1{,}76) \cdot 10^{-6} = (1{,}58 - j156{,}64) \cdot 10^{-6} \text{ [A]} = (1{,}58 - j156{,}64) \text{ [μA]},$$

pa je njena efektivna vrednost jednaka: $I_1 = 156{,}65$ [μA].

Napon na sekundaru je: $\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z} = (5{,}70 - j1{,}76) \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 10^6 = (1{,}14 - j0{,}352)$ [V],

a njegova efektivna vrednost je jednaka : $U_2 = 1{,}193$ [V].

11.27. -----

Osnovne jednačine kod realnog transformatora, prema električnoj šemi prikazanoj u predhodnom zadatku su:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_{11} - \underline{I}_2\underline{Z}_{12} \quad \text{..... (1)}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1\underline{Z}_{21} - \underline{I}_2\underline{Z}_{22} \quad \text{..... (2), gde je } \underline{U}_2 = \underline{I}_2\cdot\underline{Z}$$

Međusobna induktivnost iznosi $L_m = M = L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}2076\,[\text{mH}]$, pa je:

$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j|\omega L_m| = j\cdot 5\cdot 10^3\cdot 0{,}2076\cdot 10^{-3} = j1{,}038\ [\Omega]$.

Uvrštavanjem ove vrednosti u drugu jednačinu sledi:

$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\cdot\underline{Z} = \underline{I}_1\cdot\underline{Z}_{12} - \underline{I}_2\cdot(R_2 + j\omega L_2) \Rightarrow \underline{I}_2\cdot(\underline{Z} + R_2 + j\omega L_2) = \underline{I}_1\cdot j\omega L_m \Rightarrow$

$\underline{I}_2\cdot(2\,000 + j500 + 100 + j20) = \underline{I}_1\cdot j1{,}038 \Rightarrow$

$\underline{I}_2\cdot(2\,100 + j520) = \underline{I}_1\cdot j1{,}038 \Rightarrow \underline{I}_1 = (2\,100 + j520)\cdot\underline{I}_2 / j1{,}038 = (500{,}96 - j2\,023{,}12)\underline{I}_2$.

Odnos između primarne i sekundarne struje, u kompleksnom obliku, iznosi:

$$\underline{I}_1 / \underline{I}_2 = (500{,}96 - j2\,023{,}12).$$

Apsolutna vrednost ovog odnosa je:

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{500{,}96^2 + 2023{,}12^2} = 2084{,}22\ .$$

Ovaj odnos možemo odrediti i proizvoljnim uzimanjem vrednosti primarnog napona, npr. $U_1 = 100$ V ($\underline{U}_1 = 100$ V). U ovom slučaju prva jednačina glasi:

$\underline{U}_1 = (500{,}96 - j2\,023{,}12)\underline{I}_2\cdot(R_1 + j\omega L_1) - \underline{I}_2\cdot j\omega L_m \Rightarrow 100 = (500{,}96 - j2\,023{,}12)\cdot(60 + j15)\underline{I}_2 - \underline{I}_2\cdot j1{,}038 \Rightarrow$

$100 = (60\,404{,}4 - j113\,872{,}28)\underline{I}_2 - j1{,}038\,\underline{I}_2 \Rightarrow 100 = (60\,404{,}4 - j113\,873{,}32)\,\underline{I}_2 \Rightarrow$

$\underline{I}_2 = (363{,}54 + j685{,}33)\cdot 10^{-6}$[A].

Primarna vrednost struje je:

$\underline{I}_1 = (500{,}96 - j2\,023{,}12)\cdot(363{,}54 - 685{,}33)\cdot 10^{-6} = (1{,}569 - j0{,}392)$ [A].

Efektivne vrednosti primarne i sekundarne struje su: $I_1 = 1{,}617$ [A] i $I_2 = 775{,}78\cdot 10^{-6}$ [A], a njihov odnos je:

$I_1/I_2 = 1{,}617/775{,}78\cdot 10^{-6} = 2084{,}65$ (što je isto kao i kod prve varijante)

Primarni napon je:

$$\underline{U}_1 = (60\,404{,}4 - j113\,873{,}32)\,\underline{I}_2$$

a sekundarni:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\cdot\underline{Z} = (2\,000 + j500)\,\underline{I}_2.$$

Odnos ozmeđu primarnog i sekundarnog napona je:

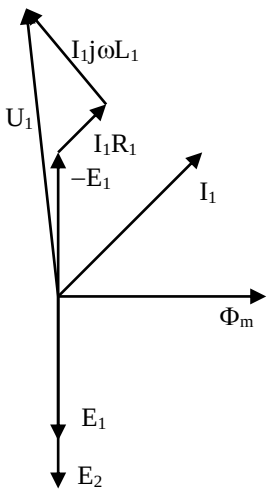
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{(60404{,}4 - j113873{,}32)\cdot\underline{I}_2}{(2000 + j500)\cdot\underline{I}_2} = (15{,}029 - j60{,}694).$$

Ovaj odnos u apsolutnom (realnom) iznosu je jednak:

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{15{,}029^2 + 60{,}694^2} = 62{,}53\ .$$

Čitaocu se preporučuje da ovaj odnos odredi na osnovu proizvoljno uzete vrednosti primarnog napona. Objasniti ovu mogućnost, koja je nastala u ovom zadatku, da su primarna struja i primarni napon veći od sekundarne struje, odnosno napona.

11.28. -----



$E_1 = 4{,}44\cdot 50\cdot N_1\cdot\Phi_m = 4{,}44\cdot 50\cdot 500\cdot 4\cdot 10^{-3} = 444$ [V].

Fluks Φ prednjači indukovanim ems E_1 i E_2 za 90°.

Za primar transformatora važi sledeća jednačina:

$\underline{U}_1 - \underline{I}_1\underline{Z}_1 - (-\underline{E}_1) = 0 \Rightarrow \underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + \underline{I}_1\underline{Z}_1 \Rightarrow$

$\underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + \underline{I}_1\cdot(R_1 + j\omega L_1)$.

Kod idealnog transformatora sledi da je: $U_1 = -E_1$, što znači da će indukovana ems primara e_1 sa primarnim naponom u_1 održavati protutežu. Zbog toga se u praksi, kod postavljanja jednačina transformatora na primarnoj strani, umesto ems e_1 koristi njena suprotna vrednost ($-e_1$). Ova vrednost ems ($-e_1$) prednjačiti svom fluksu za 90°.

Izraz za trenutnu vrednost ems primara je:

$(-e_1) = e_1' = 444\sqrt{2}\ \sin(314t + 113°)$, ili

$e_1 = 444\sqrt{2}\ \sin(314t - 67°)$.

11.29. ----- $E_1 = U_1 = 222 = 4{,}44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_m = 4{,}44 \cdot 50 \cdot 500 \cdot \Phi_m \Rightarrow \Phi_m = 222/222 \cdot 500 = 0{,}002$ [Wb] = 2 [mWb].

Pošto se, zbog jednačina na primaru transformatora, za indukovanu ems e_1 redovito uzima da prednjači svom fluksu Φ za 90° (u stvarnosti je to obrnuto, vidi fazorski dijagram u predhodnom zadatku), analitički izraz za magnetni fluks glasi:

$$\phi = 2 \sin (314t - 90°) \text{ [mWb]}.$$

11.30. -----

$$m = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1 Z_1}{I_2 Z_2} \Rightarrow m \cdot \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow m^2 = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

$$m' = \frac{U_1'}{U_2'} = \sqrt{\frac{Z_1'}{Z_2'}}$$

Kako je $Z_1 = Z_1'$ a $Z_2 = Z_2'/3 \Rightarrow Z_2' = 3Z_2 \Rightarrow$ $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}}{\sqrt{\frac{Z_1'}{Z_2'}}} = \dfrac{\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}}{\sqrt{\frac{Z_1}{3Z_2}}} = \sqrt{\dfrac{Z_1 \cdot 3Z_2}{Z_1 \cdot Z_2}} = \sqrt{3}.$

Dakle, odnos transformacije je kod prvog merenja, gde je opterećenje sekundara bilo manje, veće od odnosa transformacije kod drugog merenja za približno $\sqrt{3}$ puta ($m = \sqrt{3}\, m'$).

Čitaocu se ostavlja mogućnost da dođe do zaključka kako i zbog čega se menja odnos transformacije pri promeni opterećenja transformatora.

11.31. ----- Kako je kod idealnog transformatora:

$$m = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\text{ , gde je:}$$

Z_1 impedansa primara transformatora, a Z_2 impedansa sekundarnog namotaja transformatora. Da bi navedena relacija bila što tačnija, impedanse transformatora trebaju ostati nepromenjene. Kako se na sekundar transformatora veže impedansa Z njena vrednost treba da je jednaka $Z = 0$ (sekundar u kratkom spoju), a samim tim i impedanse primara i sekundara transformatora ostaju nepromenjene. Ova konstatacija se odnosi samo na struje, dok bi kod napona rešenje bilo drugačije.

Dakle, rešenje je pod tačkom d) $Z = 0$.

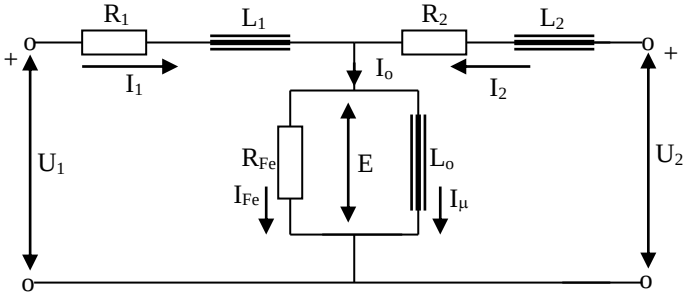
11.32. ----- Kod idealnih transformatora je ($U_1 = E_1$ a $U_2 = E_2$):

$$m = \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{U_1}{U_2}$$

Napon na sekundaru transformatora U_2 će biti jednak ems E_2 samo u praznom hodu, tj. kada nema padova napona na sekundaru. To će se dogoditi pri beskonačnom otporu sekundara (potrošača), jer je struja I_2 jednaka nuli, a samim tim i nema padova napona na namotajima sekundara.

Rešenje je pod tačkom e) $Z = \infty$.

11.33. -----

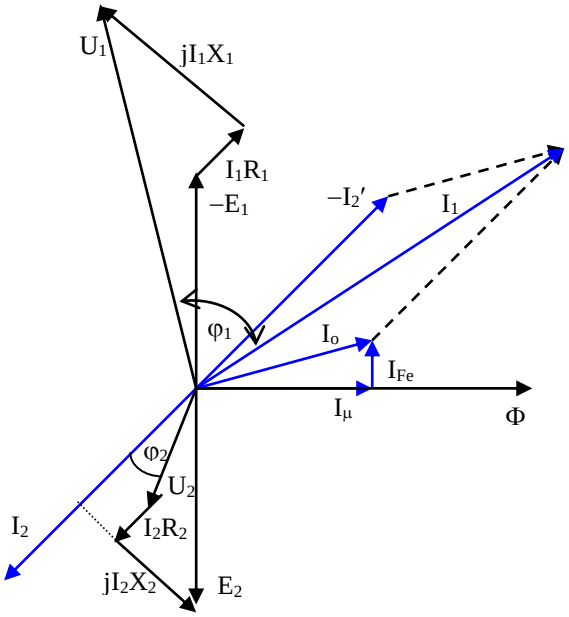


Gde je, prema slici:

R_1... aktivni otpor namotaja N_1
L_1.... induktivnost namotaja N_1
R_2 ....aktivni otpor namotaja N_2
L_2.....induktivnost namotaja N_2
R_{Fe}....ekvivalentni (nadomesni) otpor gubitaka u gvožđu
L_o.....ekvivalentna induktivnost sa odgovarajućom međusobnom induktivnošću ($L_o = m \cdot L_m = mM$)

11.34. ----- L_1, L_2, R_1 i R_2 ne zavise od frekvencije f ($L = N^2\Lambda$). Promenom frekvencije f menjaju se gubici u gvožđu (magnetna histereza i vrtložni gubici), a to znači da se menja parametar R_{Fe}, koji i predstavlja gubitke u gvožđu (grejanje jezgra). Povećanjem frekvencije povećavaju se i ovi gubici.

11.35. -----



Sl.6.

Pri crtanju fazorskog dijagrama redovito se sekundarne veličine svedu (redukuju) na primarne.

Kod realnog transformatora struja praznog hoda I_o se sastoji iz dve komponente, i to:

- I_μ ..... struja magnetiziranja, pa je ona u fazi sa fluksom Φ kojeg stvara i
- I_{Fe} ..... struja gubitaka u gvožđu (vrtložne struje i histereza). Ova komponenta struje stvara u gvožđu, prema Džulovom zakonu, toplotne gubitke, pa je ona normalna na struju magnećenja.

Struja praznog hoda je jednaka:

$$\underline{I}_o = \underline{I}_\mu + \underline{I}_{Fe} \quad \Rightarrow \quad I_o = \sqrt{I_\mu^{\,2} + I_{Fe}^{\,2}}$$

Redovito je $I\mu >> I_{Fe} \Rightarrow I_o \approx I_\mu$, što je i cilj (to se ostvaruje specijalnim trafolimovima).

11.36. ----- Zamenom transformatorskih limova punim materijalom istog materijala, smanjuje se otpornost tog materijala pa se povećava vrtložna struja. To dovdi do toga da se povećava struja gubitaka u gvožđu I_{Fe}. Povećanjem struje I_{Fe} (vidi fazorski dijagram u rešenju predhodnog zadatka) povećava se i struja Io i ujedno smanjuje njen fazni pomak u odnosu na struju I_1 (i napon U_1). Ovo povećanje struje I_o i smanjenje faznog pomaka u odnosu na I_1 dovodi do toga da se po povećava i struja primara I_1 i istovremeno smanjuje njen fazni pomak u odnosu na primarni napon U_1.

Dakle, zamenom transformatorskih limova sa punim materijalom istog preseka i istog materijala smanjuje fazni napon između napona i struje na primaru (mreže).

11.37. ----- Odgovor je pod tačkom b) Gubici kod praznog hoda transformatora su gubici usled histereze i vrtložnih struja, koji nastaju u jezgri transformatora (gvožđu).

11.38. ----- Gubici transformatora u režimu kratkog spoja su jednaki gubicima u namotajima primara i sekundara transformatora. Odgovor je pod a)

11.39. ----- Povećenjem opterećenja transformatora povećavaju se samo Džulovi gubici na namotajima transformatora (vidi rešenje predhodnog zadatka). Gubici u gvožđu su isti i u režimu praznog hoda i u režima kratkog spoja, samim tim i u nominalnom režimu rada. Povećanjem otpora potrošača tri puta, smanjuje se struja sekundara tri puta. Kako su otpori u bakru (namotaju primara i sekundara) ostali nepromenjeni, tada će po Džulovom zakonu gubici u bakru da se smanje za 3^2.

Povećenjem opterećenja na sekundaru za tri puta Džulovi gubici u bakru se smanje za devet puta, pa sledi:

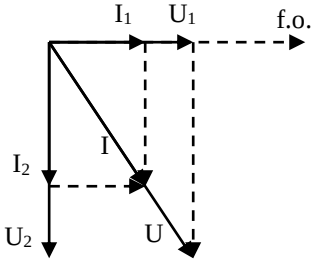
$$P_{Fe}' \approx P_{Fe} \;\text{ i }\; P_{Cu}' \approx P_{Cu}/9.$$

gde su P_{Fe}' i P_{Cu}' gubici nakon povećanja opterećenja, a P_{Fe} i P_{Cu} gubici u nominalnom režimu rada.

11.40. ----- Snaga koju uzima transformator u režimu kratkog spoja uglavnom se troši na zagrevanje primarnog i sekundarnog namotaja.

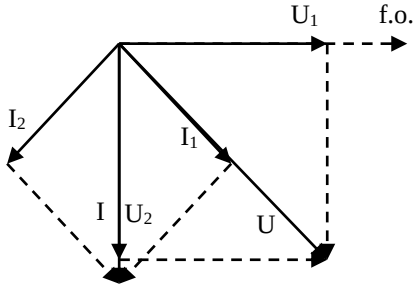
Rešenje odgovora je pod a)

12.1. -----



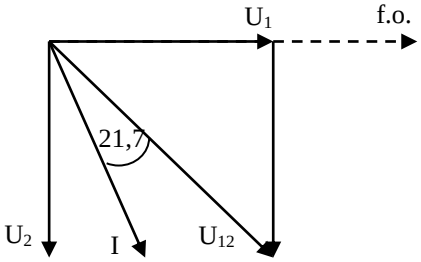
$\underline{U}_1 = 100\cdot e^{j0}$ [V]; $\underline{U}_2 = 200\cdot e^{-j90}$ [V];
$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (100 - j200)$ [V] $\Rightarrow$
$\underline{I}_1 = \underline{U}_1/R_1 = 10 \Rightarrow \underline{I}_1 = 10\cdot e^{j0}$ [A];
$\underline{I}_2 = \underline{U}_2/R_2 = 20 \Rightarrow \underline{I}_2 = 20\cdot e^{-j90}$ [A];
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (10 - j20)$ [A].

12.2. -----



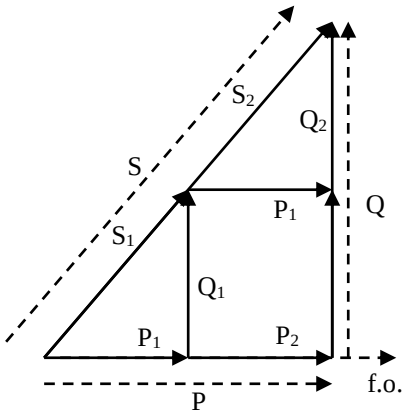
$\underline{U}_1 = 200\cdot e^{j0}$ [V]; $\underline{U}_2 = 200\cdot e^{-j90}$ [V];
$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (200 - j200)$ [V] $\Rightarrow$
$\underline{U} = 200\sqrt{2}\cdot e^{-j45}$ [V]; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = 10\cdot e^{j45}$ [Ω];
$\underline{I}_1 = \underline{U}/\underline{Z}_1 = 200\cdot e^{j0}/10\sqrt{2}\ e^{j45} = 10\sqrt{2}\ e^{-j45}$ [A];
$\underline{I}_2 = \underline{U}/\underline{Z}_2 = 200\cdot e^{-j90}/\sqrt{2}\ 10\cdot e^{j45} = 10\sqrt{2}\cdot e^{-j135}$ [A];
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (10 - j10) + (-10 - j10) = -j20$ [A]
$\underline{I} = 20\cdot e^{-j90}$ [A].

12.3. -----



$\underline{U}_1 = 300\cdot e^{j0}$ V; $\underline{U}_2 = 300\cdot e^{-j90}$ V
$\underline{U}_{12} = (300 - j300) = 300\sqrt{2}\ e^{-j45}$ [V].
$Z = \sqrt{100^2 + 200^2} = 100\sqrt{5}[\Omega]$.
$\underline{Z} = 100\sqrt{5}\cdot e^{j26,7}$ [Ω].
Pošto je impedansa Z priključena na linijski napon U_{12} nju protiče struja koja iznosi:
$\underline{I} = \underline{U}_{12}/Z = 300\sqrt{2}\ e^{-j45}/100\sqrt{5}\cdot e^{j26,7} \Rightarrow$
$\underline{I} = 1,9\cdot e^{-j71,7}$ [A].

12.4. -----

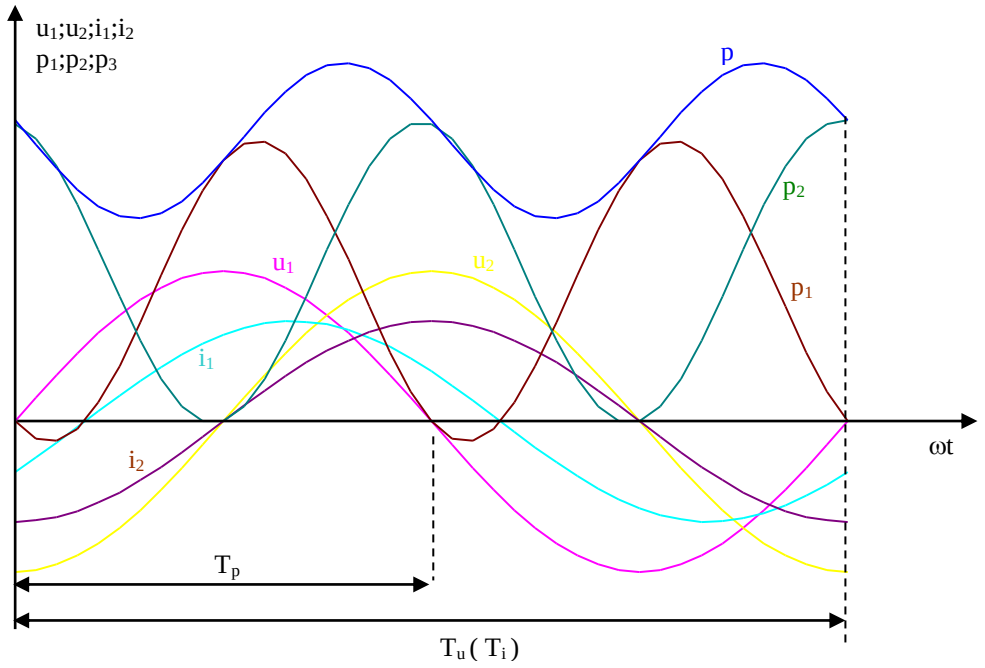


$\underline{U}_1 = 100$ V; $\underline{U}_2 = -j100$ V; $\underline{U} = (100 - j100)$ V;
$\underline{I}_1 = (5 - j5\sqrt{3})$ A; $\underline{I}_2 = (-5\sqrt{3} - j5)$ A;
$\underline{S}_1 = U_1\cdot I_1^* = 100\cdot(5 + j5\sqrt{3}) = (500 + j500\sqrt{3})$;
$\underline{S}_2 = U_2\cdot I_2^* = -j100\cdot(-5\sqrt{3} + j5) = (500 + j500\sqrt{3})$
$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (1\,000 + j1\,000\sqrt{3})$ VA $\Rightarrow$
P = 1 000 W; Q = $1\,000\sqrt{3}$ VAr ; S = 2 000 VA.

12.5. ----- P = 4 kW; Q = 4 kAr; S = $4\sqrt{2}$ kVA.

12.6. ----- P = 500 W; Q = $500\sqrt{3}$ Var; S = 1 000 VA.

12.7. ----- Analitički izrazi za napone, struje i snage glase:
$u_1 = 100 \sin \omega t$; $u_2 = 100 \sin (\omega t - \pi/2) = -100 \cos \omega t$;
$i_1 = 5 \sin (\omega t - \pi/6)$; $i_2 = 5 \sin (\omega t - \pi/2) = -5 \cos \omega t$ i
$p_1 = u_1 i_1 = 500 \sin \omega t \sin (\omega t - \pi/6)$; $p_2 = u_2 i_2 = 500 (\cos \omega t)^2$; $p = p_1 + p_2$.
Predstavljajući ove veličine grafički (vremenski) dobije se grafik koji je prikazan na slici



12.8. ----- $\underline{U}_1 = 200$ V; $\underline{U}_2 = -j200$ V; $\underline{I}_2 = (-3{,}2 - j2{,}4)$; $P_1 = 800$ W; $Q_1 = 0$; $\underline{S}_1 = P_1 = 800$ VA ;
$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* = -j200 \cdot (-3{,}2 + j2{,}4) = (480 + j620)$; $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (1280 + j620)$ VA $\Rightarrow$
P = 1 280 W; Q = 620 VAr; S = 1422,25 VA.

12.9. ----- $U_f = 62{,}5$ V.

12.10. ----- $\underline{U}_2 = -j10$ V; $u_2 = 10\sqrt{2} \cos \omega t$ V; $\underline{I}_1 = j5$ A; $\underline{I}_2 = -5$ A. Na osnovu efektivnih vrednosti napona i struja i početnih uglova čitaocu nije problem da sam nacrta fazorski dijagram napona i struja.

12.11. ----- Međufazni (linijski) napon iznosi $U_{12} = U_f \sqrt{2} = 250$ [V]. Za $\cos \varphi = 0{,}6 \Rightarrow \sin \varphi = 0{,}8$.
Kako je $\sin \varphi = Q/S \Rightarrow S = Q/\sin \varphi = 2\,000/0{,}8 = 2\,500$ [VA]; $P = S \cdot \cos \varphi = 2\,500 \cdot 0{,}6 = 1\,500$ [W].
Struja koja protiče impedansom Z iznosi

$$I = S/U_{12} = 2\,500/250 = 10 \text{ [A]},$$

a impedansa

$$Z = U/I = 250/10 = 25 [\Omega]. \; C = 25{,}5 \; \mu F.$$

Aktivnu i reaktivnu otpornost odredimo iz aktivne i reaktivne snage gde je:
$P = I^2 R \Rightarrow R = P/I^2 = 1\,500/100 = 15 [\Omega]$;
$Q = I^2 X \Rightarrow X = Q/I^2 = 2\,000/100 = 20 [\Omega]$.
Paralelnim priključenjem kondenzatora na impedansu Z (RL karaktera) na kondenzatoru se javlja reaktivna snaga Q_C. Pošto je ukupna reaktivna snaga sada jednaka:
$Q_\Sigma = Q + Q_C \Rightarrow 1\,500 = 2\,000 + Q_C \Rightarrow Q_C = -500$ [VAr] $\Rightarrow |Q_C| = 500$ [VAr].
Iz izraza za reaktivnu snagu na kondenzatoru ($Q_C = I_C^2 \cdot X_C$) $\Rightarrow$

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C{}^2} X_c = \frac{U^2}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{U^2}{Q_C} = \frac{250^2}{500} = 125 [\Omega]$$

Kapacitet kondenzatora iznosi:

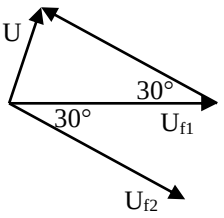
$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \quad 125} = 25{,}48 \text{ [}\mu\text{F]}.$$

12.12. ----- Za dvofazni sistem fazni pomak između faznih napona je 90° (fazori pod 90°), pa je međufazni napon $U = U_f\sqrt{2}$. Dakle odnos između međufaznog i faznog napona je $U/U_f = \sqrt{2}$;

Za trofazni sistem fazni pomak između faznih napona iznosi 120°, pa je njihova fazorska razlika jednaka međufaznom naponu koji je za $\sqrt{3}$ puta veći od faznog napona. Dakle, za $n=3 \Rightarrow U/U_f = \sqrt{3}$, gde je n broj faza.

Za n = 6 (šestofazni sistem), fazni pomak između faznih napona je 60°, pa je međufazni napon jednak faznom, jer fazorska razlika faznih napona daje fazor čiji je vektor jednak faznim naponima (jednakostranični trougao) . Kod šestofaznog sistema $U/U_f = 1$.

Za n = 12 , fazni pomak između faznih napona iznosi 30°, kao na slici



Ako fazne napone predstavimo kompleksno, sledi:
$\underline{U}_{f1} = U_f \cdot e^{j0} = U_f$ i
$\underline{U}_{f2} = U_f \cdot e^{-j30}$.
Međufazni napon je jednak fazorskoj razlici faznih napona, tj.
$\underline{U} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_{f2}$.
Umesto kompleksnog računa , međufazni napon možemo jednostavnije izračunati koristeći kosinusnu teoremu na jednakokraki trougao, gde je:

$U^2 = U_{f1}^2 + U_{f2}^2 - 2U_{f1}U_{f2}\cos 30° = 2U_{f1}^2[1 - \cos 30°] \Rightarrow$

$U^2 = 2U_{f1}^2 (1 - \sqrt{3}/2) \Rightarrow U^2/U_{f1}^2 = 2(1 - \sqrt{3}/2) \Rightarrow$

$$U/U_f = \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{0{,}27} = 0{,}52.$$

Dakle, odnos između međufaznog i faznog napona kod dvanaestofaznog sistema iznosi $U/U_f = 0{,}52$.

Za $n = 18 \Rightarrow \alpha = 360/18 = 20°$. Na isti način kao i kod dvanaestofaznog sistema odredimo međufazni napon. Koristeći kosinusnu teoremu, sledi:

$U^2 = U_{f1}^2 + U_{f2}^2 - 2U_{f1}U_{f2}\cos\alpha = 2U_f^2 (1 - \cos 20°) = 0{,}121U_f^2 \Rightarrow U^2/U_f^2 = 0{,}121 \Rightarrow U/U_f = 0{,}347$.

Na sličan način se određuje i odnos kod svih ostalih sistema.

12.13. ----- $U_f = 150$ V; $U = 150\sqrt{3}$ V.

12.14. ----- $$U_f = \frac{U}{\sqrt{3}} = 130\sqrt{3}[V] \; ; \; I_f = I = \frac{U_f}{Z} = \frac{130\sqrt{3}}{\sqrt{5^2+15^2}} = \frac{130\sqrt{3}}{\sqrt{250}} = \frac{130\sqrt{3}}{5\sqrt{10}} = \frac{130\sqrt{30}}{5 \quad 10} = 2{,}6\sqrt{30}[A].$$

12.15. ----- $$I = I_f\sqrt{3} = 50\sqrt{3}[A]; S = \sqrt{3}UI = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 50\sqrt{3} = 57[kVA];$$
$P = S\cos\varphi = 57\cdot 0{,}8 = 45{,}6$ [kW]; $Q = S\sin\varphi = 57\cdot 0{,}6 = 34{,}2$ [kVAr];

12.16. ----- $S = 3\cdot U_f \cdot I_f = 3\cdot 400\cdot 15 = 18$ [kVA] ; $P^2 = S^2 - Q^2 \Rightarrow$ P = 16,1 kW;

12.17. ----- $\varphi = 45° \Rightarrow X = R$, $Z = R\sqrt{2}$;

$$\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}; \; S = \sqrt{3}UI = \sqrt{3}\cdot 200\sqrt{3}\cdot 15 = 9[kVA]; \; P = S\cos\varphi = 9\frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}5\sqrt{2}[kW].$$

12.18. ----- $W = P\cdot t = \sqrt{3}UI\cos\varphi\cdot t \Rightarrow 450\,000 = 1{,}73\cdot 380\cdot 85\cdot 0{,}83\cdot t \Rightarrow t = 9{,}66$ h

12.19. ----- $X_C = 1/\omega C = 1/314\cdot 200\cdot 10^{-6} = 15{,}8\ \Omega$;

Struja kondenzatora, kada je on vezan na međufazni napon U_{AB} iznosi:

$$I_{CAB} = \frac{U_{AB}}{X_C} = \frac{\sqrt{3}U_{BO}}{X_C} = I_{CBO} + 15 = \frac{U_{BO}}{X_C} + 15 \Rightarrow U_{BO}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{X_C} - \frac{1}{X_C}\right) = 15 \Rightarrow U_{BO}\,\frac{0{,}73}{X_C} = 15 \Rightarrow$$

$$U_{BO} = \frac{15\cdot X_C}{0{,}73} = \frac{15\cdot 15{,}8}{0{,}73} = 324{,}7[V] \Rightarrow U_{AB} = \sqrt{3}\cdot 324{,}7 = 562[V].$$

Gde je U_{AB} međufazni (linijski) napon, a U_{BO} napon faze B (napon između faze B i nule).

12.20. ----- Korisna snaga motora je P, a ukupna snaga koju motor prima, tj. mreža daje je P_m, pa je stepen korisnosti $\eta = P/P_m$.

Dalje sledi:

$$\eta = \frac{P}{P_m} \Rightarrow P_m = \frac{P}{\eta} = \frac{100}{0,91} = 109,89\,[\text{kW}].$$

$$P_m = \sqrt{3}UI\cos\varphi \Rightarrow I = \frac{P_m}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \frac{109,89\cdot 10^3}{\sqrt{3}\cdot 5\cdot 10^3\cdot 0,8} = 15,88\,[\text{A}]$$

12.21. Pre uključenja kondenzatora prividna i reaktivna snaga mreže je iznosila ($\cos\varphi = P/S$):

$S = P/\cos\varphi = 500 / 0,6 = 833,33$ [kVA]; $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 666,67\,[\text{kVAr}]$. Struja mreže je iznosila ($S = \sqrt{3}UI$):

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}U} = \frac{833,33\cdot 10^3}{\sqrt{3}\cdot 380} = 1267,62\,[\text{A}].$$

Uključenjem kondenzatora na njima se javlja reaktivna snaga (kapacitivna), koja će sa reaktivnom snagom pogona predstavljati ukupnu reaktivnu snagu sistema (mreže). Treba imati u vidu da su ove dve reaktivne snage suprotnih predznaka, pa se one oduzimaju (kod pogona je induktivno opterećenje, a kod kondenzatora kapacitivno). Aktivna snaga sistema ostaje nepromenjena, jer kondenzatori ne utiču na aktivnu snagu (pri povećanju faktora snage kod prijemnika se ne menja ni napon ni struja, a samim tim na njemu ostaje ista snaga). Kako je aktivna snaga pogona pri uključenju kondenzatora $P = 500$ kW uz faktor snage $\cos\varphi = 0,8$ prividna snaga sistema (mreže) je:

$$S_1 = P / \cos\varphi_1 = 500 / 0,8 = 625\ [\text{kVA}].$$

Ukupna reaktivna snaga sistema je: $Q_1 = \sqrt{S_1^{\,2} - P^2} = 375\,[\text{kVAr}]$.

Iz izraza za ukupnu reaktivnu snagu sistema odredimo i linijsku struju nakon uključenja kondenzatora, gde je:

$Q_1 = \sqrt{3}\,UI_1\sin\varphi_1 \Rightarrow 375\cdot 10^3 = 1,73\cdot 380\cdot I_1\cdot\sin 36,87° = 394,44\cdot I_1 \Rightarrow I_1 = 950,7$ [A].

Kako je $Q_1 = Q + (-Q_C) \Rightarrow Q_C = Q - Q_1 = 666,67 - 375 = 291,67$ [kVAr].

Dakle, reaktivna snaga na kondenzatorskoj bateriji je $Q_C = 291,67$ kVAr.

Koristeći izraz za reaktivnu snagu na kondenzatorima izračunamo pojedinačni kapacitet kondenzatora, jer je :

$$Q_C = 3\cdot I_C^{\,2}\cdot X_C = 3\left(\frac{U_C}{X_C}\right)^2\cdot X_C = \frac{3U_C^{\,2}}{X_C} = \frac{3U_C^{\,2}}{\frac{1}{\omega C}} = 3\omega C U_C^{\,2} = 3\omega C\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2 = \omega C U^2 \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{291,67\cdot 10^3}{314\cdot 500^2} = 3,716\cdot 10^{-3}\,[\text{F}] = 3,716\,[\text{mF}] = 3716\,[\mu\text{F}].$$

12.22. ----- Struje po fazama, koje su ujedno i linijske struje iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_m} = \frac{5200}{0,4 + j0,5 + 15,6 + j11,5} = \frac{5200}{16 + j12} = (208 - j156) \Rightarrow I_1 = I_2 = I_3 = I = I_f = 260\,[\text{A}].$$

Napon na stezaljkama generatora je ujedno i napon na motoru (zanemarljivi padovi napona na linijskim vodovima), pa je:

$$U_f' = U_m = I\cdot Z_m = 260\cdot\sqrt{15,6^2 + 11,5^2} = 5038,97\,[\text{V}].$$

Faktor snage mreže odredimo iz ukupne impedanse ($Z = Z_g + Z_m = 16 + j12$), pa je:

$$\cos\varphi = \frac{12}{16} = 0,8 \Rightarrow \varphi = 36,87°.$$

Aktivna snaga motora je:

$$P = 3I^2R_m = 3\cdot 260^2\cdot 15,6 = 3\,163,68\ [\text{kW}].$$

Snaga gubitaka u generatoru je:

$$P_g = 3\cdot I^2\cdot R_g = 3\cdot 260^2\cdot 0,4 = 81\,120\ [\text{W}] = 81,12\ [\text{kW}].$$

12.23. ----- Kako je opterećenje simetrično, a motor je vezan u zvezdu, linijske i fazne struje su jednake. Struju odredimo iz aktivne snage sistema ($P = \sqrt{3}U_m I\cos\varphi$), i ona iznosi: $I = I_m$ 16,06 [A].

Džulovi gubici (aktivna snaga) na vodovima iznosi:

$$P_V = 3\cdot I^2\cdot R_V = 3\cdot 16{,}06^2\cdot 2 = 1\,547{,}54\ [W].$$

Generator daje ukupnu aktivnu snagu koja iznosi:

$$P_g = P + P_2 = 25\,000 + 1\,547{,}54 = 26\,547{,}54\ [W].$$

Snaga, koju daje generator, iznosi:

$$P_g = \sqrt{3}U_g I\cos\varphi.$$

Da bi odredili ukupni faktor snage mreže potrebno je poznavati ukupnu impedansu (motora i vodova). Aktivnu otpornost motora odredimo iz aktivne snage ($P = 3\cdot I^2 R_m$), pa je $R_m = P/3I^2 = 32{,}31\ [\Omega]$, Iz faktora snage motora odredimo i reaktivnu otpornost (φ_m = arc cos 0,75 = 41,41°), jer je: $\operatorname{tg}\varphi_m = X_m/R_m$. Reaktivna otpornost (induktivna) motora iznosi: $X_m = R_m\cdot\operatorname{tg}\varphi_m = 28{,}49\ [\Omega]$.

Ukupna impedansa sistema je (po fazi):

$$\underline{Z} = \underline{Z}_V + \underline{Z}_m = 2 + j4 + 32{,}31 + j28{,}49 = (\,34{,}31 + j32{,}49\,)\ [\Omega] \Rightarrow Z_u = 47{,}25.$$

Ukupni faktor snage mreže je:

$$\text{coc}\,\varphi = R_u / Z_u = 34{,}31 / 47{,}25 = 0{,}726.$$

Linijski napon generatora jednak je:

$$U_g = \frac{P_g}{\sqrt{3}I\cos\varphi} = \frac{26547{,}54}{\sqrt{3}\cdot 16{,}06\cdot 0{,}726} = 1316{,}12\,[V]$$

Stepen iskorišćenja je:

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{25000}{26547{,}54} = 0{,}9417 = 94{,}17\%.$$

12.24. -----

Prividna snaga motora je:

prvog $S_1 = P_1/\cos\varphi_1 = 16{,}667$ kVA, i drugog $S_2 = P_2/\cos\varphi_2 = 11{,}25$ kVA.

Reaktivne snage motora su:

prvog $Q_1 = S_1\sin\varphi_1 = 16{,}667\cdot 0{,}8 = 13{,}3336$ kVAr, a drugog $Q_2 = S_2\sin\varphi_2 = 11{,}25\cdot 0{,}6 = 6{,}75$ kVAr (kap).

Prividne snage motora u kompleksnom obliku iznose:

$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = (\,10 + j13{,}3336\,)$ kVA i $\underline{S}_2 = P_2 - jQ_2 = (\,9 - j6{,}75\,)$ kVA.

Ukupna prividna snaga mreže je:

$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (\,19 + j6{,}5836\,)$ kVA $\Rightarrow S = 20{,}1$ kVA.

Faktor snage mreže je: $\cos\varphi = P_m / S = 19 / 20{,}1 = 0{,}945$.

Struja mreže je ($S = \sqrt{3}UI$) :

$$I = S / 1{,}73\cdot U = 11{,}62\ [A]$$

Struje motora su:

$I_1 = S_1 / 1{,}73\cdot U = 16667 / 1{,}73\cdot 1000 = 9{,}63$ A; $I_2 = S_2 / 1{,}73\cdot U = 11250 / 1{,}73\cdot 1000 = 6{,}5$ A.

12.25. ----- $\underline{U} - \underline{E}_A - \underline{E}_C - \underline{E}_B = 0 \Rightarrow \underline{U} = \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0 \Rightarrow U = 0$, jer su vektori E_A, E_B i E_C istog intezitata a sa faznim pomakom od $2\pi/3$ (vektorski zbir jednak nulu).

12.26. ----- $I_2 = I_1/\sqrt{3} = 20$ A;

12.27. ----- $I_f = U/Z = 100/10 = 10$ A; $I = I_f\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ A;

12.28. ----- $I_f = I/\sqrt{3} = 10$ A $= U/Z \Rightarrow U = U_f = I_f\cdot Z = 10\cdot 10 = 100$ V;

12.29. ----- 22 A;

12.30. ----- $I_\nabla = I_{f\nabla}\cdot\sqrt{3} = \frac{U_{f\nabla}}{Z}\sqrt{3} = \frac{U_\nabla}{Z}\sqrt{3} = \frac{U_{f\nabla}\sqrt{3}}{Z}\cdot\sqrt{3} = 3\frac{U_{fY}}{Z} = 3I_Y$ ($I_\Delta = 3I_Y$); poveća se 3 puta;

12.31. ----- poveća se tri puta;

12.32. ----- $I_1/I_2 = 3$; **12.33.** ----- 5 Ω;

12.34. ----- Ako vezu otpora iz trougla pretvorimo u zvezdu, impedanse nove zvezde iznose:
$Z' = Z_1 \cdot Z_2 / (Z_1 + Z_2 + Z_3) = Z^2 / 3Z = Z/3$. Kako su pojedinačne faze obeju zvezda priključene na isti napon, one su u paralelnoj vezi. Sledi da je ekvivalentna impedansa cele veze (nove zvezde) jednaka:
$Z_e = Z \cdot Z' / (Z + Z') = (Z \cdot Z/3) / (Z + Z/3) = (Z^2/3) / (4Z/3) = 3Z^2 / 12Z = Z/4$.

Fazni napon kod novonastale zvezde je $U_{fe} = U/\sqrt{3}$, a fazna struja, koja je ujedno i linijska struja iznosi:

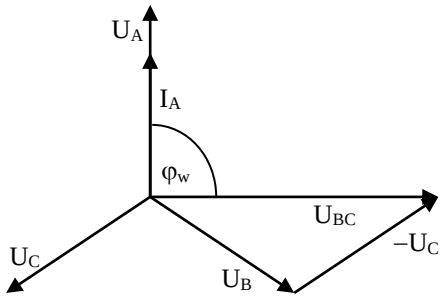
$I = U_{fe}/Z_e = (U/\sqrt{3}) / Z/4 = 4U/\sqrt{3}\,Z \;\Rightarrow\; I = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) \cdot \frac{U}{Z}$;

12.35. ----- Pretvaranjem veze kondenzatora iz trougla u vezu u zvezdu dobiju se kapacitivni otpori $X_C' = X_C/3 = 20\ \Omega$. Kako su ovi otpori redno vezani sa induktivnim otporima, impedansa po fazi iznosi:
$\underline{Z} = jX_L - jX_C' = -j10\ \Omega \;\Rightarrow\; Z = 10\ \Omega$.
Fazni napon generatora (mreže) je: $U_f = U/\sqrt{3} = 220/\sqrt{3} = 127{,}2$ V.
Fazna, odnosno linijska struja sistema je: $I_f = I = U_f/Z = 127{,}2/10 = 12{,}72$ A.

12.36. ----- Trouglasta veza induktivnih otpora pretvorena u zvezdastu vezi ima otpore $X_L' = X_L/3 = 30\ \Omega$.
Ukupna impedansa po fazi je: $\underline{Z} = j10 + j30 = j40\ \Omega \;\Rightarrow\; Z = 40\ \Omega$.
Ampermetar će meriti: $I = I_f = U_f / Z = 220/40 = 5{,}5$ A;

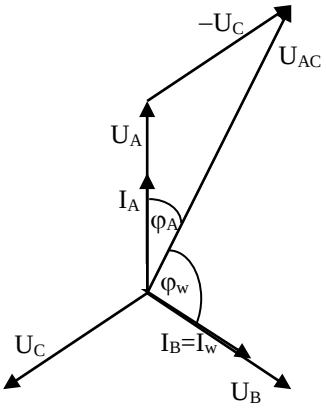
12.37. ----- Fazni napon je $U_f = U = 127$ V, a fazna struja $I_f = I/\sqrt{3} = 4$ A.
Prividna snaga po fazi je: $S = U_f \cdot I_f = 508$ VA.
Kako i vatmetar meri snagu $P = 508$ W sledi da je potrošač savršeno termogen ($\cos\varphi = P/S = 1 \;\Rightarrow \varphi = 0$).
Odgovor je pod 1) **savršeno termogen (aktivan)** potrošač

12.38. -----



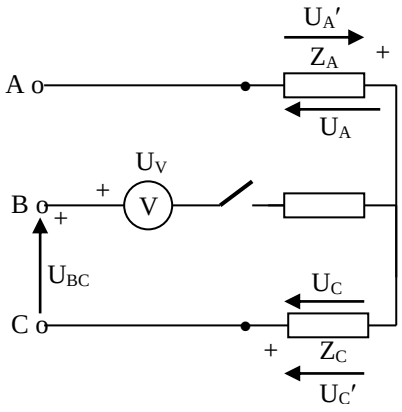
Na merenje vatmetra utiče njegov napon U_W , struja I_W i fazni pomak između napona i struje vatmetra φ_w .
Vatmetar pokazuje (meri) aktivnu snagu, koja iznosi:
$P = U_W I_W \cos\varphi_w$.
Kako je napon na vatmetru jednak međufaznom naponu U_{BC} ($U_W = U_{BC}$) a struja je jednaka linijskoj struji I_A, sledi da su napon vatmetra U_{BC} i struja vatmetra I_A fazno pomereni za 90°, tj. $\cos\varphi_w = 0$. To će se dogoditi kada je I_A u fazi sa U_A, odnosno kada je potrošač savršeno termogen.
Odgovor je pod 1) **savršeno termogen potrošač**.

12.39. -----



Vatmetar je priključen na međufazni napon U_{AC} ($\underline{U}_{AC} = \underline{U}_A - \underline{U}_C$). Pošto je potrošač savršeno aktivan, fazne struje i fazni naponi su u fazi.Fazna struja vatmetra je I_B i ona je u fazi sa naponom U_B.
Fazne i linijske struje su jednake i iznose 3 A.
Dakle, $U_w = U_{AC}$, a $I_w = I_B$.
Iz fazorskog dijagrama je očito da je fazni pomak između napona vatmetra i struje vatmetra $\varphi_w = 90°$.
Vatmetar meri aktivnu snagu, koja na njemu deluje, i ona je jednaka:
$P_w = U_w I_w \cos\varphi_w = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos\varphi_w \;\Rightarrow$
$P = 380 \cdot 3 \cdot 0 = 0$ W.
Odgovor je **nula.**

12.40. -----



Idealni voltmetar ($R_V = \infty$), prekida fazu B, pa u njoj nema struje I_B. Usled toga druge dve impedanse Z_A i Z_C su redno vezane i na njima vlada linijski napon U, koji sada predstavlja jednofazni sistem. Na impedansama Z_A i Z_C deluje napon $\underline{U}_A' = \underline{U}_C' = \underline{U}_{CA} / 2 = (\underline{U}_C - \underline{U}_A) / 2$.

Prema drugom Kirhofovom zakonu, sledi:

$\underline{U}_{BC} - \underline{U}_V + \underline{U}_C' = 0 \Rightarrow \underline{U}_V = \underline{U}_{BC} + \underline{U}_C' = \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}/2$.

Ako postavimo međufazni napon U_{BC} u faznu osu, sledi: $\underline{U}_{BC} = U \cdot e^{j0}$, tada će međufazni napon U_{CA} kasniti za $2\pi/3$ u odnosu na U_{BC}, te je $\underline{U}_{CA} = U \cdot e^{-j120°}$.

Dakle, napon koji pokazuje voltmetar iznosi:

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{BC} + \underline{U}_C' = U \cdot (\cos 0 + j \sin 0) + \frac{U \cdot [\cos(-120) + j \sin(-120)]}{2} = U + \frac{U \cdot \left(-0{,}5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4}U - j\frac{\sqrt{3}}{4}U \Rightarrow$$

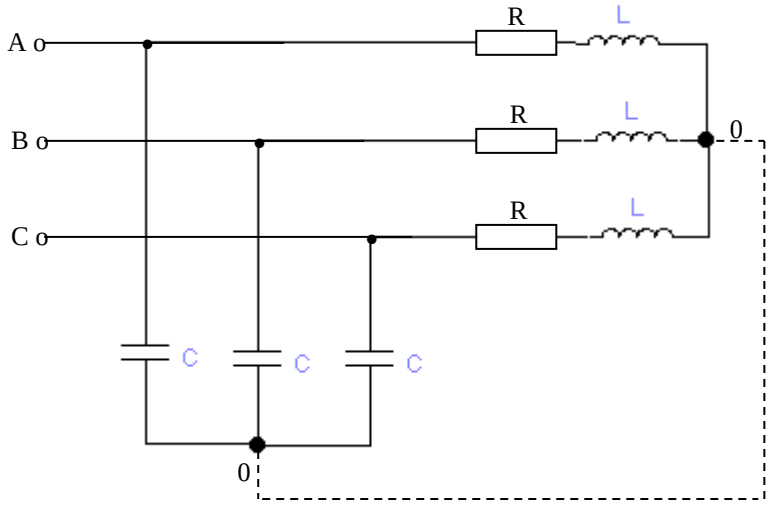
$$U_V = \sqrt{\left(\frac{3}{4}U\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}U\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{16} + \frac{3}{16}\right)U^2} = U\sqrt{\frac{12}{16}} = U\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}U$$

Voltmetar će pokazivati napon, koji iznosi:

$$U_V = \frac{\sqrt{3}}{2}U .$$

12.41. ----- $U_f' = \dfrac{190\sqrt{3}}{3}$ V;

12.42. ----- Ako pretpostavimo da je motor, čiji namotaj ima RL opterećenje, vezan u zvezdu, tada se i kondenzatori kojima se povećava faktor snage vežu u zvezdu, kao što je prikazano na slici.



φ = arc cos 0,8 = 36,87°
φ' = arc cos 0,9 = 25,84°
sin φ = 0,6;
sin φ' = 0,436.

Svaka pojedinačna impedansa motora je paralelno vezana sa jednim kondenzatorom pa su im fazni naponi jednaki. Usled toga, svaka od ivih faza predstavlja jednofazni sistem. Način na koji se povećava faktor snage kod trofaznog sistema je potpuno isti kao i kod jednofaznog sistema.

Iz aktivne snage $P = \sqrt{3}UI\cos\varphi \Rightarrow I = \dfrac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \dfrac{3000}{\sqrt{3}\cdot 220\cdot 0{,}8} = 9{,}87[\mathrm{A}].$

Pošto se vezivanjem kondenzatora aktivna snaga ne menja, a menja se ukupna struja I′ (smanjuje se), tada iz izraza za aktivnu snagu, nakon priključenja kondenzatora izračunamo struju I′, koja je jednaka:

$$P = \sqrt{3}UI'\cos\varphi' \Rightarrow I' = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi'} = \frac{3000}{\sqrt{3}\cdot 220\cdot 0{,}9} = 8{,}77[\mathrm{A}].$$

Kako je (vidi popravak faktora snage, str.68.)

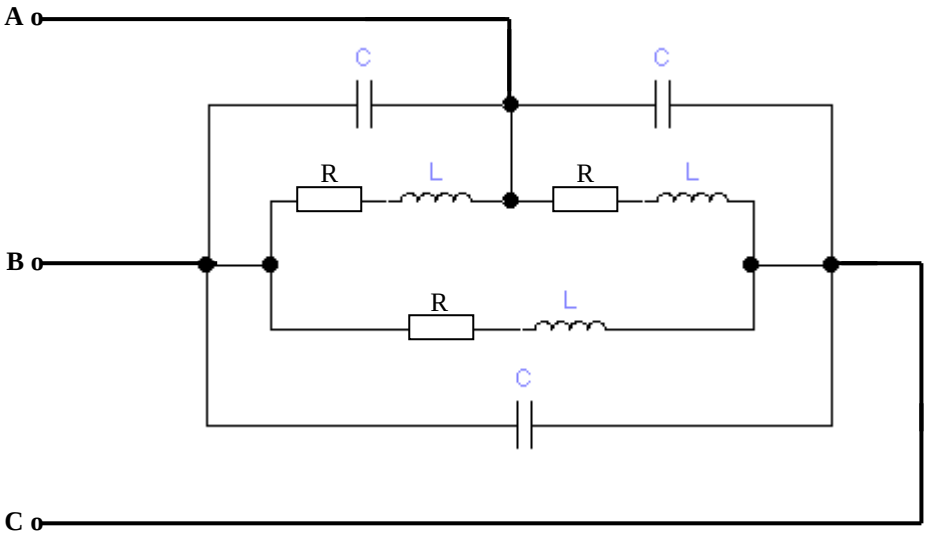
$$C = \frac{I\sin\varphi - I'\sin\varphi'}{\omega U} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{9{,}87\cdot 0{,}6 - 8{,}77\cdot 0{,}436}{314\cdot\dfrac{220}{\sqrt{3}}} = 52{,}57\cdot 10^{-6}[\mathrm{F}] = 52{,}57[\mu\mathrm{F}].$$

Ako je motor spojen u trougao, tada se i kondenzatori vežu u trougao, kako bi im fazni naponi bili jednaki. U ovom slučaju kapacitet kondenzatora odredimo jednostavnim pretvaranjem veze kondenzatora iz zvezde u vezu kondenzatora u trougao. Kapacitet je kod veze u trougao jednak:

$$C = C/3 = 17{,}52\ \mu\mathrm{F}.$$

Čitaocu se preporučuje da ovaj zadatak reši sa vezom namotaja motora u trougao.

12.43. ----- a) Veza motora u trougao (RL namotaja) prikazana je prema slici. Da bi se datom motoru povećao faktor snage, paralelno Rl impedansama (motoru) spojimo kondenzatore kapaciteta C. To znači da su i kondenzatori vezani na isti način kao i motor (u trougao). Kako su ovde međufazni i fazni namotaji jednaki, sledi da je na svim impedansama isti napon, koji je jednak naponu mreže (linijski napon). Na taj način popravak faktora snage tretiramo na isti način kao kod jednofaznog sistema.



Kako je aktivna snaga sistema (motora) ista i pre i posle uključenja kondenzatora, tj. $P = \sqrt{3}UI\cos\varphi$, sledi:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \frac{36000}{\sqrt{3}\cdot 380\cdot 0{,}84} = 64{,}94[\mathrm{A}].$$

Fazna struja motora je: $I_f = I/\sqrt{3} = 37{,}53$ A.

Aktivnu otpornost namotaja motora odredimo iz izraza za aktivnu snagu: $P = 3I_f^2R$, pa je:

$$R = \frac{P}{3I_f^{\,2}} = \frac{36000}{3\cdot 37{,}53^2} = 8{,}52[\Omega].$$

Iz $\cos\varphi = 0{,}84 \Rightarrow \varphi = 32{,}86° \Rightarrow \sin\varphi = 0{,}543 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}646$, odredimo i reaktivnu otpornost namotaja:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = X/R \Rightarrow X = R\cdot\mathrm{tg}\,\varphi = 5{,}5\ [\Omega].$$

Impedansa namotaja motora iznosi:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 10{,}14[\Omega].$$

Da bi faktor snage po fazama bio maksimalan, struja kondenzatora treba da se poništi sa reaktivnom komponentom fazne struje namotaja motora, tj.

$$I_C = I_f\cdot\cos\varphi \Rightarrow U\cdot\omega C = I_f\sin\varphi \Rightarrow$$

$$C = \frac{I_f \cdot \sin\varphi}{\omega \cdot U} = \frac{37{,}53 \cdot 0{,}543}{314 \cdot 380} = 170{,}79 \cdot 10^{-6}\,[\mathrm{F}] = 170{,}79\,[\mu\mathrm{F}].$$

b) Ako je motor vezan u zvezdu i kondenzatori se vežu u zvezdu. Linijska i fazna struja je jednaka i ona iznosi:

$$I_f' = I' = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \frac{36000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}84} = 64{,}94\,[\mathrm{A}].$$

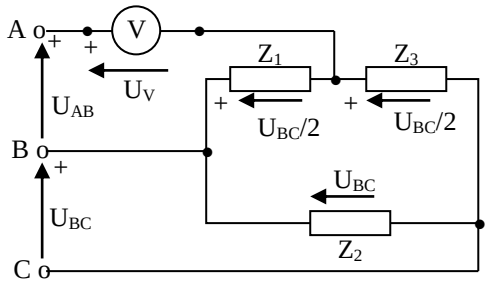
Fazni napon je: $U_f' = U/\sqrt{3} = 220$ [V].

Kapacitet kondenzatora odredimo pomoću predhodne relacije:

$$C' = \frac{I' \cdot \sin\varphi}{\omega \cdot U_f'} = \frac{64{,}94 \cdot 0{,}543}{314 \cdot 220} = 510{,}46 \cdot 10^{-6}\,[\mathrm{F}] = 510{,}46\,[\mu\mathrm{F}].$$

Čitaocu se preporučuje da zadatak reši prostim pretvaranjem veze kondenzatora iz trougla u zvezdu.
(Da li je kapacitet kod veze u zvezdu veći za tri puta od veze u trougao, kod simetričnog sistema : $C' = 3 \cdot C$).

12.44. -----



Vezivanjem idealnog voltmetra na linijski provodnik A, prema slici, ova linija se ponaša kao da je u prekidu ($I_A = 0$). Usled toga su impedanse Z_1 i Z_3 redno vezane i priključene su na međufazni napon U_{BC}. Impedansa Z_2 je paralelno vezana sa Z_1 i Z_3, a samim tim sve tri impedanse su vezane na međufazni napon U_{BC}. Na taj način je trofazni prijemnik postao monofazni, čiji je napon jednak U.

Pošto su impedanse međusobno jednake, na impedansama Z_1 i Z_3 deluje napon $U_{BC}/2$.

Koristeći drugi Kirhofov zakon sledi jednačina:

$$\underline{U}_{AB} - \underline{U}_V + \underline{U}_{BC}/2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_V = \underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC}/2.$$

Ako međufazni napon U_{AB} postavimo u faznu osu, sledi kompleksni izraz za međufazne napone:

$\underline{U}_{AB} = U \cdot e^{j0} = 330 \cdot e^{j0} = 380 \cdot (\cos 0 + j\sin 0) = 380$ [V];

$\underline{U}_{BC} = U \cdot e^{-j120} = U \cdot [\cos(-120) + j\sin(-120)] = 380 \cdot (-0{,}5 - j\sqrt{3}/2) = (-190 - j190\sqrt{3})$ [V] $\Rightarrow$

$\underline{U}_{BC}/2 = (-95 - j95\sqrt{3})$ [V] $\Rightarrow$ $\underline{U}_{BC}/2 = (-U/4 - jU\sqrt{3}/4)$.

Napon na voltmetru, u kompleksnom obliku iznosi:

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC}/2 = 380 - 95 - j95\sqrt{3} = (285 - j95\sqrt{3})\ [\mathrm{V}].$$

Efektivna vrednost napona, koju meri voltmetar jednaka je:

$$U_V = \sqrt{285^2 + \left(95\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{285^2 + 95^2 \cdot 3} = \sqrt{(3 \cdot 95)^2 + 95^2 \cdot 3} = \sqrt{95^2 \cdot (3^2 + 3)} = 95\sqrt{12} = 95 \cdot \sqrt{3 \cdot 4} = 190\sqrt{3}\,[\mathrm{V}].$$

12.45. ----- Fazna struja je $I_f = U/Z = 120/\sqrt{6^2 + 9^2} = 11{,}09$ A.

Linijska struja je: $I = I_f\sqrt{3} = 19{,}19$ A.

Ako impedanse iz trougla transformišemo u zvezdu, dobiju se impedanse, koje su jednake:

$$\underline{Z}_y = \underline{Z}/3 = (2 + j3)\ [\Omega],$$

Ekvivalentna impedansa po fazama je:

$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}' = \underline{Z}_v + \underline{Z}_y = (1 + j2) + (2 + j3) = (3 + j5)$ [Ω] $\Rightarrow$ $Z' = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5{,}83$ [Ω].

Fazni napon na početku linije je: $U_f = I \cdot Z' = 19{,}19 \cdot 5{,}83 = 111{,}88$ [V],

Međufazni napon na početku linije iznosi: $U = U_f\sqrt{3} = 193{,}78$ [V];

12.46. ----- Ukupna impedansa po fazi iznosi: $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} + \underline{Z}_V + \underline{Z}_g = (10,6 + j4,8) [\Omega] \Rightarrow$ $Z = 11,64 [\Omega]$.Kako je $U_f = E$, efektivna vrednost faznih struja iznosi: $I_f = U_f/Z = 18,9$ [A];
Fazni napon na prijemniku je $U_f' = I_f \cdot Z_p = 192,74$ V, a međufazni $U' = \sqrt{3}\, U_f' = 333,44$ [V].
Aktivna snaga trofaznog prijemnika je $P = 3 \cdot I_f^2 R = 3 \cdot 18,9^2 \cdot 10 = 10,716$ kW,
Reaktivna snaga prijemnika $Q = 3I_f^2 X = 3 \cdot 18,9^2 \cdot 2 = 2,143$ kVAr,
Aktivna snaga trofaznog generatora je $P_g = 3 \cdot I_f^2 \cdot R_e = 3 \cdot 18,9^2 \cdot 10,6 = 11,359$ kW
a reaktivna $Q_g = 3 \cdot I_f^2 \cdot X_e = 3 \cdot 18,9^2 \cdot 4,8 = 5,144$ kVAr.

12.47. ----- Zadatak se najlakše rešava transformacijom veze iz trougla u vezu u zvezdu. Prilikom te transformacije napon i struja na linijskim vodovima mora ostati ista (ostaje i snaga trofaznog sistema nepromenjena). Impedanse prijemnika sa vezom u zvezdu iznose:

$$\underline{Z}_z \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}^2}{3\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_z = \underline{Z}_t/3 = (3,33 + j0,67) [\Omega].$$

Ukupna impedansa po fazi iznosi $\underline{Z}_e = \underline{Z}_z + \underline{Z}_V + \underline{Z}_g = (3,93 + j3,47) [\Omega] \Rightarrow Z_e = 5,24 [\Omega]$.
Fazna struja, koja je ujedno jednaka linijskoj je (kod zvezde) $I_f = I = U_f/Z_e = 220/5,24 = 41,98$ [A].
Linijska struja je ista bilo da je prijemnik vezan u zvezdu ili u trougao, jer kod transformacije impedansi ukupna struja mora ostati nepromenjena. Zbog toga će, kod veze prijemnika u trougao njegova fazna struja biti jednaka: $I_f = \frac{I}{\sqrt{3}} = 24,27$ [A].

Aktivna snaga prijemnika je:

$$P = 3 \cdot I_f^2 \cdot R = 3 \cdot 24,27^2 \cdot 10 = 17,671 \text{ kW}$$

a reaktivna:

$$Q = 3 \cdot I_f^2 X = 3 \cdot 24,27^2 \cdot 2 = 3,534 \text{ kVAr}.$$

Aktivna snaga generatora (ukupna snaga sistema) je:

$$P_g = 3 \cdot I^2 \cdot R_e = 3 \cdot 41,98^2 \cdot 3,93 = 20,778 \text{ kW}$$

a reaktivna:

$$Q_g = 3 \cdot I^2 \cdot X_e = 3 \cdot 41,98^2 \cdot 3,47 = 18,355 \text{ kVAr}.$$

12.48. ----- Impedanse iz trougla transformisati u zvezdu. Vrednost tih impedansi u novonastaloj zvezdi su: $.Z_z' = Z_t/3 = (10/3 + j2/3) \Omega$. Kako su sada dva prijemnika spojena u zvezdu, sledi da su njihove impedanse po fazama u paralelnoj vezi. Obe zvezde možemo zamenuti jednom ekvivalentnom zvezdom čija impedansa iznosi:

$$\underline{Z}_{ez} = \frac{\underline{Z}_z \cdot \underline{Z}_z'}{\underline{Z}_z + \underline{Z}_z'} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_{ez} = (2,79 + j0,355) \Omega \Rightarrow Z_{ez} = 2,81 \Omega.$$

Ukupna impedansa sistema je: $\underline{Z}_u = \underline{Z}_{ez} + \underline{Z}_V = (3,79 + j2,355) \Rightarrow Z_u = 4,462 \Omega$.
Kako je napon na namotajima generatora ujedno njegov fazni napon struje po fazama iznose:

$$I = U_f/Z_{ez} = 350/4,462 = 78,44 \text{ A}.$$

Fazni napon na prijemniku koji je vezan u ekvivalentnu zvezdu (obe zvezde) iznosi:

$$U_{fz} = I \cdot Z_{ez} = 78,44 \cdot 2,81 = 220,04 \text{ V}.$$

Međufazni napon ekvivalentne zvezde, koji je ujedno i fazni napon prijemnika vezanog u trougao, odnosno linijski napon prijemnika vezanog u zvezdu, iznosi: $U_p = U_{fz} \cdot \sqrt{3} = 381,3$ V;
Aktivna snaga obaju prijemnika je:

$$P = 3 \cdot I^2 R_{ez} = 3 \cdot 78,44^2 \cdot 2,79 = 51\,499,2 \text{ W},$$

a reaktivna

$$Q = 3 \cdot I^2 X_e = 3 \cdot 78,44^2 \cdot 0,355 = 6\,552,8 \text{ Var}.$$

Gubitak faznog napona od generatora do prijemnika predstavlja pad napona na linijskim provodnicima, i on iznosi:

$$\Delta U = I \cdot Z_v = 78,44 \cdot \sqrt{1^2 + 2^2} = 175,4 \text{ V}.$$

12.49. ----- Aktivna snaga prijemnika vezanog u trougao je:

$$P_t = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi = \sqrt{3}\, U \cdot I \cos\varphi ,$$

a snaga prijemnika vezanog u zvezdu iznosi:

$$P_z = U_f' \cdot I_f' \cdot \cos\varphi' = \sqrt{3}\, U' I' \cos\varphi'.$$

Međufazni napon je napon mreže pa je on isti i za zvezdu i za trougao, tj $U = U'$. Isto tako i faktor snage je isti, $\cos\varphi = \cos\varphi'$, jer se radi o istim impedansama koje se u jednom slučaju vezane u trougao a u drugom u zvezdu.

Linijska struja (struja mreže) kod veze prijemnika u trougao je:

$I = \sqrt{3}\, I_f = \sqrt{3}\, U_f/Z = \sqrt{3}\, U/Z$, jer je kod trougla $U_f = U$.

Linijska struja kod zvezde je ujedno i fazna struja, pa je:

$$I' = I_f' = U_f'/Z = U'/\sqrt{3}\, Z = U/\sqrt{3}\, Z.$$

Odnos između liniskih struja kada je prijemnik vezan, prvo u trougao a zatim u zvezdu iznosi:

$$I/I' = (\sqrt{3}\, U/Z) / (U/\sqrt{3}\, Z) = 3 \;\Rightarrow\; I = 3\, I'.$$

Ovo dokazuje, da se linijska struja kod prijemnika koji je vezan u zvezdu nakon njegovog prespajanja u trougao poveća za tri puta.

Kako se u ovom slučaju menja samo struja, sledi da će i aktivna snaga nakon prespajanja prijemnika da se poveća tri puta, tj.

$$\mathbf{P_t = 3\, P_z},$$

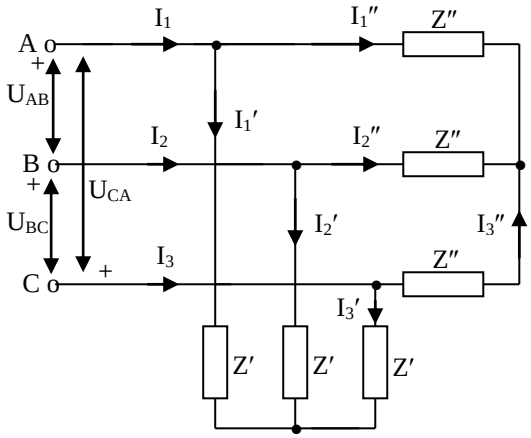
što se lako dokazuje zamenom linijskih struja.

12.50. ----- Da bi linijske struje bile jednake, impedanse zvezde trebaju da su tri puta manje od impedansi trougla. Linijska struja kod zvezde je tri puta manja od linijske struje kod trougla za iste impedanse $I_z = I/3$, što je dokazano u predhodnom zadatku. Rešenj zadatka je:

$$\mathbf{Z_2 = 4\ \Omega.}$$

Čitaocu se preporučuje da to i dokaže (videti rešenje predhodnog zadatka).

12.51. -----



Pojedinačne fazne struje prijemnika, koje su za njih i linijske struje, iznose:

za prvi prijemnik:

$I_1' = I_2' = I_3' = U/Z' = 7{,}33$ A

a za drugi:

$I_1'' = I_2'' = I_3'' = U/Z'' = 220/20 = 11$ A.

Prvi prijemnik je savršeni termogen pa su fazne struje u fazi sa svojim naponima. Kompleksni izrazi tih struja su:

$\underline{I}_1' = 7{,}33$; $\underline{I}_2' = 7{,}33 \cdot e^{-j120} = (-3{,}66 - j6{,}35)$ A; $\underline{I}_3' = 7{,}33 \cdot e^{-j240} = 7{,}33 \cdot e^{j120} = (-3{,}66 + j6{,}35)$ A.

Drugi prijemnik je RL karaktera, što znači da će fazne struje kasniti za faznim naponima za 30°.

Njihov kompleksni izraz je:

$\underline{I}_1'' = 11 \cdot e^{-j30} = (9{,}53 - j5{,}50)$ A; $\underline{I}_2'' = 11 \cdot e^{-j150} = (-9{,}53 - j5{,}50)$ A; $\underline{I}_3'' = 11 \cdot e^{-j270} = 11 \cdot e^{j90} = j11$ A.

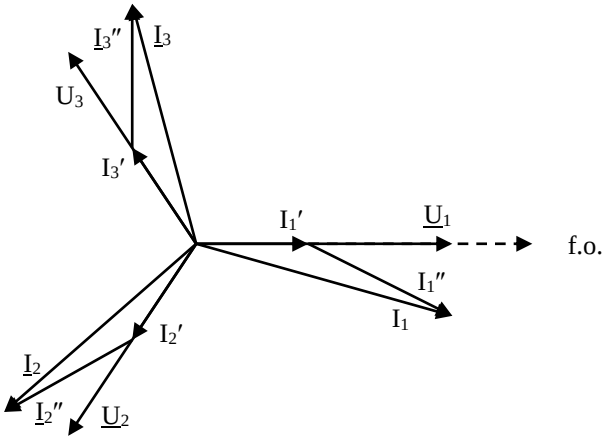
Ukupnu linijsku struju mreže dobijemo kompleksnim sabiranjem pojedinačnih struja prijemnika, pa je:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' = (16{,}86 - j5{,}5) \;\Rightarrow\; \underline{I}_1 = 17{,}7 \cdot e^{-j18{,}1}$ [A];

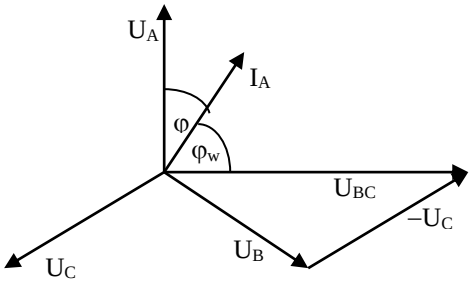
$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2'' = (-13{,}2 - j11{,}85) \;\Rightarrow\; \underline{I}_2 = 17{,}7 \cdot e^{-j138{,}1}$ [A];

$\underline{I}_3 = \underline{I}_3' + \underline{I}_3'' = (-3{,}67 + j17{,}35) \;\Rightarrow\; \underline{I}_3 = 17{,}7 \cdot e^{-j258{,}1}$ [A] $= 17{,}7 \cdot e^{j101{,}9}$ [A].

Na osnovu ovih podataka dobije se fazorski dijagram, koji je prikazan na slici:



12.52. -----



Vatmetar meri aktivnu snagu, koja iznosi:
$P_w = U_w I_w \cos\varphi_w$, gde je
$U_w = U_{BC} = U$... napon na vatmetru (sistem sim.)
$I_w = I_A = I$...struja vatmetra (sim. istem) i
$\varphi_w = 90 - \varphi$ ... fazni pomak između napona vatmetra U_w i struje na vatmetru I_w.
Ako je potrošač savršeno aktivan, sledi:
$\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_w = 90 \Rightarrow P_w = 0$,
Ako je potrošač savršeno reaktivan (ind.)
$\varphi = 90 \Rightarrow \varphi_w = 0 \Rightarrow P_w = P_{max} = Q$, što znači da u ovom slučaju vatmetar meri reaktivnu snagu.

Kako je, kod simetričnog trofaznog sistema $\varphi_w = 90 - \varphi$ (vidi faz. dijagram), pokazivanje vatmetra je:

$$P_w = UI\cos(90 - \varphi) = UI\sin\varphi$$

Množeći snagu koju pokazuje vatmetar sa $\sqrt{3}$ dobije se ukupna reaktivna snaga trofaznog simetričnog sistema, jer je:

$$Q = \sqrt{3}P_w = \sqrt{3}UI\sin\varphi\,[\mathrm{VAr}] \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{3}} = P_w = UI\sin\varphi$$

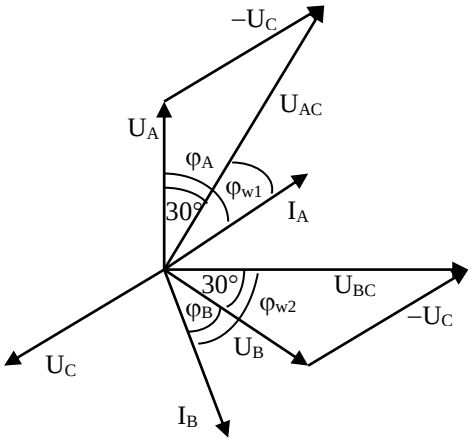
Vatmetar će, prema datoj šemi vezivanja, meriti $\frac{1}{\sqrt{3}}$ reaktivne snage trofaznog simetričnog sistema.

12.53. ----- Da bi zvezdište trofaznog potrošača bilo na nultom potencijalu (sistem bio simetričan) trebaju biti ispunjena sledeća dva uslova:

1) impedanse po fazama jednake ($Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$)
2) fazni pomak između faznih napona i faznih struja jednak ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$).

Oba navedena uslova će biti zadovoljena ako je $r = 20\ \Omega$.

12.54. -----



Kod simetričnog trofaznog sistema je:
$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$; $I_A = I_B = I_C = I$; $U_{AC} = U_{BC} = U$.
U ovom slučaju će vatmetri meriti:
prvi: $P_{w1} = U_{AC} \cdot I_A \cos\varphi_{w1} = UI \cos(\varphi - 30°)$ i
drugi: $P_{w2} = U_{BC} \cdot I_B \cos\varphi_{w2} = UI \cos(\varphi + 30°)$.

Ako saberime snage koje mere vatmetri, sledi:

$$P_{w1} + P_{w2} = UI\cos(\varphi + 30) + UI\cos(\varphi - 30)$$
$$= UI[\cos\varphi\cos 30 - \sin\varphi \sin 30 + \cos\varphi\cos 30 + \sin\varphi \sin 30] \Rightarrow$$
$$P_{w1} + P_{w2} = 2UI\cos 30\cos\varphi = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} UI\cos\varphi \Rightarrow$$
$$P_{w1} + P_{w2} = \sqrt{3}\, UI\cos\varphi$$

Kako izraz $\mathbf{P_{w1} + P_{w2} = \sqrt{3}\, UI\cos\varphi}$ predstavlja aktivnu snagu trofaznog simetričnog sistema, sledi da će vatmetri , vezani prema datoj slici, meriti ukupnu aktivnu snagu trofaznog sistema.

Dakle, sabiranjem snaga koju mere pojedinačni vatmetri dobije se ukupna aktivna snaga trofaznog sistema.

$$P = P_{W1} \pm P_{W2}$$

(predznak + je za ista skretanja kazaljke, a – za suprotna skretanja)

NAPOMENA!

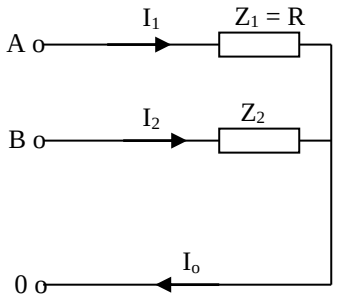
Navedeni vatmetri mogu da mere i ukupnu reaktivnu snagu, koja je jednaka: $Q = \sqrt{3}(P_{W1} \mp P_{W2})$.

Preporučuje se čitaocu da to proveri

12.55. ----- reaktivnu snagu simetričnog trofaznog potrošača: $Q = \sqrt{3}\, P_W$. Vidi rešenje zadatka 12.52.

12.56. ----- $\underline{I}_1 = 20\cdot e^{j0} = 20$; $\underline{I}_2 = 15\cdot e^{-j120} = (-15/2 - j15\sqrt{3}/2)$; $\underline{I}_3 = 10\cdot e^{-j240} = (-5 + j5\sqrt{3}/2)$;
$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (15/2 - j5\sqrt{3}/2) \Rightarrow I_o = 5\sqrt{3}$ [A].

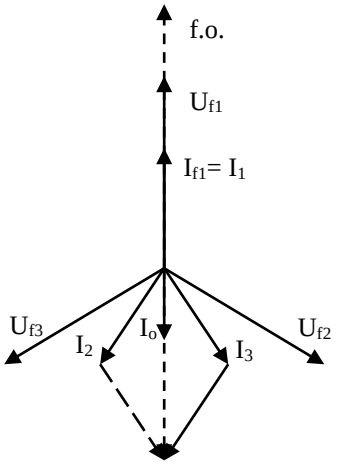
12.57. -----



Fazni naponi su: $U_{f1} = U_{f2} = U/\sqrt{3} = 220$ [V]
Fazne struje iznose:
$\underline{I}_1 = \underline{U}_{f1}/\underline{Z}_1 = 220\cdot e^{j0} / 10\cdot e^{j0} = 22\cdot e^{j0}$ [A];
$\underline{I}_2 = \underline{U}_{f2} / \underline{Z}_2 = 220\cdot e^{-j120}/10\sqrt{2}\, e^{j45} = 11\sqrt{2}\cdot e^{-165°} \Rightarrow$
$\underline{I}_2 = (-10{,}263 + j0{,}737)$ [A].
$\underline{I}_3 = 0$, jer je treći provodnik u prekidu.

Struja nultog voda je:
$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (11{,}737 + j0{,}737) \Rightarrow I_o = 11{,}76$ [A].

12.58. -----



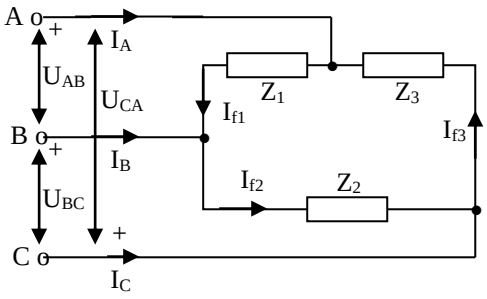
Ako je početni ugao za napon U_{f1} jednak nuli, sledi:
$\underline{U}_{f1} = U_f \cdot e^{j0}$; $\underline{U}_{f2} = U_f \cdot e^{-j120}$; $\underline{U}_{f3} = U_f \cdot e^{j120}$.

Fazne struje, koje su ujedno jednake linijskim, su:
$\underline{I}_1 = \underline{I}_{f1} = \underline{U}_{f1}/\underline{Z}_1 = U_f \cdot e^{j0}/Z \cdot e^{j0} = (U_f/Z) = I_f \cdot e^{j0}$;
$\underline{I}_2 = \underline{I}_{f2} = \underline{U}_{f2}/\underline{Z}_2 = U_f \cdot e^{-j120}/Z \cdot e^{j90} = (U_f/Z) \cdot e^{-j210} = I_f \cdot e^{-j210}$;
$\underline{I}_3 = \underline{I}_{f3} = \underline{U}_{f3}/\underline{Z}_3 = U_f \cdot e^{j120}/Z \cdot e^{-j90} = (U_f/Z) \cdot e^{j210} = I_f \cdot e^{j210}$.

Struja u nultom vodu iznosi:
$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = I_f \cdot e^{j0} + I_f \cdot e^{-j210} + I_f \cdot e^{j210} \Rightarrow$
$4 \cdot (1 - \sqrt{3}) = I_f - \sqrt{3}\, I_f/2 - j0{,}5 I_f - \sqrt{3}\, I_f/2 + j0{,}5 I_f \Rightarrow$
$4 \cdot (1 - \sqrt{3}) = I_f - \sqrt{3}\, I_f = I_f \cdot (1 - \sqrt{3}) \Rightarrow I_o = 4$ [A].

Zadatak se može rešiti i grafički, što se vidi i na fazorskom dijagramu

12.59. -----



Fazni naponi, u kompleksnom obliku, iznose:
$\underline{U}_{f1} = \underline{U}_{AB} = U \cdot e^{j0} = 200 \cdot e^{j0} = 200$ [V],
$\underline{U}_{f2} = \underline{U}_{BC} = U e^{-j120} = 200 \cdot e^{-j120} = (-100 - j100\sqrt{3})$ [V],
$\underline{U}_{f3} = \underline{U}_{CA} = U e^{-j240} = 200 \cdot e^{-j240} = (-100 + j100\sqrt{3})$ [V].

Fazne struje iznose:

$$\underline{I}_{f1} = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} = \frac{200}{8} = 25[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_{f2} = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} = \frac{-100 - j100\sqrt{3}}{10 + j10\sqrt{3}} = -10[\mathrm{A}]$$

$$\underline{I}_{f3} = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{-100 + j100\sqrt{3}}{10 - j10\sqrt{3}} = -10[\mathrm{A}].$$

Koristeći prvi Kirhofov zakon, linijske struje su jednake:
$\underline{I}_A = \underline{I}_{f1} - \underline{I}_{f3} = 25 - (-10) = 35$ [A] ,
$\underline{I}_B = \underline{I}_{f2} - \underline{I}_{f1} = -10 - 25 = -35$ [A] i
$\underline{I}_C = \underline{I}_{f3} - \underline{I}_{f2} = -10 - (-10) = 0$ [A].

12.60. ----- Pregorevanjem osigurača na vodu C druge dve impedanse dolaze na međufazni napon U. Kako je u ovom slučaju došlo do prostog kola, sa jednim izvorom U i dve redno vezane impedanse, sledi da su struje u tim impedansama jednake:

$$I_A = I_B = \frac{U}{Z + Z} = \frac{U}{2Z},$$

sa tim da je jedna od ovih struja suprotnog smera (jedna ide ka početku faze, a druga ka njenom kraju, tj. obe struje čine jednu jedinstvenu struju).
Fazna struja I_C je jednaka nuli.

12.61. ----- Pregorevanjem osigurača na fazi A na međufaznom naponu U_{BC} priključena je paralelna veza Z_{BC} i ($Z_{AB} + Z_{CA}$). Kako se međufazni napon nije promenuo za impedansu Z_{BC}, struja I_{BC} je ostala ista, tj.

$I_{BC} = 12$ A.

Pošto su preostale dve impedanse sada u rednoj vezi i priključene na isti međufazni napon, sledi da je njihova struja sada duplo manja od struje I_{BC} (impedansa duplo veća), pa je:

$I_{AB} = I_{CA} = I_{BC} / 2 = 6$ A.

12.62. ----- Nakon pregorevanja osigurača na vodu C međufazni napon U_{AB} iznosi:
$U_{AB} = U = U_{BC} + U_{CA} \Rightarrow U_V = U_{CA} = U / 2$.
Voltmetar meri duplo manji napon od linijskog, nakon pregorevanja navedenog osigurača, tj: $U_V = U/2$.

12.63. ----- $I_A = 0$, jer je linija A u prekidu. Pošto su druge dve faze ostale na istom faznom naponu (zbog nultog provodnika) te su struje tih faza ostale iste kao i pre prekida linije A. Dakle, $I_B = I_C = I$.

12.64. ----- Pre kratke veze na fazi C međufazni napon između faza B i C je iznosio: $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C$. Nakon kratke veze, fazni napon U_C je jednak nuli ($U_C = 0$), te je fazni napon U_B postao jednak međufaznom napon između tačaka B i C ($U_{BC} = U_B = U$).

Odgovor glasi: Fazni napon U_B, nakon kratke veze faze B, jednak je međufaznom naponu U.

12.65. ----- Prekidom faze B impedanse Z_A i Z_C su u rednoj vezi i priključene su na međufazni napon U. Kompletna veza iz trofaznog sistema postaje jednofazna, pa se napon U u ovom slučaju razdeljuje na dve jednake polovine ($Z_A = Z_C \Rightarrow U_A = U_C$; $U = U_A + U_C$), pa je $U_A = U_C = U/2$.

12.66. ----- Smanjuje se za polovinu. Vidi rešenje predhodnog zadatka

Tačan odgovor je pod tačkom 2)

12.67. -----

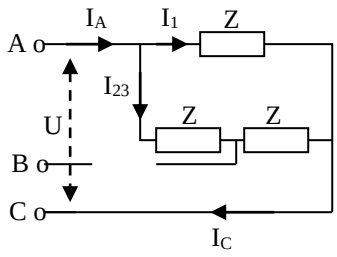
a) $I_B = 0$. Nakon prekida faze B mreža postaje jednofazna u kojoj su dve impedanse redno vezane i priključene na linijski napon U = 380 V. Zbog toga su struje u preostale dve faze međusobno jednake i iznose:

$$I_A = I_B = \frac{U}{Z + Z} = \frac{380}{10} = 38[\text{A}].$$

Ukupna aktivna snaga iznosi: $P = UI\cos\varphi = 380 \cdot 38 \cdot \cos 36{,}87 = 11\,551{,}985$ [W]

b)

Prekidom linijskog provodnika B na impedansama deluje linijski napon U i ceo sistem prelazi u jednofazni, kao na slici.



Pojedinačne impedanse su :

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = 5 \cdot (\cos 36{,}87 + j\sin 36{,}87) = (4 + j3)\ [\Omega]$.

$\underline{Z}_{23} = Z_2 + Z_3 = (8 + j6) \Rightarrow Z_{23} = 10\ [\Omega]$.

Fazne struje u kolu iznose:

$$I_{f1} = I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{380}{\sqrt{4^3 + 3^2}} = \frac{380}{5} = 76[\text{A}]$$

$$I_{f2} = I_{f3} = I_{23} = \frac{U}{Z_{23}} = \frac{380}{10} = 38[\text{A}].$$

Ukupna impedansa kola je:

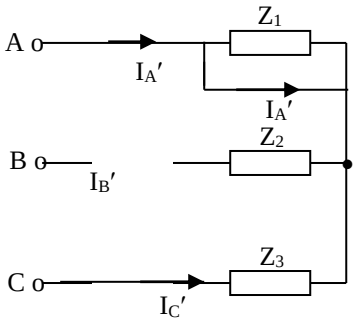
$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}} = \frac{(4 + j3) \cdot (8 + j6)}{4 + j3 + 8 + j6} = (2{,}667 + j2)[\Omega] \Rightarrow Z_e = 3{,}334[\Omega]$$

Ukupna struja kola je u stvari linijska struja I_A i I_C, te one iznose:

$$I_A = I_C = I = \frac{U}{Z_e} = \frac{380}{3{,}334} = 113{,}977[\text{A}],\ I_B = 0\ [\text{A}].$$

Aktivna snaga celog sistema je: $P = I^2 \cdot R_e = 113{,}977^2 \cdot 2{,}667 = 34\,646{,}472$ [W].

12.68. -----



Nakon navedenih kvarova, impedansa Z_3 dolazi na međufazni (linijski) napon $U_{CA} = U$. Kako je došlo da jednofaznog sistema (Z_2 isključena a $Z_1 = 0$) sa naponom U, u sistemu su vrednosti struja jednake:

$$I_A' = I_C' = \frac{U}{Z_3} = \frac{U_f\sqrt{3}}{Z} = \sqrt{3}\frac{U_f}{Z} = \sqrt{3}I_A$$

$I_B' = 0$.

Struje I_A' i I_B' su se nakon nastalog kvara povećale za $\sqrt{3}$ puta, dok je struja I_B' pala na nulu.

12.69. ----- Pre prekida trećeg voda (linija C), struje su bile jednake:

$$I_A = I_B = I_C = I = \frac{U_f}{Z} = \frac{240}{30} = 8[A]$$

Nakon prekida jedne linije (voda C, vidu sliku u predhodnom zadatku), impedanse Z_1 i Z_2 su redno vezane i priključene su na međufazni napon U_{BC}. Struje sistema sada iznose:

$I_A' = I_B' = \frac{U}{Z_1 + Z_2} = \frac{240\sqrt{3}}{60} = 4\sqrt{3}[A]$, a struja trećeg voda je $I_C' = 0$ [A].

Nakon nastalog kvara došlo je do promene struja koje po vodovima iznose:

$\Delta I_A = I_A - I_A' = 8 - 4\sqrt{3} = 4(2 - \sqrt{3}) = 1{,}07$ [A],

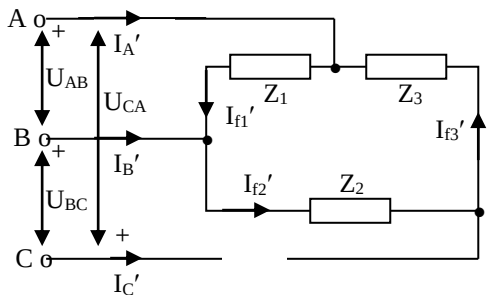
$\Delta I_B = I_B - I_B' = 8 - 4\sqrt{3} = 1{,}07$ [A] i

$\Delta I_C = I_C - I_C' = 8 - 0 = 8$ [A].

12.70. -----

a) $I_{f1} = I_{f2} = I_{f3} = I_f = \frac{U_f}{Z} = \frac{420}{30} = 14[A] \Rightarrow I_1 = I_2 = I_3 = I_f\sqrt{3} = 14\sqrt{3}[A]$.

b)



Nakon prekida voda C impedanse Z_2 i Z_3 su redno vezane i sa impedansom Z_1 su paralelno spojene. Ceo sistem je prešao u jednofazni sistem čiji je napon jednak međufaznom naponu U_{AB}.

Fazne struje iznose:

$$I_{f1}' = \frac{U}{Z_1} = \frac{420}{30} = 14[A];$$

$$I_{f2}' = I_{f3}' = \frac{U}{Z_2 + Z_3} = \frac{420}{60} = 7[A]$$

Pošto su sve impedanse priključene na jednofazni napon U_{AB}, smer faznih struja uzimamo od većeg potencijala ka manjem, tj. Od tačke B ka tački A. Zbog toga su struje I_{f2}' i I_{f3}' suprotnog smera od naznačenog, pa je:
$I_{f2}' = I_{f3}' = -7$ [A].

Linijske struje sistema, nakon prekida voda C, iznose:

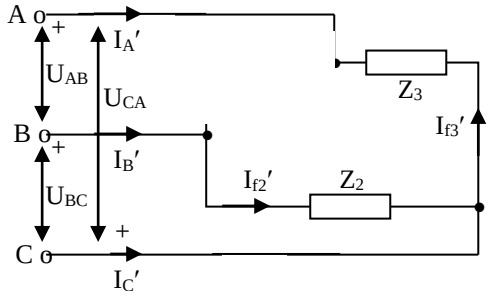
$I_A' = I_{f1}' - I_{f3}' = 14 - (-7) = 21$ [A]

$I_B' = I_{f2}' - I_{f1}' = -7 - 14 = -21$ [A i

$I_C' = 0$, jer je vod C u prekidu.

Napomena! Sve impedanse su savršeno termogene, pa su i sve struje u fazi sa naponom U_{AB}. Iz tog razloga ovde se linijske struje dobiju bez kompleksnog računa (kao da je napon U_{AB} jednosmernog karaktera).

12.71. ----



Pre pregorevanja prve faze, fazne struje su bile jednake:

$$I_{f1} = I_{f2} = I_{f3} = I_f = \frac{U_f}{Z} = \frac{400}{40} = 10[A]$$

Linijska struja je bila jednaka:

$I_A = I_B = I_C = I = I_f\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ [A].

Nakon prekida prve faze, fazne struje druge i treće faze su ostale iste (isto U i Z), pa je:
$I_{f1}' = 0$ [A]; $I_{f2}' = 10$ [A]; $I_{f3}' = 10$ [A]
Ove struje su u fazi sa svojim naponima , i u kompleksnom obliku one iznose:
$\underline{I}_{f2}' = 10 \cdot e^{-j120}$ [A] i $\underline{I}_{f3}' = 10 \cdot e^{-j240}$ [A].

Linijske struje su jednake:

$\underline{I}_A' = -\underline{I}_{f3}' = -10 \cdot [\cos(-240) + j\sin(-240)] = -10 \cdot (-0{,}5 + j\sqrt{3}/2) = (5 - j5\sqrt{3})$ [A] $\Rightarrow I_A' = 10$ [A],

$\underline{I}_B' = \underline{I}_{f2}' = 10 \cdot [\cos(-120) + j\sin(-120)] = 10 \cdot (-0{,}5 - j5\sqrt{3}) = (-5 - j5\sqrt{3})$ [A] $\Rightarrow I_B' = 10$ [A],

$\underline{I}_C' = \underline{I}_{f3}' - \underline{I}_{f2}' = 10\cdot[\cos(-240) + j\sin(-240)] - 10\cdot[\cos(-120) + j\sin(-120)] \Rightarrow$

$\underline{I}_C' = 10\cdot(-0{,}5 + j\sqrt{3}/2) - 10\cdot(-0{,}5 - j5\sqrt{3}) = (-5 + j5\sqrt{3})\,[A] + (5 + j5\sqrt{3}) = j10\sqrt{3} \Rightarrow I_C' = 10\sqrt{3}\ [A].$

Na osnovu dobijenih rešenja može se konstatovati da je došlo do smanjenja linijskih struja na vodovima A i B za $\sqrt{3}$ puta, dok su sve ostale struje (I_{f2}, I_{f3} i I_C) ostale iste. To znači da je rad, kako prijemnika tako i generatora bezbedan.

12.72. ----- Pre prekida faze je: $I_{f1} = I_{f2} = I_{f3} = I_f = 20$ [A]; $I_A = I_B = I_C = 20\sqrt{3}$ [A].

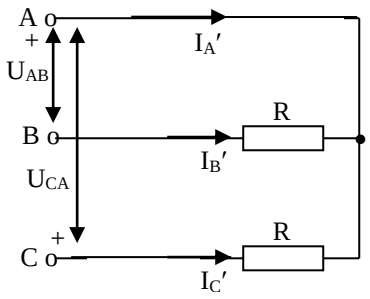
Nakon pregorevanja jedne impedanse (Z_1), fazne struje iznose: $I_{f1}' = 0$; $I_{f2}' = I_{f3}' = 20$ [A].

Linijske struje, nakon prekida Z_1 iznose: $I_A' = I_B' = 20$ [A]; $I_C' = I_C = 20\sqrt{3}$ [A].

Rešenje ovog zadatka je potpuno identično predhodnom (Gde je zaključak: Linijske struje vodova sa kojih je isključena impedansa se smanji za $\sqrt{3}$ puta, dok je na preostalom vodu ostala ista vrednost linijske struje).

12.73. ----- Pre kratke veze struje su bile jednake: $I_{f1} = I_{f2} = I_{f3} = I_A = I_B = I_C = U_f/Z = 220/20 = 11$ [A].

Nakon kratke veze nastaje sledeća slika



Struje na preostalim otporima, na kojima vlada napon od 380 V, iznose:

$I_B' = I_C' = 380/20 = 220\sqrt{3}/20 = 11\sqrt{3}$ [A].

Dakle, zbog kratke veze R_1 struje u preostalim otporima (R_2 i R_3) se povećala za $\sqrt{3}$ (zbog povećanja napona).

I_B' je u fazi sa U_{AB}, a I_C' sa U_{CA} (savršeno R). Usled toga ove dve struje u kompleksnom obliku iznose:

$I_B' = -11\sqrt{3}\cdot e^{j0}$, jer je: $U_{AB} + I_B'R = 0 \Rightarrow I_B' = -U_{AB}/R$;

$I_C' = 11\sqrt{3}\cdot e^{-j240} = 11\sqrt{3}\cdot(-0{,}5 + j\sqrt{3}/2)$

Struja u vodu A, nakon kratke veze R_1, iznosi ($I_A' + I_B' + I_C' = 0$):

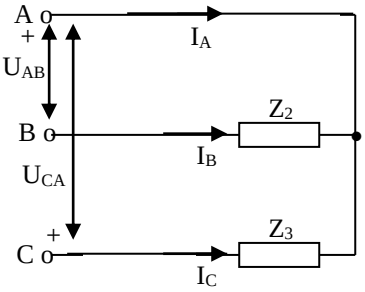
$I_A' = -I_B' - I_C' = -(-11\sqrt{3}) - 11\sqrt{3}\cdot(-0{,}5 + j\sqrt{3}/2) = 11\sqrt{3} + 5{,}5\sqrt{3} - j16{,}5 = (16{,}5\sqrt{3} - j16{,}5)$

$I_A' = \sqrt{16{,}5^2\cdot 3 + 16{,}5^2} = 33\,[A]$

U vodu na kojem je došlo do kratke veze struja se povećala na 33 A ($I_A = 11$ A), a to znači da se ova struja povećala za tri puta ($I_A' = 3\,I_A$).

Usled ovako povećanih struja može doći do pregorevanja osigurača na linijskim vodovima, što bi dovelo do prekida tih vodova. Najugroženiji je osigurač na vodu A, što nije predmet rešenja ovog zadatka.

12.74. -----



$\underline{U}_{f2} = \underline{U}_{AB} = 380\cdot e^{j0} = 380$ [V];

$\underline{U}_{f3} = \underline{U}_{CA} = 380\cdot e^{-j240} = 380\cdot(-0{,}5 + j\sqrt{3}/2)$.

Struje vodova B i C su:

$$\underline{I}_B = -\frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_2} = \frac{380}{10 + j10} = -(19 - j19) = (-19 + j19)\,[A],$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{-190 + j330}{10 - j10} = (-26 + j7)\,[A]$$

Struja voda A je

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_B - \underline{I}_C = 19 - j19 - (-26 + j7) = (45 - j26)\ [A].$$

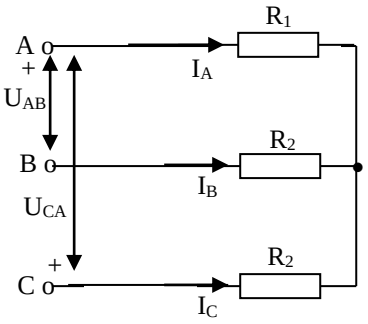
Efektivne vrednosti struja iznose:

$$I_A = \sqrt{45^2 + 26^2} = 51{,}97\,[A],$$

$$I_B = \sqrt{19^2 + 19^2} = 19\sqrt{2} = 26{,}87\,[A]$$

$$I_C = \sqrt{26^2 + 7^2} = \sqrt{725} = 26{,}93\,[A]$$

12.75. ----- a)



$U_f = U/\sqrt{3} = 220$ [V]

Fazni naponi u kompleksnom obliku iznose:

$\underline{U}_{f1} = 220\cdot e^{j0} = 220$ [V],

$\underline{U}_{f2} = 220\cdot e^{-j120} = 220\cdot(-0,5 - j\sqrt{3}/2) = (-110 - j190)$ [V],

$\underline{U}_{f3} = 220\cdot e^{-j240} = 220\cdot(-0,5 + j\sqrt{3}/2) = (-110 + j190)$ [V].

Admitanse sistema su:

$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 0,1$ [S]; $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = 0,1$ [S]; $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3 = 0,2$[S].

Napon U_o je:

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_{f1}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{f2}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{f3}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{220\cdot 0,1 + (-110 - j190)\cdot 0,1 + (-110 + j190)\cdot 0,2}{0,1 + 0,1 + 0,2} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{22 - 11 - j19 - 22 + j38}{0,4} = \frac{-11 + j19}{0,4} = (-27,5 + j47,5)[\mathrm{V}] \Rightarrow \underline{U}_o = 54,89e^{j120,1}[\mathrm{V}].$$

b)

Fazni naponi na prijemniku iznose:

$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = 220 + 27,5 - j47,5 = (247,5 - j47,5)$ V,

$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = (-82,5 - j237,5)$ V,

$\underline{U}_{f3p} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o = (-82,5 + j142,5)$ V.

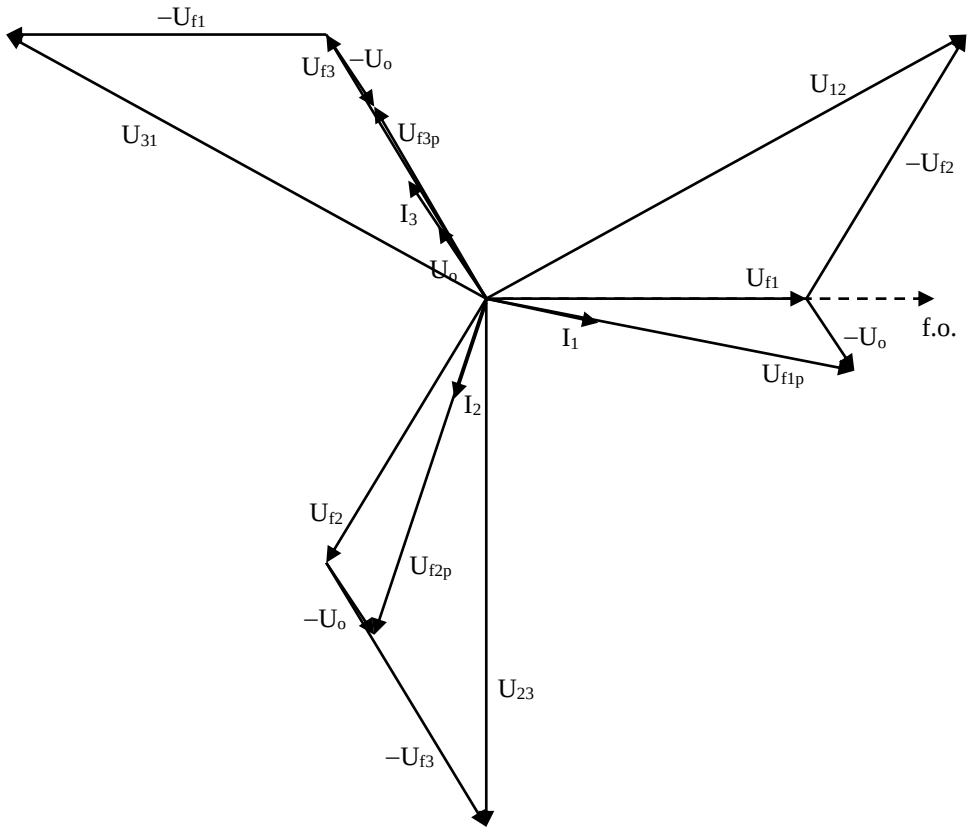
U eksponencijalnom obliku, naponi prijemnika su:

$\underline{U}_{f1p} = 252,21\cdot e^{-j10,9}$ [V]; $\underline{U}_{f2p} = 251,42\cdot e^{-j109,2}$ [V] i $\underline{U}_{f3p} = 164,66\cdot e^{j120,1}$ [V].

Struje sistema su:

$\underline{I}_1 = \underline{U}_{f1p}/\underline{Z}_1 = 25,221\cdot e^{-j10,9}$ [A], $\underline{I}_2 = \underline{U}_{f2p}/\underline{Z}_2 = 25,142\cdot e^{-j109,2}$ [A] i $\underline{I}_3 = \underline{U}_{f3p}/\underline{Z}_3 = 32,932\cdot e^{j120,1}$ [A].

Na osnovu ovih podataka prikazan je kompletan fazorski dijagram napona i struja na sledećoj slici.



12.76. -----

$$\underline{U}_{f1} = 220 \cdot e^{j0} = 220[V],$$

$$\underline{U}_{f2} = 220 \cdot e^{-j120} = (-110 - j190),$$

$$\underline{U}_{f3} = 220 \cdot e^{-j240} = 220 \cdot e^{j120} = (-110 + j190)[V],$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{20} = 0{,}05[S],$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{30} = 0{,}033[S]$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{40} = 0{,}025[S]$$

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_{f1}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{f2}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{f3}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{220 \cdot 0{,}05 + (-110 - j190) \cdot 0{,}033 + (-110 + j190) \cdot 0{,}025}{0{,}05 + 0{,}033 + 0{,}025} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{11 - 3{,}67 - j6{,}33 - 2{,}75 + j4{,}75}{0{,}108} = \frac{4{,}58 - j1{,}58}{0{,}108} = (42{,}41 - j14{,}63) \Rightarrow \underline{U}_o = 44{,}86 e^{-j19}[V].$$

Čitaocu se preporučuje da odredi fazne napone prijemnika, struje triofaznog sistema i da nacrta fazorski dijagram napona i struja prijemnika.

12.77. ----- $U = 300\sqrt{3}[V]$; $U_f = 300$ [V]; $\underline{U}_{f1} = 300$ [V]; $\underline{U}_{f2} = (-150 - j150\sqrt{3})$ [V];
$\underline{U}_{f3} = (-150 + j150\sqrt{3})$ [V],

$$\underline{U}_o = \frac{\frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\frac{300}{10} + \frac{-150 - j150\sqrt{3}}{j10} + \frac{-150 + j150\sqrt{3}}{-j10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{j10} + \frac{1}{-j10}} = \frac{30 + j15 - 15\sqrt{3} - j15 - 15\sqrt{3}}{0{,}1 - j0{,}1 + j0{,}1} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{30 - 30\sqrt{3}}{0{,}1} = \frac{30(1 - \sqrt{3})}{0{,}1} = -300(\sqrt{3} \div 1) = -219{,}6[V]$$

Fazni naponi na prijemniku iznose:

$\underline{U}_{f1p} = 300 + 219{,}6 = 519{,}6$ [V]; $\underline{U}_{f2p} = (69{,}6 - j150\sqrt{3})$ [V]; $\underline{U}_{f3p} = (69{,}6 + j150\sqrt{3})$ [V].

$U_{f1p} = 519{,}6$ [V]; $U_{f2p} = U_{f3p} = 269$ [V].

Fazne struje prijemnika, koje su jednake strujama dovodnih vodova mreže, su:

$I_1 = U_{f1p}/Z_1 = 51{,}96$ [A]; $I_2 = U_{f2p}/Z_2 = 26{,}9$ [A]; $I_3 = U_{f3p}/Z_3 = 26{,}9$ [A].

12.78. ----

$$\underline{U}_o = \frac{\frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\frac{220 \cdot e^{j0}}{10} + \frac{220 \cdot e^{-j120}}{40} + \frac{220 \cdot e^{-j240}}{20}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{20}} = \frac{22 + 5{,}5 \cdot (-0{,}5 - j0{,}866) + 11 \cdot (-0{,}5 + j0{,}866)}{\frac{4 + 1 + 2}{40}} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{40 \cdot (22 - 2{,}75 - j4{,}763 - 5{,}5 + j9{,}526)}{7} = 5{,}71 \cdot (13{,}75 + j4{,}763) = (72{,}80 + j27{,}20)[V] \Rightarrow U_o = 93{,}93[V].$$

Fazni naponi na prijemniku iznose:

$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = 220 - 72{,}8 - j27{,}2 = (147{,}2 - j27{,}2)$ [V] $\Rightarrow$ $U_{f1p} = 149{,}69$ [V];

$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = -110 - j190{,}52 - 72{,}8 - j27{,}2 = (182{,}8 - j217{,}72)$ [V] $\Rightarrow$ $U_{f2p} = 284{,}28$ [V];

$\underline{U}_{f3p} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o = -110 + j190{,}52 - 72{,}8 - j27{,}2 = (182{,}8 + j163{,}32)$ [V] $\Rightarrow$ $U_{f3p} = 245{,}13$ [V].

Fazne struje (efektivne vrednosti) su jednake:

$I_{f1} = U_{f1p}/R_1 = 14{,}969$ [A]; $I_{f2} = U_{f2p}/R_2 = 7{,}107$ [A] i $I_{f3} = U_{f3p}/R_3 = 12{,}257$ [A].

Aktivna snaga po fazi iznosi:

$P_1 = U_{f1p} \cdot I_{f1} = 2\,195{,}8$ [W]; $P_2 = U_{f2p} \cdot I_{f2} = 2\,020{,}38$ [W] i $P_3 = U_{f3p} \cdot I_{f3} = 3\,004{,}56$ [W].

Ukupna aktivna snaga sistema je: $P = P_1 + P_2 + P_3 = 7\,220{,}74$ [W].

Ukupna reaktivna snaga je $Q = 0$ (potrošač savršeno termogen), a prividna : $S = P = 7\,220{,}74$ [VA].

12.79. -----

$$\underline{U}_o = \frac{\dfrac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} + \dfrac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\dfrac{100\cdot e^{j0}}{10} + \dfrac{100\cdot e^{-j120}}{10+j10} + \dfrac{100\cdot e^{-j240}}{10-j10}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10+j10} + \dfrac{1}{10-j10}} = \frac{10 + \dfrac{-50-j86{,}6}{10+j10} + \dfrac{-50+j86{,}6}{10-j10}}{0{,}1+0{,}05-j0{,}05+0{,}05+j0{,}05} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{10-6{,}83-j1{,}83-6{,}83+j1{,}83}{0{,}2} = -18{,}3[V] \Rightarrow U_o = 18{,}33[V].$$

Fazni naponi na prijemniku su:

$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = 100 + 18{,}3 = 118{,}3$ [V] $\Rightarrow$ $U_{f1p} = 118{,}3$ [V];

$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = -50 - j86{,}3 + 18{,}3 = (-31{,}7 - j86{,}8)$ [V] $\Rightarrow$ $U_{f2p} = 92{,}22$ [V] i

$\underline{U}_{f3p} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o = -50 + j86{,}3 + 18{,}3 = (-31{,}7 + j86{,}6)$ [V] $\Rightarrow$ $U_{f3p} = 92{,}22$ [V].

Efektivne vrednosti faznih (linijskih) struja iznose:

$I_1 = U_{f1p}/Z_1 = 11{,}83$ [A]; $I_2 = U_{f2p}/Z_2 = 92{,}22/14{,}1 = 6{,}54$ [A] (ind.) i

$I_3 = U_{f3p}/Z_3 = 92{,}22/14{,}1 = 6{,}54$ [A] (kap.).

Aktivna snaga po fazama je:

$P_1 = I_1^2\cdot R_1 = 11{,}83^2\cdot 10 = 1\,399{,}49$ [W]; $P_2 = I_2^2\cdot R_2 = 6{,}54^2\cdot 10 = 427{,}72$ [W] i

$P_3 = I_3^2\cdot R_3 = 6{,}54^2\cdot 10 = 427{,}72$ [W].

Reaktivna snaga po fazama je:

$Q_1 = I_1^2\cdot X_1 = 0$; $Q_2 = I_2^2\cdot X_2 = 6{,}54^2\cdot 10 = 427{,}72$ [VAr] (ind.) i $Q_3 = I_3^2\cdot X_3 = -427{,}72$ [VAr] (kap.).

Ukupna aktivna snaga trofaznog sistema je:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 2\,254{,}92 \text{ [W]},$$

a reaktivna:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 427{,}72 - 427{,}72 = 0 \text{ [VAr]}.$$

Ukupna prividna snaga sistema je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 2254{,}92[VA].$$

12.80. ----- Ako je nulti vod zanemarljive impedanse ($\underline{Z}_o = 0 \Rightarrow \underline{Y}_o = \infty$), tada je napon između zvezdišta generatora i prijemnika jednak nuli ($\underline{U}_o = 0$). Usled toga fazni naponi generatora i fazni naponi prijemnika su međusobno jednaki ($U_{f1p} = U_{f1}$; $U_{f2p} = U_{f2}$ i $U_{f3p} = U_f$).

Pošto su pojedinačne aktivne snage po fazama:

$P_1 = U_{f1}I_1 \cos\varphi_1$; $P_2 = U_{f2}I_2 \cos\varphi_2$ i $P_3 = U_{f3}I_3 \cos\varphi_3$,

struje sistema iznose:

$I_1 = P_1/U_{f1}\cos\varphi_1 = 1\,300/100\cdot 1 = 13$ [A]; $I_2 = P_2/U_{f2}\cos\varphi_2 = 1\,200/100\cdot 0{,}8 = 15$ [A] i

$I_3 = P_3/U_{f3}\cos\varphi_3 = 1\,800/100\cdot 0{,}7 = 25{,}71$ [A].

Fazni pomak (ugao) između faznih napona i struja iznosi:

$\varphi_1 = \arccos 1 = 0°$; $\varphi_2 = \arccos 0{,}8 = 36{,}87°$ i $\varphi_3 = \arccos 0{,}7 = 45{,}57°$.

Kompleksni izrazi za struje sistema su:

$\underline{I}_1 = 13\cdot e^{j0°}$; $\underline{I}_2 = 15\cdot e^{j(-120-36{,}87)} = 15\cdot e^{-j156{,}87}$ i $\underline{I}_3 = 25{,}71\cdot e^{j(-240-45{,}57)} = 25{,}71\cdot e^{-j285{,}57} = 25{,}71\cdot e^{j74{,}43}$.

Struja povratnog; nultog; voda je:

$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 13\cdot e^{j0} + 15\cdot e^{-j156{,}87} + 25{,}71\cdot e^{j74{,}43} \Rightarrow$

$\underline{I}_o = 13\cdot(\cos 0° + j\sin 0°) + 15\cdot[\cos(-156{,}87°) + j\sin(-156{,}87°)] + 25{,}71\cdot(\cos 74{,}43° + j\sin 74{,}43°) \Rightarrow$

$\underline{I}_o = 13 - 13{,}79 - j5{,}89 + 6{,}9 + j24{,}77 = (6{,}11 + j18{,}88)$ [A] $\Rightarrow$ $I_o = 19{,}84$ [A].

12.81. -----

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{10\cdot j10}{10+j10-j10} = j10[\Omega];$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{j10\cdot(-j10)}{10+j10-j10} = 10[\Omega],$$

$$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_3\cdot\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{-j10\cdot 10}{10+j10-j10} = -j10[\Omega].$$

12.82. -----

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = 10 + 20 + \frac{10 \cdot 20}{40} \Rightarrow \underline{Z}_{12} = R_{12} = 35[\Omega];$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} = 20 + 40 + \frac{20 \cdot 40}{10} \Rightarrow \underline{Z}_{23} = R_{23} = 140[\Omega],$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 40 + 10 + \frac{40 \cdot 10}{20} \Rightarrow \underline{Z}_{31} = R_{31} = 70[\Omega].$$

12.83. ----- Fazni naponi generatora su $U_{fg} = U/\sqrt{3} = 127{,}17$ V.
Admitanse linijskih provodnika zajedno sa admitansama potrošača iznose:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1 + R_1} = \frac{1}{2 + j4 + 1} = (0{,}12 - j0{,}16)[S]$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2 + R_2} = \frac{1}{-j5 + 1} = (0{,}038 + j0{,}192)[S]$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3 + R_3} = \frac{1}{j5 + 1} = (0{,}038 - j0{,}192)[S]$$

$$\underline{Y}_o = \frac{1}{R_o} = \frac{1}{1} = 1[S].$$

Napon između dvaju zvezdišta je:

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_{fg1} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_{fg2} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_{fg3} \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_o} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{127{,}17 \cdot e^{j0} \cdot (0{,}12 - j0{,}16) + 127{,}17 \cdot e^{-j120} \cdot (0{,}038 + j0{,}192) + 127{,}17 \cdot e^{j120} \cdot (0{,}038 - j0{,}192)}{0{,}12 - j0{,}16 + 0{,}038 + j0{,}192 + 0{,}038 - j0{,}192 + 1} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{15{,}260 - j20{,}347 + 18{,}729 - j16{,}393 + 18{,}729 + j16{,}393}{1{,}196 - j0{,}16} = \frac{52{,}718 - j20{,}347}{1{,}196 - j0{,}16} = (45{,}540 - j10{,}920)[V]$$

Struje su jednake:

$$\underline{I}_1 = (\underline{U}_{fg1} - \underline{U}_o) \cdot \underline{Y}_1 = (127{,}17 - 45{,}54 + j10{,}92) \cdot (0{,}12 - j0{,}16) = (11{,}543 - j11{,}750)[A] \Rightarrow I_1 = 16{,}47[A]$$

$$\underline{I}_2 = (\underline{U}_{fg2} - \underline{U}_o) \cdot \underline{Y}_2 = (-63{,}585 - j110{,}132 - 45{,}54 + j10{,}92) \cdot (0{,}038 + j0{,}192) = (14{,}902 - j24{,}722)[A]$$

$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_{fg3} - \underline{U}_o) \cdot \underline{Y}_3 = (-63{,}585 + j110{,}132 - 45{,}54 + j10{,}92) \cdot (0{,}038 - j0{,}192) = (19{,}095 + j25{,}552)[A]$$

$$I_2 = 28{,}866[A]; I_3 = 31{,}899[A]$$

$$\underline{I}_o = \underline{U}_o \underline{Y}_o = (45{,}54 - j10{,}92)[A] \rightarrow \underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \Rightarrow I_o = 46{,}831[A].$$

Fazni naponi potrošača iznose:

$U_1 = I_1 \cdot Z_1 = 16{,}47 \cdot 4{,}472 = 73{,}656$ [V]; $U_2 = I_2 \cdot Z_2 = 28{,}866 \cdot 5 = 143{,}33$ [V] i
$U_3 = I_3 \cdot Z_3 = 31{,}899 \cdot 5 = 159{,}495$ [V].

Aktivne snage potrošača su:

$P_1 = I_1^2 R_1 = 16{,}47^2 \cdot 2 = 545{,}523$ [W]; $P_2 = 0$ i $P_3 = 0 \Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3 = 545{,}523$ [W].

Reaktivna snaga potrošača je:

$Q_1 = I_1^2 X_1$ $16{,}47^2 \cdot 4 = 1\,085{,}044$ [VAr]; $Q_2 = I_2^2 \cdot X_2 = 28{,}866^2 \cdot (-5) = -4\,166{,}230$ [VAr] (kap.) i
$Q_3 = I_3^2 \cdot X_3 = 31{,}899^2 \cdot 5 = 5\,087{,}731$ [VAr] $\Rightarrow$ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2\,006{,}545$ [VAr].

Snage gubitaka na prenosnim vodovima (Džulovi gubici) iznose:

$\Delta P_1 = I_1^2 R_1 = 271{,}261$ [W]; $\Delta P_2 = I_2^2 R_2 = 833{,}246$ [W]; $\Delta P_3 = I_3^2 R_3 = 1\,017{,}546$ [W] i
$\Delta P_o = I_o^2 R_o = 2\,193{,}143$ [W] $\Rightarrow$ $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_o = 4\,315{,}196$ [W].

Generator daje ukupnu snagu (mreži i potrošaču) koja iznosi

aktivna:

$$P_g = P + \Delta P = 545{,}523 + 4\,315{,}196 = 4\,860{,}719 \text{ [W]};$$

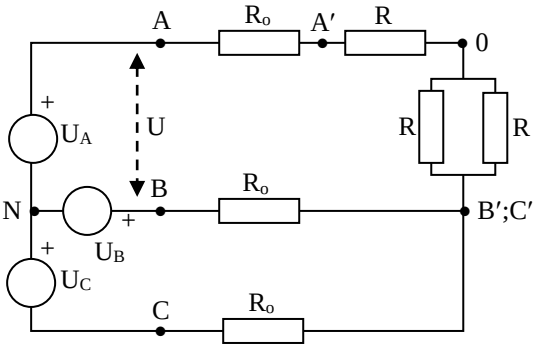
reaktivna:

$$Q_g = Q = 2\,006{,}545 \text{ [W]} \text{ i}$$

prividna:

$$S_g = \sqrt{P_g^{\,2} + Q_g^{\,2}} = 5258{,}594[VA].$$

12.84. ----- Fazni naponi generetora (mreže) iznose $U_A = U_B = U_C = U_f = U/\sqrt{3} = 220$ [V].



$\underline{U}_A = 220\cdot e^{j0} = 220$ [V];
$\underline{U}_B = 220\cdot e^{-j120°} = (-110 - j190{,}53)$ [V];
$\underline{U}_C = 220\cdot e^{-j240°} = (-110 + j190{,}53)$ [V];

$$\underline{Z}_A = R_o + R_1 + \frac{R_1}{2} = 35[\Omega];$$

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0{,}029[S];$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R_o = 5[\Omega];$$

$$\underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \frac{1}{R_o} = 0{,}2[S];$$

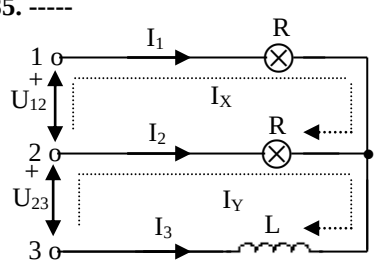
Kratkim spojem tačaka B′ i C′ dolazi do novog zvezdišta prijemnika a to je tačka B′, odnosno C′. Napon između tačaka N i B′ (napon između zvezdišta generatora i prijemnika) je:

$$\underline{U}_o = \underline{U}_{NB'} = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{220\cdot 0{,}029 + (-110 - j190{,}53)\cdot 0{,}2 + (-110 + j190{,}53)\cdot 0{,}2}{0{,}029 + 0{,}2 + 0{,}2}$$

$$\underline{U}_o = \frac{6{,}38 - 22 - j38{,}11 - 22 + j38{,}11}{0{,}429} = -\frac{37{,}62}{0{,}429} = -87{,}69[V]$$

Struje po granama, nakon kratke veze, iznose:
$\underline{I}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_o)\cdot\underline{Y}_A = (220 + 87{,}69)\cdot 0{,}029 = 8{,}92$ [A] $\Rightarrow I_A = 8{,}92$ [A];
$\underline{I}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_o)\cdot\underline{Y}_A = (-110 - j190{,}53 + 87{,}69)\cdot 0{,}2 = (-4{,}46 - j38{,}11)$ [A] $\Rightarrow I_B = 38{,}37$ [A];
$\underline{I}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_o)\cdot\underline{Y}_C = (-110 + j190{,}53 + 87{,}69)\cdot 0{,}2 = (-4{,}46 + j38{,}11)$ [A] $\Rightarrow I_C = 38{,}37$ [A].

12.85. -----



Ako pretpostavimo da nam je redosled faza U_1, U_2, U_3, tada ove fazne napone možemo kompleksno predstaviti:

$\underline{U}_1 = U_f\cdot e^{j0} = U_f$;
$\underline{U}_2 = U_f\cdot e^{-j2\pi/3} = U_f\cdot[\cos(-120°) + j\sin(-120°)] \Rightarrow$
$\underline{U}_2 = -U_f/2 - jU_f\sqrt{3}/2$;
$\underline{U}_3 = U_f\cdot e^{-j4\pi/3} = U_f\cdot[\cos(-240°) + j\sin(-240°)] \Rightarrow$
$\underline{U}_3 = -U_f/2 + jU_f\sqrt{3}/2$.

Napon U_o iznosi:

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{U_f Y_1 + \left(-0{,}5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)U_f\cdot Y_2 + \left(-0{,}5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)U_f(-jY_3)}{Y_1 + Y_2 - jY_3} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{U_f Y_1[1 - 0{,}5 - j0{,}866 + j0{,}5 + 0{,}866]}{Y_1 + Y_2 - jY_3}$$

Ako su otpornosti po fazama jednake, tada su i provodnosti međusobno jednake.
Dakle, za $R_1 = R_2 = X_3 \Rightarrow Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y$, pa je napon U_o jednak:

$$\underline{U}_o = \frac{U_f Y(1{,}366 - j0{,}366)}{Y(2 - j1)} = \frac{1{,}366 - j0{,}366}{2 - j1}U_f = (0{,}62 + j0{,}13)U_f$$

Fazni naponi na sijalicama iznose:

$\underline{U}_1' = \underline{U}_1 - \underline{U}_o = (0{,}38 - j0{,}13)U_f \Rightarrow U_1' = \sqrt{(0{,}38U_f)^2 + (0{,}13U_f)^2} \approx 0{,}4U_f$

$\underline{U}_2' = \underline{U}_2 - \underline{U}_o = (-0{,}5 - j0{,}866)U_f - (0{,}62 + j0{,}13)U_f = (-1{,}12 - j0{,}996) \Rightarrow$

$U_2' = \sqrt{(1{,}12U_f)^2 + (0{,}996U_f)^2} \approx 1{,}5U_f$

Struje koje protiču kroz sijalice iznose:

$I_1 = U_1'/R$, odnosno $I_2 = U_2'/R$, pa je:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{1{,}5U_f/R}{0{,}4U_f/R}=\frac{1{,}5}{0{,}4}=3{,}75\Rightarrow I_2=3{,}75I_1.$$

Sijalica S_2 će za 3,75 puta jače da svetli od sijalice S_1, pod uslovom da je redosled faza ovakav kako smo pretpostavili. Ako sijalica S_1 jače svetli od sijalice S_2, tada je redosled faza inverzan (npr. U_1, U_3, U_2).

Napomena! Na ovaj način se može ustanoviti samo redosled faza, a ne faze. Redosled faza može biti U_1, U_2, U_3 (U_2, U_3, U_1 ili U_3, U_1, U_2). Navedeni redosled je jedna varijanta. Druga varijanta je kada se zamene bilo koje dve faze.

Zadatak se može rešiti i metodom konturnih struja.
Međufazni naponi su jednaki:

$$\underline{U}_{12}=\underline{U}_1-\underline{U}_2=U_f+U_f/2+j\,U_f\sqrt{3}/2=3U_f/2+j\sqrt{3}\,U_f/2\;\Rightarrow\;U_{12}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}U_f\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}U_f\right)^2}=U_f\sqrt{3}.$$

$$\underline{U}_{23}=\underline{U}_2-\underline{U}_3=-U_f/2-jU_f\sqrt{3}/2+U_f/2-jU_f\sqrt{3}/2=-jU_f\sqrt{3}\;\Rightarrow\;U_{23}=U_f\sqrt{3}\;.$$

$$\underline{U}_{31}=\underline{U}_3-\underline{U}_1=-U_f/2+jU_f\sqrt{3}/2-U_f=-3U_f/2+j\,U_f\sqrt{3}/2\;\Rightarrow\;U_{31}=U_f\sqrt{3}\;.$$

$$\underline{U}_{12}=\underline{I}_x\cdot(R+R)-\underline{I}_y\cdot R$$
$$\underline{U}_{23}=\underline{I}_y\cdot(R+jX)-\underline{I}_xR$$

Za R = X, sledi:

$$3U_f/2+j\sqrt{3}\,U_f/2=2R\underline{I}_X-R\underline{I}_y$$
$$-jU_f\sqrt{3}=\underline{I}_y\cdot(R+jX)-\underline{I}_xR\quad/\cdot 2$$

$$3U_f/2+j\sqrt{3}\,U_f/2=2R\underline{I}_X-R\underline{I}_y$$
$$-j2U_f\sqrt{3}=-2\,\underline{I}_xR+(2R+j2X)\underline{I}_y\cdot$$

$$1{,}5U_f+j0{,}866U_f-j3{,}46U_f=\underline{I}_y\cdot(-R+2R+j2R)\;\Rightarrow\;\underline{I}_y=\frac{1{,}5-j2{,}598}{R(1+j2)}U_f=\frac{U_f}{R}(-0{,}74-j1{,}12),$$

$$\underline{I}_X=\frac{\underline{I}_y(R+jR)+j1{,}73U_f}{R}=\frac{\frac{U_f}{R}(-0{,}74-j1{,}12)\cdot R(1+j1)+j1{,}73U_f}{R}=\frac{U_f(0{,}38-j1{,}86+j1{,}73)}{R}=\frac{U_f}{R}(0{,}38-j0{,}13)$$

Struje sijalica iznose:

$$\underline{I}_1=\underline{I}_X=\frac{U_f}{R}(0{,}38-j0{,}13)\Rightarrow I_1=\sqrt{\left(0{,}38\frac{U_f}{R}\right)^2+\left(0{,}13\frac{U_f}{R}\right)^2}=\frac{0{,}4U_f}{R};$$

$$\underline{I}_2=\underline{I}_y-\underline{I}_X=\frac{U_f}{R}(-1{,}12-j0{,}99)\Rightarrow I_2=\sqrt{\left(1{,}12\frac{U_f}{R}\right)^2+\left(0{,}99\frac{U_f}{R}\right)^2}=\frac{1{,}5U_f}{R}$$

Kako je: $\frac{I_2}{I_1}=\frac{1{,}5U_f/R}{0{,}4U_f/R}=\frac{1{,}5}{0{,}4}=3{,}75.$

Sijalica S_2 jače sija od sijalice S_1 za 3,75 puta, ako je dobro određen redosled faza. U protivnom redosled faza je suprotan (U_1, U_3, U_2).

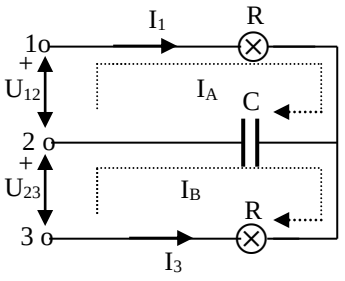
12.86. ----- Da. Postupak je potpuno isti, sa tom razlikom što se omesto impedanse $\underline{Z}_3 = jX$, odnosno admitanse $\underline{Y}_3 = -jY$, u predhodnom zadatku, sada koristi impedansa $\underline{Z}_3 = -jX$, tj. admitansa $\underline{Y}_3 = jY$. U ovom slučaju će sijalica S_2 jače da svetli od sijalice S_1 ($I_2 > I_1$) ako napon U_1 fazno kasni za naponom U_2 (suprotno od predhodne varijante). Ovo je logično, jer će kod kondenzatora struja da prednjači svom naponu, dok je kod kalema ona kasnila. To znači da je:

Za $I_2 > I_1$ redosled faza sledeći: $U_2, U_1; U_3$ ili $U_1; U_3; U_2$ ili $U_3; U_2; U_1$.

Za $I_1 > I_2$ redosled faza je suprotan (zamenjene bilo koje dve faze).

Čitaocu se ostavlja mogućnost da to proveri.

12.87. -----



Ako pretpostavimo da napon U_{12} prednjači naponu U_{23} (redosled faza je U_{12}, U_{23}, U_{31}, odnosno U_1, U_2, U_3), tada njihov kompleksni izraz može da glasi:

$\underline{U}_{12} = U \cdot e^{j0} = U,$

$\underline{U}_{23} = U \cdot e^{-j120} = -0{,}5U - j0{,}866U.$

Primenom metode konturnih struja, slede jednačine:

$\underline{U}_{12} = I_A \cdot (R - jX) - I_B \cdot (-jX)$

$\underline{U}_{23} = I_B \cdot (R - jX) - I_A \cdot (-jX)$

Zamenom kapacitivnog otpora aktivnim (R = X), sledi:

$$U = I_A \cdot (R - jR) + I_B \cdot jR \quad \Rightarrow \quad U = I_A R \cdot (1 - j1) + jI_B R$$

$$-0{,}5U - j0{,}866U = I_B \cdot (R - jR) + I_A jR \quad \Rightarrow \quad -0{,}5U - j0{,}866U = jI_A R + I_B R(1 - j1)$$

Drugu jednačinu pomnožimo sa $j(1 - j1)$, tj sa $(1 + j1)$

$$U = I_A R(1 - j1) + jI_B R$$

$$U(-0{,}5 - j0{,}866) \cdot (1 + j1) = - I_A R(1 - j1) + I_B R(1 - j1)(1 + j1)$$

$$U = I_A R(1 - j1) + jI_B R$$

$$0{,}366U - j1{,}366U = -I_A R(1 - j1) + I_B R(1 + 1)$$

$$(1{,}366 - j1{,}366)U = I_B R(j1 + 2) \quad \underline{I}_B = \frac{U}{R} \frac{1{,}366 - j1{,}366}{2 + j1} = \frac{U}{R}(0{,}273 - j0{,}820)$$

$$\underline{I}_A = \frac{U - jR \cdot I_B}{R(1 - j1)} = \frac{U - jR \cdot \frac{U}{R}(0{,}273 - j0{,}820)}{R(1 - j1)} = \frac{U}{R} \frac{(1 - j0{,}273 - 0{,}820)}{1 - j1} = \frac{U}{R} \frac{0{,}180 - j0273}{1 - j1} = \frac{U}{R}(0{,}227 - j0{,}047)$$

Struje u sijalicama iznose:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_A = \frac{U}{R}(0{,}227 - j0{,}047) \Rightarrow I_1 = 0{,}232 \frac{U}{R}$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_B = \frac{U}{R}(-0{,}273 + j0{,}820) \Rightarrow I_3 = 0{,}864 \frac{U}{R}$$

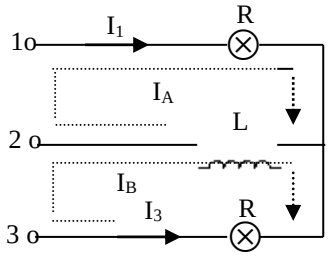
Odnos između struje I_3 i I_1 je:

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{0{,}864 \frac{U}{R}}{0{,}232 \frac{U}{R}} = \frac{0{,}864}{0{,}232} = 3{,}72 \Rightarrow I_3 = 3{,}72 I_1$$

Ako smo dobro odabrali redosled faza (U_1, U_2, U_3, odnosno U_{12}, U_{23}, U_{31}), tada će sijalica sa strujom I_3 da svetli 3,72 puta jače od sijalice sa strujom I_1. U protivnom, kod inverznog redosleda faza i jačina svetlosti će biti suprotna.

Ako otpornost kondenzatora nije jednaka otpornosti aktivnog otpora, ovaj odnos između struja I_3 i I_1 će biti nešto izmenjen. Taj odnos je, bez obzira kolika je kapacitivna otpornost kondenzatora, uvek veći od jedinice, a to ynači da će sijalica treće faze uvek jače da svetli od sijalice prve faze za navedeni redosled faza (napon U_1 prednjači naponu U_2).Ove se otpornosti izjednačuju samo zbog lakšeg dokaza.

12.88. -----



Metodom konturnih struje, gde je $\underline{I}_A = \underline{I}_1$ a $\underline{I}_B = -\underline{I}_3$, postavimo sledeće jednačine:

$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1(1 + j1) - (-\underline{I}_3)\cdot j1$

$\underline{U}_{23} = -\underline{I}_3(1+ j1) - \underline{I}_1\cdot j1$

Uz pretpostavku da napon U_{12} prednjači naponu U_{23}, sledi:

$10 = \underline{I}_1(1 + j1) + j\underline{I}_3$ ..... (1)

$10(-0,5 - j0,866) = -j\underline{I}_1 - \underline{I}_3(1 + j1)$……..(2)

Kada pomnožimo prvu jednačinu sa (–j), sledi: $-j10 = \underline{I}_1(1 - j1) + \underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = -j10 - \underline{I}_1(1 - j1)$

Uvrštavanjem struje I_3 iz prve jednačine u drugu dobije se:

$-5 - j8,66 = -j\underline{I}_1 - [-j10 - \underline{I}_1(1 - j1)](1+ j1) \Rightarrow -5 - j8,66 = -j\underline{I}_1 - [- j10 + 10 - \underline{I}_1(1 + 1)] \Rightarrow$

$-5 - j8,66 = -j\underline{I}_1 + j10 - 10 + 2\underline{I}_1 \Rightarrow 5 - j18,66 = \underline{I}_1\cdot(2 - j1)$

$$\underline{I}_1 = \frac{5 - j18,66}{2 - j1} = (5,732 - j6,464) \Rightarrow I_1 = 8,639\,[\mathrm{A}]$$

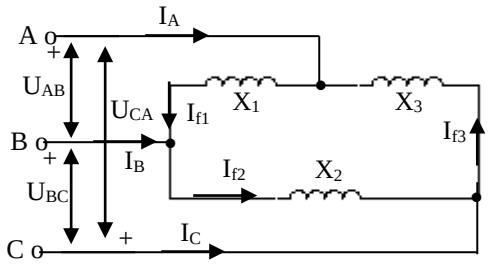
$$\underline{I}_3 = -j10 - (5,732 - j6,464)\cdot(1 - j1) = -j10 - (-0,732 - j12,169) = 0,732 + j2,169 \Rightarrow I_3 = 2,289\,[\mathrm{A}]$$

Pošto je

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{8,639}{2,289} = 3,77 \Rightarrow I_1 = 3,77\cdot I_3$$

sijalica sa strujom I_1 će za 3,77 puta jače da svetli od sijalice sa strujom I_3, uz pretpostavku da smo dobro odredili redosled faza. U protivnom, ako sijalica sa strujom I_3 jače svatli od sijalice sa strujom I_1 redosled faza je suprotan, tj. napon U_1 kasni za naponom U_2 (u ovom slučaju redosled faza bi bio: U_2, U_1, U_3).

12.89. -----



Fazne struje su:

$$\underline{I}_{f1} = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} = \frac{400\cdot e^{j90}}{10\cdot e^{j90}} = 40\cdot e^{j0}\,[\mathrm{A}];$$

$$\underline{I}_{f2} = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} = \frac{400\cdot e^{-j30}}{8\cdot e^{j90}} = 50\cdot e^{-j120}\,[\mathrm{A}];$$

$$\underline{I}_{f3} = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{400\cdot e^{-j150}}{6\cdot e^{j90}} = 66,67\cdot e^{-j240}\,[\mathrm{A}].$$

Međufazne struje su:

$\underline{I}_A = \underline{I}_{f1} - \underline{I}_{f3} = 40\cdot(\cos 0° + j\sin 0°) - 40\cdot[\cos (-240°) + j\sin (-240°)] = 40 + 33,33 - j57,33 \Rightarrow$

$\underline{I}_A = (73,33 - j57,33)\,[\mathrm{A}] = 93\cdot e^{-j38°}\,[\mathrm{A}];$

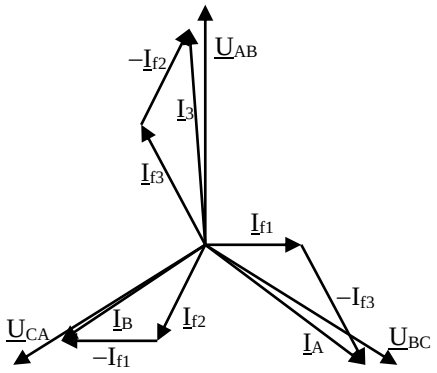
$\underline{I}_B = \underline{I}_{f2} - \underline{I}_{f1} = 50\cdot[\cos (-120°) + j\sin (-120°)] - 40\cdot[\cos 0° - j\sin 0°] = -25 - j43,33 - 40 = (-65 - j43,33) \Rightarrow$

$\underline{I}_B = 78,1\cdot e^{-j146,3°} - j20 = (-10 - j37,3)\,[\mathrm{A}] = 38,6\cdot e^{-j105°}\,[\mathrm{A}]$ i

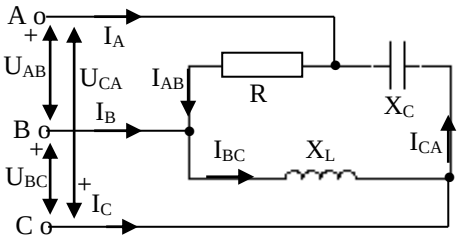
$\underline{I}_C = \underline{I}_{f3} - \underline{I}_{f2} = 66,67\cdot[\cos(-240°) + j\sin(-240°)] - 50\cdot[\cos(-120°) + j\sin(-120°)] \Rightarrow$

$\underline{I}_C = -33,33 + j57,33 + 25 + j43,33 + 10 + j17,3 = (-8,33 + j100,66)\,[\mathrm{A}] = 100,9\cdot e^{j94,7°}\,[\mathrm{A}].$

Fazorski dijagram:



12.90. -----



Fazne struje iznose:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{400 \cdot e^{j90}}{20 \cdot e^{j0}} = 20 \cdot e^{j90} = j20\,[A],$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{400 \cdot e^{-j30}}{20 \cdot e^{j90}} = 20 \cdot e^{-j120} = (-10 - j17{,}3)\,[A];$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{400 \cdot e^{-j150}}{20 \cdot e^{-j90}} = 20 \cdot e^{-j60} = (10 - j17{,}3)\,[A].$$

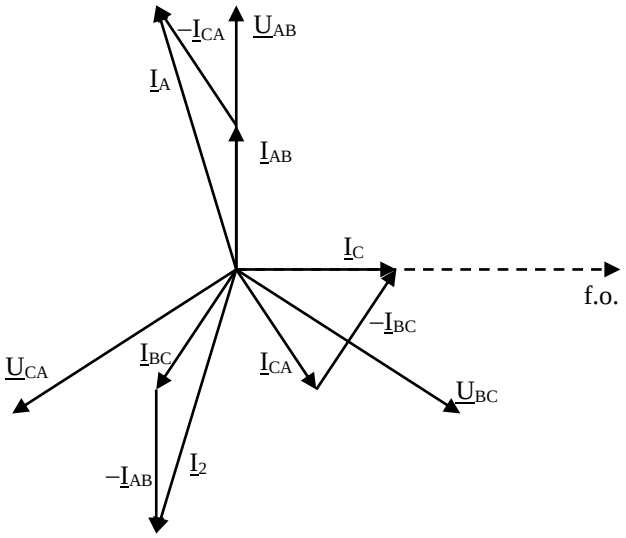
Međufazne struje su:

$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = j20 - 10 + j17{,}3 = (-10 + j37{,}3)$ [A] $= 38{,}6 \cdot e^{j105°}$ [A];

$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = -10 - j17{,}3 - j20 = (-10 - j37{,}3)$ [A] $= 38{,}6 \cdot e^{-j105°}$ [A] i

$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = 10 - j17{,}3 + 10 + j17{,}3 = 20$ [A] $= 20 \cdot e^{j0°}$ [A].

Fazorski dijagram:



12.91. ----- Impedanse Z_D iz trougla pretvoriti u zvezdi, pa je:

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{Z}_D \cdot \underline{Z}_D}{\underline{Z}_D + \underline{Z}_D + \underline{Z}_D} = \frac{\underline{Z}_D}{3} = (19 + j14)\,[\Omega].$$

Impedanse $\underline{Z}_C$ i $\underline{Z}_E$ su sada redno vezane, pa je njihova ukupna impedansa jednaka:

$\underline{Z}_{CE} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_E = (20 + j15)$ [Ω].

Impedanse Z_{CE} su paralelno vezane sa impedansama Z_B pa je njihova ekvivalentna impedansa po fazi jednaka:

$$\underline{Z}_{BCE} = \frac{\underline{Z}_{CE} \cdot \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{CE} + \underline{Z}_B} = \frac{(20 + j15) \cdot (20 + j25)}{20 + j15 + 20 + j25} = (10{,}31 + j9{,}69)\,[\Omega].$$

Impedanse Z_{BCE} i impedanse Z_A su redno vezane pa je ukupna impedansa sistema po fazama jednaka:

$\underline{Z} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_{BCE} = (12{,}62 + j12) = 17{,}41 \cdot e^{j43{,}5°}$ [Ω].

Ukupna linijska (fazna) struja sistema je:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} = \frac{220 \cdot e^{j0}}{17{,}41 \cdot e^{j43{,}5}} = 12{,}63 \cdot e^{-j43{,}5} = (9{,}13 - j8{,}68)\,[A];$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} = \frac{220 \cdot e^{-j120}}{17{,}41 \cdot e^{j43{,}5}} = 12{,}63 \cdot e^{-j163{,}5} = (-12{,}11 - j3{,}58)\,[A];$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{220 \cdot e^{-j240}}{17{,}41 \cdot e^{j43{,}5}} = 12{,}63 \cdot e^{-j283{,}5} = 12{,}63 \cdot e^{j76{,}5} = (2{,}96 + j12{,}28)\,[A].$$

Čitaocu se ostavlja mogućnost da odredi pojedinačne fazne i linijske struje po prijemnicima.

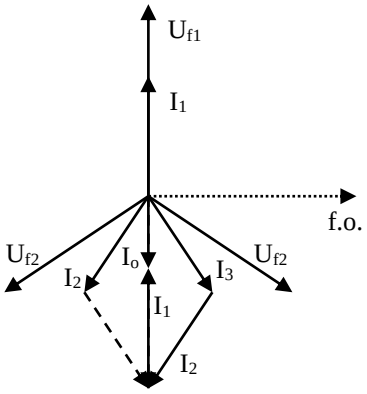
12.92. ----- a)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} = \frac{220\cdot e^{j90}}{20\cdot e^{j0}} = 11\cdot e^{j90} = j11\,[A];$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} = \frac{220\cdot e^{-j30}}{20\cdot e^{j90}} = 11\cdot e^{-j120} = (-5{,}5 - j9{,}53)\,[A];$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{220\cdot e^{-j150}}{20\cdot e^{-j90}} = 11\cdot e^{-j60} = (5{,}5 - j9{,}53)\,[A],$$

$$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -j8{,}06 = 8{,}06\cdot e^{-j90}\,[A]$$



b) $\underline{I}_1' + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{I}_1' = -(I_1 + I_2) = -(-5{,}5 - j9{,}53 + 5{,}5 - j9{,}53) = j19{,}06 = 19{,}06\cdot e^{j90}$ [A].
Kako je $I_1' = U_{f1}/Z_1' \;\Rightarrow$

$$\underline{Z}_1' = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{I}_1} = \frac{220\cdot e^{j90}}{19{,}06\cdot e^{j90}} = 11{,}54\cdot e^{j0} = 11{,}54\,[\Omega] \Rightarrow Z_1' = R_1' = 11{,}54\,[\Omega].$$

Čitaocu nije problem da sam nacrta fazorski dijagram za ovaj slučaj.

12.93. -----
Fazni naponi generatora (mreže) u kompleksnom obliku su:
$\underline{U}_{f1} = 240\cdot e^{j0} = 240$ [V]; $\underline{U}_{f2} = 240\cdot e^{-j120} = (-120 - j207{,}84)$ [V]; $\underline{U}_{f3} = 240\cdot e^{-j240} = (-120 + j207{,}84)$ [V].
Kompleksne admitanse po fazama iznose:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{20\cdot e^{j0}} = 0{,}05\cdot e^{j0} = 0{,}05\,[S];$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{20\cdot e^{j90}} = 0{,}05\cdot e^{-j90} = -j0{,}05\,[S],$$

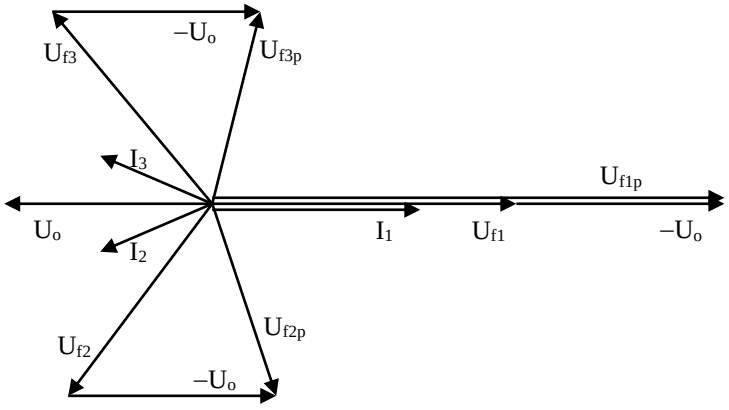
$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{20\cdot e^{-j90}} = 0{,}05\cdot e^{j90} = j0{,}05\,[S].$$

Napon između dvaju zvezdišta U_o iznosi:

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{240\cdot 0{,}05 + (-120 - j207{,}84)\cdot(-j0{,}05) + (-120 + j207{,}84)\cdot j0{,}05}{0{,}05 - j0{,}05 + j0{,}05} = -175{,}7\,[V]$$

Fazni naponi na prijemniku su:
$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = 240 + 175{,}7 = 415{,}7$ [V];
$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = -120 - 207{,}84 + 175{,}7 = (57{,}7 - j207{,}84) = 215{,}7\cdot e^{-j74{,}5°}$ [V] i
$\underline{U}_{f3p} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o = -120 + j207{,}84 + 175{,}7 = (57{,}7 + j207{,}84) = 215{,}7\cdot e^{j74{,}5°}$.
Fazne, tj. linijske struje sistema su:
$\underline{I}_1 = \underline{U}_{f1p}\cdot\underline{Y}_1 = 20{,}78\cdot e^{j0}$ [A]; $\underline{I}_2 = \underline{U}_{f2p}\cdot\underline{Y}_2 = 10{,}79\cdot e^{-j154{,}5°}$ [A] i $\underline{I}_3 = \underline{U}_{f3p}\cdot\underline{Y}_3 = 10{,}79\cdot e^{j164{,}5°}$ [A].

Fazorski dijagram napona i struja:



12.94. ----- $\underline{U}_o = 0$ ($\underline{Y}_o = \infty$) , pa su fazni naponi genertaora (mreže) jednaki faznim naponima potrošača. Struje po fazama su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} = \frac{254 \cdot e^{j0}}{16 + j12} = \frac{254}{16 + j12} = (10{,}16 - j7{,}62)[A] = 12{,}7 \cdot e^{-j36{,}87}[A];$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} = \frac{254 \cdot e^{-j120}}{14 - j21} = (4{,}47 - j9{,}04)[A] = 10{,}08 e^{-j63{,}67}[A];$$

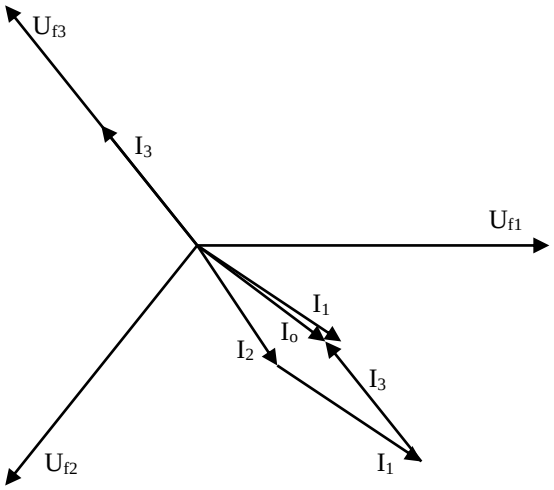
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{254 \cdot e^{-j240}}{25} = (-5{,}08 + j8{,}8)[A] = 10{,}16 \cdot e^{j240}[A]$$

$$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (9{,}55 - j7{,}86)[A] = 12{,}39 \cdot e^{-j39{,}5}[A].$$

Aktivne snage po fazama su:

$P_1 = I_1^2 R_1 = 12{,}7^2 \cdot 16 = 2\,581$ [W]; $P_2 = I_2^2 R_2 = 10{,}08^2 \cdot 14 = 1\,420$ [W] i $P_3 = I_3^2 R_3 = 10{,}16^2 \cdot 25 = 2\,581$ [W].

Fazorski dijagram napona i struja:



12.95. -----

a) Fazni naponi generatora (mreže) u kompleksnom obliku su:

$\underline{U}_{f1} = 220 \cdot e^{j0} = 220$ [V]; $\underline{U}_{f2} = 220 \cdot e^{-j120} = (-110 - j190)$ [V]; $\underline{U}_{f3} = 220 \cdot e^{-j240} = (-110 + j190)$ [V].

Kompleksne admitanse po fazama iznose:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{10 \cdot e^{j0}} = 0{,}1 \cdot e^{j0} = 0{,}05[S];$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{20 \cdot e^{j60}} = 0{,}05 \cdot e^{-j60} = (0{,}025 - j0{,}0433)[S],$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{20 \cdot e^{-j60}} = 0{,}05 \cdot e^{j60} = (0{,}025 + j0{,}0433)[S];$$

$$\underline{Y}_o = \frac{1}{\underline{Z}_o} = \frac{1}{60 \cdot e^{j0}} = 0{,}0167 \cdot e^{j0} = 0{,}0167[S]$$

Napon između dvaju zvezdišta U_o iznosi:

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_o} = \frac{220 \cdot e^{j0} 0{,}1 \cdot e^{j0} + 220 \cdot e^{-j120} \cdot 0{,}05 \cdot e^{-j60} + 220 \cdot e^{-j240} \cdot 0{,}05 \cdot e^{j60}}{0{,}1 + 0{,}025 - j0{,}0433 + 0{,}025 + j0{,}0433 + 0{,}0167} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{22 \cdot e^{j0} + 12 \cdot e^{-j180} + 12 \cdot e^{-j180}}{0{,}1667} = \frac{22 \cdot e^{j0} + 22 \cdot e^{-j180}}{0{,}1667} = \frac{22 \cdot [\cos 0 + j \sin 0 + \cos(-180) + j \sin(-180)]}{0{,}1667} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{22 \cdot [1 + j0 - 1 - j0]}{0{,}1667} = 0$$

Struja u nultom (povratnom) vodu je:

$$\underline{I}_o = \underline{U}_o \cdot \underline{Y}_o = 0 \text{ [A]}.$$

c) Zamenom impedansi Z_2 i Z_3 nastaju sledeće vrednosti impedansi, odnosno admitansi:

$$\underline{Z}_1' = \underline{Z}_1 = 10\cdot e^{j0}\,[\Omega] \Rightarrow \underline{Y}_1' = \frac{1}{\underline{Z}_1'} = \frac{1}{10\cdot e^{j0}} = 0{,}1\cdot e^{j0} = 0{,}05\,[\mathrm{S}];$$

$$\underline{Z}_2' = \underline{Z}_3 = 20\cdot e^{-j60}\,[\Omega] \Rightarrow \underline{Y}_2' = \frac{1}{\underline{Z}_2'} = \frac{1}{20\cdot e^{-j60}} = 0{,}05\cdot e^{j60} = (0{,}025 + j0{,}0433)\,[\mathrm{S}],$$

$$\underline{Z}_3' = \underline{Z}_2 = 20\cdot e^{j60}\,[\Omega] \Rightarrow \underline{Y}_3' = \frac{1}{\underline{Z}_3'} = \frac{1}{20\cdot e^{j60}} = 0{,}05\cdot e^{-j60} = (0{,}025 - j0{,}0433)\,[\mathrm{S}];$$

$$\underline{Y}_o = \frac{1}{\underline{Z}_o} = \frac{1}{60\cdot e^{j0}} = 0{,}0167\cdot e^{j0} = 0{,}0167\,[\mathrm{S}]$$

Napon između dvaju zvezdišta U_o iznosi:

$$\underline{U}_o' = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1' + \underline{U}_2\underline{Y}_2' + \underline{U}_3\underline{Y}_3'}{\underline{Y}_1' + \underline{Y}_2' + \underline{Y}_3' + \underline{Y}_o} = \frac{220\cdot e^{j0}\,0{,}1\cdot e^{j0} + 220\cdot e^{-j120}\cdot 0{,}05\cdot e^{j60} + 220\cdot e^{-j240}\cdot 0{,}05\cdot e^{-j60}}{0{,}1 + 0{,}025 + j0{,}0433 + 0{,}025 - j0{,}0433 + 0{,}0167} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o' = \frac{22\cdot e^{j0} + 12\cdot e^{-j60} + 12\cdot e^{-j300}}{0{,}1667} = \frac{22\cdot e^{j0} + 12\cdot e^{-j60} + 12\cdot e^{j60}}{0{,}1667} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o' = \frac{22 + 12(\cos(-60) + j\sin(-60)) + 12\cdot(\cos 60 + j\sin 60)}{0{,}1667} = \frac{22 + 12\cdot 2\cdot\cos 60}{0{,}1667} = \frac{34}{0{,}1667} = 198\,[\mathrm{V}]$$

Struja u povratnom vodu sada iznosi:

$$\underline{I}_o' = \underline{U}_o'\cdot\underline{Y}_o = 198\cdot e^{j0}\cdot 0{,}0167\cdot e^{j0} = 3{,}3\cdot e^{j0} = 3{,}3\ [\mathrm{A}].$$

c) Pošto je napon $\underline{U}_o = 0$, fazni naponi generatora i potrošača su jednaki, pa su struje sistema:

$\underline{I}_1 = \underline{U}_{f1}\cdot\underline{Y}_1 = 220\cdot e^{j0}\cdot 0{,}1\cdot e^{j0} = 22\cdot e^{j0} = 22\ [\mathrm{A}]$;

$\underline{I}_2 = \underline{U}_{f2}\cdot\underline{Y}_2 = 220\cdot e^{-j120}\cdot 0{,}05\cdot e^{j60} = 11\cdot e^{-j60}\ [\mathrm{A}]$ i

$\underline{I}_3 = \underline{U}_{f3}\cdot\underline{Y}_3 = 220\cdot e^{j120}\cdot 0{,}05\cdot e^{-j60} = 11\cdot e^{j60}\ [\mathrm{A}]$.

Struja nultog voda je:

$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 22 + 11\cdot(\cos(-60) + j\sin(-60)) + 11\cdot(\cos 60 + j\sin 60) = 22 + 11\cdot 2\cdot\cos 60 = 33\ [\mathrm{A}]$.

Čitaocu nije teško da sam nacrta odgovarajući fazorski dijagram, koristeći napon i struju potrošača u eksponencijalnom obliku.

12.96. -----

a) Admitanse po vodovima su:

$$\underline{Z}_1 = 40\cdot e^{j36{,}87}\,[\Omega] \Rightarrow \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{40\cdot e^{j36{,}87}} = 0{,}025\cdot e^{-j36{,}87} = (0{,}02 - j0{,}015)\,[\mathrm{S}];$$

$$\underline{Z}_2 = 25\cdot e^{j0}\,[\Omega] \Rightarrow \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{25\cdot e^{j0}} = 0{,}04\cdot e^{j0} = 0{,}04\,[\mathrm{S}],$$

$$\underline{Z}_3 = 20\cdot e^{-j53{,}13}\,[\Omega] \Rightarrow \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{20\cdot e^{-j53{,}13}} = 0{,}05\cdot e^{j53{,}13} = (0{,}03 + j0{,}04)\,[\mathrm{S}].$$

Napon između dvaju zvezdišta U_o iznosi:

$$\underline{U}_o = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1' + \underline{U}_2\underline{Y}_2' + \underline{U}_3\underline{Y}_3'}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{220\cdot e^{j0}\,0{,}025\cdot e^{-j36{,}87} + 220\cdot e^{-j120}\cdot 0{,}04\cdot e^{j0} + 220\cdot e^{-j240}\cdot 0{,}05\cdot e^{j53{,}13}}{0{,}02 - j0{,}015 + 0{,}04 + 0{,}03 + j0{,}04} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{-10{,}94 - j9{,}61}{0{,}09 + j0{,}025} = (-140{,}4 - j67{,}8)\,[\mathrm{V}] = 155{,}9\cdot e^{-j154{,}3}\,[\mathrm{V}].$$

Fazni naponi na potrošaču iznose:

$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = (\ 360{,}4 + j67{,}8\ )\ [\mathrm{V}] = 366{,}7\cdot e^{j10{,}7}\ [\mathrm{V}]$;

$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = (\ 30{,}4 - j123{,}2\ )\ [\mathrm{V}] = 126{,}9\cdot e^{-j76{,}1}\ [\mathrm{V}]$;

$\underline{U}_{f3p} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o = (\ 30{,}4 + j258{,}8\ )\ [\mathrm{V}] = 260{,}6\cdot e^{j83{,}3}\ [\mathrm{V}]$.

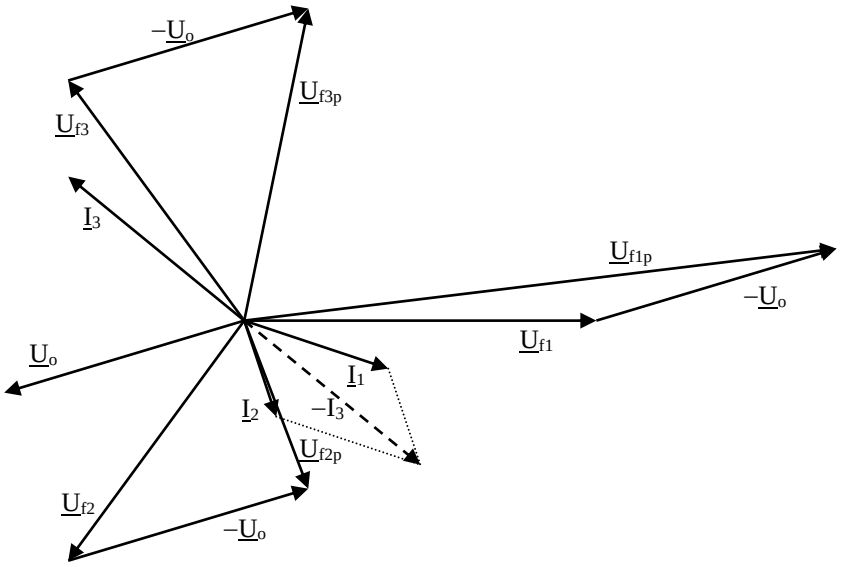
Struje sistema su:

$\underline{I}_1 = \underline{U}_{f1p}\cdot\underline{Y}_1 = (\ 8{,}225 - j4{,}05\ )\ [\mathrm{A}] = 9{,}168\cdot e^{-j26{,}2}\ [\mathrm{A}]$;

$\underline{I}_2 = \underline{U}_{f2p}\cdot\underline{Y}_2 = (\ 1{,}216 - j4{,}928\ )\ [\mathrm{A}] = 5{,}076\cdot e^{-j76{,}1}\ [\mathrm{A}]$ i

$\underline{I}_3 = \underline{U}_{f3p}\cdot\underline{Y}_3 = (-9{,}44 + j8{,}98\ )\ [\mathrm{A}] = 13{,}029\cdot e^{j136{,}4}\ [\mathrm{A}]$.

Fazorski dijagram:



b)

$$\underline{U}_o' = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_o} = \frac{220\cdot e^{j0}\,0{,}025\cdot e^{-j36{,}87} + 220\cdot e^{-j120}\cdot 0{,}04\cdot e^{j0} + 220\cdot e^{-j240}\cdot 0{,}05\cdot e^{j53{,}13}}{0{,}02 - j0{,}015 + 0{,}04 + 0{,}03 + j0{,}04 + 1{,}25} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o' = \frac{-10{,}94 - j9{,}61}{1{,}34 + j0{,}025} = (-8{,}295 - j7{,}017)[\mathrm{V}] = 10{,}865\cdot e^{-j139{,}8}[\mathrm{V}].$$

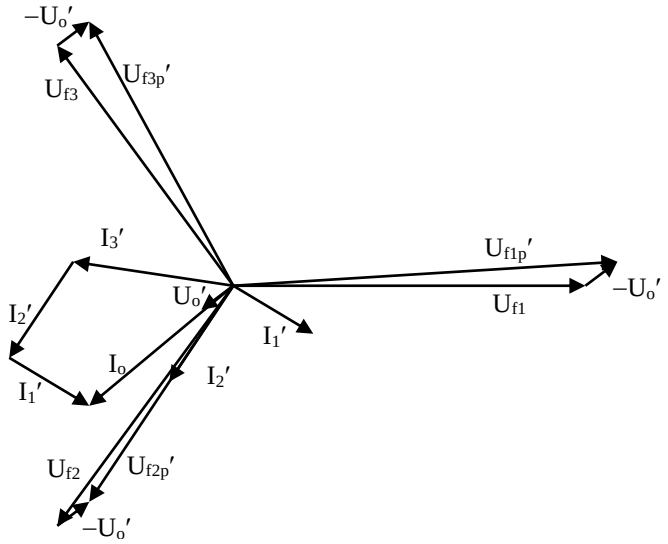
Fazni naponi na potrošaču iznose:

$\underline{U}_{f1p}' = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o' = (\ 228{,}295 + j7{,}017\ )$ [V] $= 228{,}4\cdot e^{j1{,}8}$ [V];
$\underline{U}_{f2p}' = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o' = (\ -101{,}705 - j183{,}983\ )$ [V] $= 210{,}22\cdot e^{-j118{,}9}$ [V];
$\underline{U}_{f3p}' = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o' = (\ -101{,}705 + j198{,}017\ )$ [V] $= 222{,}61\cdot e^{j117{,}2}$ [V].

Struje sistema su:

$\underline{I}_1' = \underline{U}_{f1p}'\cdot\underline{Y}_1 = (\ 4{,}671 - j3{,}284\ )$ [A] $= 5{,}71\cdot e^{-j35{,}1}$ [A] ;
$\underline{I}_2' = \underline{U}_{f2p}'\cdot\underline{Y}_2 = (\ -4{,}068 - j7{,}359\ )$ [A] $= 8{,}409\cdot e^{-j118{,}9}$ [A] i
$\underline{I}_3' = \underline{U}_{f3p}'\cdot\underline{Y}_3 = (-10{,}972 + j1{,}872\ )$ [A] $= 11{,}131\cdot e^{j170{,}3}$ [A].
$\underline{I}_o = \underline{U}_o'\cdot\underline{Y}_o = (-10{,}369 - j8{,}771\ )$ [A] $= 13{,}581\cdot e^{-j139{,}8}$ [A].

Fazorski dijagram:



12.97. -----

a)

$$\underline{U}_o = \frac{\dfrac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} + \dfrac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{j11 + (-5{,}5 - j9{,}53) + (5{,}5 - j9{,}53)}{0{,}05 - j0{,}05 + j0{,}05} = -j161{,}2\,[\mathrm{V}] = 161{,}2 \cdot e^{-j90}\,[\mathrm{V}].$$

Fazni naponi na potrošaču iznose:

$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = j381{,}2$ [V] $= 381{,}2 \cdot e^{j90}$ [V];

$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = (\ 190{,}5 + j51{,}2\ )$ [V] $= 197 \cdot e^{j15}$ [V];

$\underline{U}_{f3p} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o = (\ -190{,}5 + j51{,}2\ )$ [V] $= 197{,}3 \cdot e^{j165}$ [V].

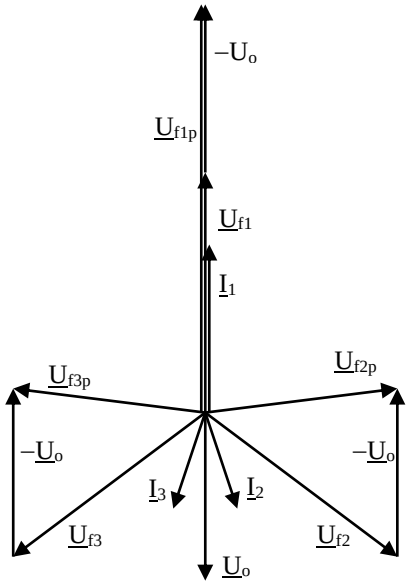
Struje sistema su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1p}}{\underline{Z}_1} = j19{,}06\,[\mathrm{A}] = 19{,}06 \cdot e^{j90}\,[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f2p}}{\underline{Z}_2} = (2{,}56 - j9{,}53)\,[\mathrm{A}] = 9{,}86 \cdot e^{-j75}\,[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{f3p}}{\underline{Z}_3} = (-2{,}56 - j9{,}53)\,[\mathrm{A}] = 9{,}86 \cdot e^{-j105}\,[\mathrm{A}].$$

Fazorski dijagram napona i struja prijemnika:



b)

$$\underline{U}_o' = \frac{\dfrac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} + \dfrac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} + \dfrac{1}{\underline{Z}_o}} = \frac{j11 + (-5{,}5 - j9{,}53) + (5{,}5 - j9{,}53)}{0{,}05 - j0{,}05 + j0{,}05 + 0{,}45} = -j16{,}1\,[\mathrm{V}] = 16{,}1 \cdot e^{-j90}\,[\mathrm{V}].$$

Fazni naponi na potrošaču iznose:

$\underline{U}_{f1p}' = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o' = j236{,}1$ [V] $= 236{,}1 \cdot e^{j90}$ [V];

$\underline{U}_{f2p}' = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o' = (\ 190{,}5 - j93{,}9\ )$ [V] $= 212{,}4 \cdot e^{-j26{,}2}$ [V];

$\underline{U}_{f3p}' = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o' = (\ -190{,}5 - 93{,}9\ )$ [V] $= 212{,}4 \cdot e^{-j153{,}8}$ [V].

Struje sistema su:

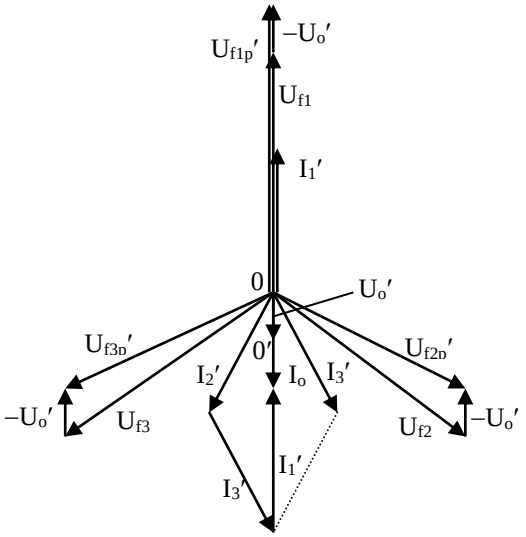
$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{U}_{f1p}'}{\underline{Z}_1} = j11{,}805\,[A] = 11{,}805 \cdot e^{j90}\,[A],$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_{f2p}'}{\underline{Z}_2} = (-4{,}695 - j9{,}525)\,[A] = 10{,}62 \cdot e^{-j116{,}3}\,[A],$$

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_{f3p}'}{\underline{Z}_3} = (4{,}695 - j9{,}525)\,[A] = 10{,}62 \cdot e^{-j63{,}7}\,[A].$$

$$\underline{I}_o = \underline{U}_o' \cdot \underline{Y}_o = -j7{,}245\,[A] = 7{,}245 \cdot e^{-j90}\,[A].$$

Fazorski dijagram napona i struja



12.98. ----- Kako su impedanse vodova, kao i nultog voda, zanemarljive (admitansa beskonačna), napon U_o je jednak nuli. Zbog toga su fazni naponi prijemnika jednaki faznim naponima generatora.

Struje prijemnika, koje su ujedno i linijske struje sistema iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} = \frac{220 \cdot e^{j0}}{10 \cdot e^{j0}} = 22 \cdot e^{j0} = 22\,[A];$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} = \frac{220 \cdot e^{-j120}}{15{,}81 \cdot e^{j18{,}43}} = 13{,}92 \cdot e^{-j138{,}43} = (-10{,}41 - j9{,}24)\,[A];$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3} = \frac{220 \cdot e^{-j240}}{20{,}4 \cdot e^{-j11{,}31}} = 10{,}78 \cdot e^{-j228{,}69} = (-7{,}12 + j8{,}097)\,[A],$$

$$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 22 - 10{,}41 - j9{,}24 - 7{,}12 + j8{,}097 = 4{,}47 - j1{,}143 = 4{,}61 \cdot e^{-j14{,}34}\,[A].$$

Aktivna snaga prijemnika je:

$P = P_1 + P_2 + P_3 = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 = 22^2 \cdot 10 + 13{,}92^2 \cdot 15 + 10{,}78^2 \cdot 20 = 10\,070{,}664$ [W] ≈ 10 [kW]

Reaktivna snaga prijemnika je:

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_1^2 \cdot X_1 + I_2^2 \cdot X_2 + I_3^2 \cdot X_3 = 22^2 \cdot 0 + 13{,}92^2 \cdot 5 + 10{,}78^2 \cdot (-4) \Rightarrow$

$Q = 968{,}83 - 464{,}83 = 504$ [kVAr].

Prividna snaga sistema je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{10070{,}66^2 + 504^2} = 10083{,}26\,[VA].$$

12.99. -----

$$\underline{U}_o = \frac{\dfrac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_1} + \dfrac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_2} + \dfrac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\dfrac{220\cdot e^{j0}}{10\cdot e^{j0}} + \dfrac{220\cdot e^{-j120}}{15{,}81\cdot e^{j18{,}43}} + \dfrac{220\cdot e^{j120}}{20{,}4\cdot e^{-j11{,}31}}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15+j5} + \dfrac{1}{20-j4}} = \frac{22\cdot e^{j0} + 13{,}92\cdot e^{-j138{,}43} + 10{,}78\cdot e^{j131{,}31}}{0{,}1 + 0{,}06 - j0{,}02 + 0{,}048 + j0{,}0096} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = \frac{22 - 10{,}41 - j9{,}24 - 7{,}12 + j8{,}097}{0{,}208 - j0{,}0104} = \frac{4{,}47 - j1{,}143}{0{,}208 - j0{,}0104} = \frac{0{,}9298 + j0{,}0465 - j0{,}2377 + 0{,}0119}{0{,}04337} = \frac{0{,}9417 - j0{,}1912}{0{,}04337} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_o = (21{,}71 - j4{,}41)[\mathrm{V}]$$

Fazni naponi na potrošaču iznose:

$\underline{U}_{f1p} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_o = (\ 198{,}29 + j4{,}41\ )$ [V] = $198{,}34\cdot e^{j1{,}27}$ [V]

$\underline{U}_{f2p} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_o = (\ -131{,}71 - j186{,}12\ )$ [V] = $228{,}01\cdot\cdot e^{-j125{,}29}$ [V];

$\underline{U}_{f3p}' = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_o' = (\ -131{,}71 + j194{,}94\ )$ [V] = $235{,}26\cdot e^{j123{,}96}$ [V].

Struje sistema su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{f1p}}{\underline{Z}_1} = \frac{198{,}34\cdot e^{j1{,}27}}{10\cdot e^{j0}} = 19{,}834\cdot e^{j1{,}27} = (19{,}83 + j0{,}44)[\mathrm{A}];$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{f2p}}{\underline{Z}_2} = \frac{228{,}01\cdot e^{-j125{,}29}}{15{,}81\cdot e^{j18{,}43}} = 14{,}42\cdot e^{-j144{,}32} = (-11{,}71 - j8{,}53)[\mathrm{A}];$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{f3p}}{\underline{Z}_3} = \frac{235{,}26\cdot e^{j123{,}96}}{20{,}4\cdot e^{-j11{,}31}} = 11{,}53\cdot e^{j135{,}27} = (-8{,}19 + j8{,}11)[\mathrm{A}],$$

$$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Aktivna snaga prijemnika je:

$P = P_1 + P_2 + P_3 = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 = 19{,}834^2\cdot 10 + 14{,}42^2\cdot 15 + 11{,}53^2\cdot 20 = 9\ 711{,}75$ [W],

Reaktivna snaga prijemnika je:

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_1^2\cdot X_1 + I_2^2\cdot X_2 + I_3^2\cdot X_3 = 19{,}834^2\cdot 0 + 14{,}42^2\cdot 5 + 11{,}53^2\cdot(-4\ ) = 507{,}92$ [kVAr]

Prividna snaga sistema je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{9711{,}75^2 + 507{,}92^2} = 9725{,}02[\mathrm{VA}].$$

12.100. ----- Pošto je $\underline{U}_{f1} + \underline{U}_{f2} + \underline{U}_{f3} = 0$ ($\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0$) $\Rightarrow$ $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, bez obzira da li je veza navoja generatora u zvezdu ili trougao. Zašto?

12.101. ----- Pošto je prijemnik vezan u trougao, a generator u zvezdu, efektivna vrednost faznog napona prijemnika je:

$U_{fp} = U = \sqrt{3}\cdot E = 10\sqrt{3}[\mathrm{kV}]$, gde je U efektivna vrednost linijskog napona (međufazni napon).

Prividna snaga prijemnika je:

$S = 3\cdot U_f\cdot I_f = 3\cdot U_f\cdot U_f/Z = 3\cdot U_f^2/Z = 3\cdot 100\cdot 10^6\cdot 3/300 = 3\cdot 10^6$ [VA] = 3 [MVA].

Aktivna snaga prijemnika je:

$P = S\cdot\cos\varphi = 3\cdot 0{,}8 = 2{,}4$ [MW].

Reaktivna snaga prijemnika je:

$$Q = -\sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = -1{,}8[\mathrm{MVAr}]$$

(predznak ″ – ″ je zbog kapacitivnog karaktera opterećenja)

12.102. Kada je jedna faza u prekidu, struja jedne grane prijemnika ne postoji. Efektivna vrednost napona redne veze druge dve grane prijemnika je $U_{12} = \sqrt{3}E$ (vidi rešenje zadatka 12.60.).

Kako se radi o čisto aktivnom prijemniku ($\cos\varphi = 1$), njegova aktivna snaga je jednaka:

$$P = {I_{12}}^2\cdot R_{12} = \left(\frac{\sqrt{3}E}{2R}\right)^2\cdot 2R = \frac{3E^2}{2R} = 6[\mathrm{kW}] \Rightarrow \frac{E^2}{R} = 4.$$

Nakon zatvaranja prekinute faze (prekidača) aktivna snaga sistema je:

$$P' = 3 \cdot I^2 R = 3 \cdot \left(\frac{E}{R} \right)^2 \cdot R = 3 \cdot \frac{E^2}{R} = 3 \cdot 4 = 12 [\text{kW}].$$

Dakle, uspostavljanjem treće faze snaga prijemnika se povećala za dva puta.

12.103. ----- Snaga prijemnika sa zatvorenim prekidačom (sa sve tri faze) iznosi:

$$P = 3 \cdot I_f{}^2 \cdot R = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}E}{R} \right)^2 \cdot R = 3 \cdot \frac{3E^2}{R} = \frac{9E^2}{R} = 10 [\text{kW}] \Rightarrow \frac{E^2}{R} = \frac{10}{9}$$

Prekidom faze (prekidač se otvori) nastaje paralelna veza dvaju otpora, i to 2R i R (gde je 2R u stvari redna veza dva otpora R. Vidi rešenje zadatka 12.61.).

Efektivna vrednost napona na paralelnoj vezi je:

$$U_p = \sqrt{3}E .$$

Aktivna snaga prijemnika sada iznosi:

$$P' = I_p{}^2 \cdot R_p = \left(\frac{U_p}{R_p} \right)^2 \cdot R_p = \frac{U_p{}^2}{R_p} = \frac{\left(\sqrt{3}E\right)^2}{\frac{2R \cdot R}{2R + R}} = \frac{3E^2}{\frac{2}{3}R} = \frac{9}{2} \cdot \frac{E^2}{R} = \frac{9}{2} \cdot \frac{10}{9} = 5 [\text{kW}].$$

Tražena promena snage na prijemniku iznosi:

$\Delta P = P' - P = 5 - 10 = -5$ [KW].

Snaga je, nakon prekida jedna faze, smanjena za dva puta.

ДОДАТАК

ОБРТНО МАГНЕТНО ПОЉЕ

Тесла као проналазач. Откриће трофазног магнетног поља.

Никола Тесла се родио у Лици, у селу Смиљану код Госпића 10. 07. 1856 године. Његов отац Милутин Тесла био је српски свештеник у Смиљану а касније прота у Госпићу. Милутин је био одличан беседник, филозоф и писац и располагао је са великом библиотеком коју је Никола још као дете много користио. Тесла је у својој страсти за читањем ишао толико далеко, да му је отац због нежног здравља често забрањивао да чита. Али кад све то није помогло сакривали су испред њега свећу и закључавали библиотеку. Ова страст за учењем и читањем постајала је све јача, тако да је као студент технике у Грацу био у стању да ради дневно 18 до 20 сати. За време рада у Америци у лабораторијама било је код њега обично радно време 16 до 18 сати дневно, а врло је често читаве дане и ноћи проводио у непрекидном раду без одмора. Умерен живот, уздржавање од свих врста штетних уживања, учинили су га толико издржљивим да се Тесла у дубокој старости осећао као млад и здрав. Непрекидни рад и читање у младим годинама пробудили су у њему интерес за природне науке и за технику и Тесла је имао да издржи велику борбу док није остварио свој циљ. Отац и мајка су хтели да им син буде свештеник. Мајка му је била такође из старе свештеничке фамилије, а у то време свештеници су били врло цењени и образовани људи. Тесла би вероватно и морао поћи путем, који му је отац одредио, да се нису касније десили извесни догађаји, који су били од директног утицаја на његов даљи живот.

Теслина мајка такође је била врло даровита жена. Њу је Тесла много ценио и волео.Тесла је свој проналазалчки таленат наследио од мајке која је исто тако била даровита жена.

Као проналазач Тесла је располагао огромном имагинацијом и институцијом и великим богатством мисли и идеја. Његов научни рад се сасвим разликује од обичног и уобичајеног на пољу технике и проналазака. И ако је читаве деценије проводио у експериментисању ипак ниједан његов проналазак није резултат експеримента, већ дугог претходног размишљања. Све што је учинио остварио је прво у својим мислима, логички развијајући мисао једну за другом док не дође тако до готовог дела, које тек тада ексериментално провери и остварује. Тако Тесла ствара прво скице, развија затим поједине делове и најзад ствара из свега тога конструктивну целину. Овај начин проналажења и научног стварања без цртежа и планова без експеримената и модела јединствен је у историји технике. Ово показује велику моћ размишљања, памћења и логике. Тиме се потврђује да је Тесла не само проналазач већ уметник и филозоф.

Прво његово велико откриће, обртно магнетно поље показује најбоље начин Теслиног рада.

Као студент технике у Грацу 1878. године имао је Тесла први пут прилике да види у раду једну једносмерну динамо машину. Тесла је при раду са овом машином увидео њене велике недостатке.

У то време употребљаване су једносмерне динамо машине за производњу струје за осветљење као и за рад мотора. Пренос енергије помоћу ових машина био је ограничен на мале количине и даљине. Даљине од неколико километара чиниле су цео пренос врло неретабилним. Динамо машине са наизменичном струјом биле су неупотребљиве, јер није постојао погодан мотор за овакве струје. На пренос великих количина електричне енергије на веће даљине није се могло ни помишљати. Проблем је био електромотор за наизменичну струју. Тесли је било јасно да је проналазак оваквог мотора једно велико дело, јер би се са њим електрична енергија могла преносити на веће даљине.Велике водене снаге стајале су неискориштене и требало је смислити начин како их искористити ради добробити читавог човечанства. Разговор младог студента Тесле са познатим професором Пешлом тада није дао резултате, јер му је Пешл објаснио да је немогуће решити проблем мотора наизменичних струја. Комутатор и четкице су били по мишљењу Пешловом битни део сваког електромотора.

Теслине мисли су биле изазване овим великим проблемом, и он је од тог времена почео да га испитује. Увидео је да у целом дотадашњем систему има много нелогичности. Грамова динамо машина (машина за једносмерну струју) производи магнетно поље, које делује стално у исто смеру. Кроз то поље креће се прстенаста арматура (навој) у којој се производи наизменична струја. Ова се струја помоћу комутатора претвара у једносмерну струју, одводи се у мотор исте конструкције, као и динамо машина, и тамо се преко комутатора претвара поново у наизменмичну струју, да би се у мотору претворила у механички рад. При оваквом претварању енергије, дакле, имамо двоструку комутацију, прво у динамо машини из наизменичне струје у једносмерну, и друго у мотору из једносмерне у наизменичну. Природа мора да је оставила могућност да се ова двострука трансформација избегне, само људи нису били дотле у стању да ове тајне природе открију. Овакво откриће претстаљало би читаву револуцију појмова и

индустрије, јер би омогућило пренос енергије на веће даљине. Тесла је у својим мислима конструисао разне моторе, али се они нису могли окретати. Због тога је он све те моторе у својим мислима један по један одбацивао.

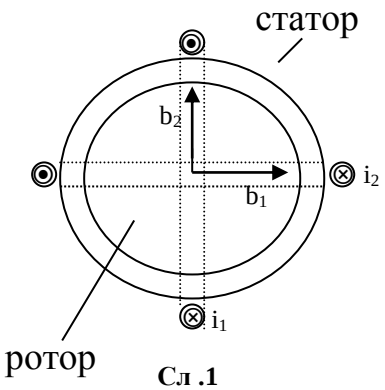
Тесла је из дана у дан био обузет овим мислима по који пут му је изгледало да је дошао до решења али коначна анализа би потврдила да није био на правом путу. 1881. године Тесла је напустио правац којим се до тада кретао и пошао је новим путем. Он је у мислима конструсиао динамомашину у којој су се магнетни полови окретали а арматура (навој) била непомична. Непокретна арматура била је снабдевена са калемима и у њој је требало да се окреће магнетно точак. У арматури мотора требало је распоредити калеме тако, да се изазове деловање магнетног поља не у једном правцу већ у обртном смеру. Дакле то што је наука сматрала за немогуће Тесла је био при самом циљу решења.

Прогрес је међутим био тежак. Ма како размештао калеме мотора, наизменична струја у калемима мотора стварала је наизменично магнетно поље, које је осциловало исто онако као што се наизменична струја мењала у генератору. Обртања магнетног поља није било. Тесла је почео са једним патром калема и ишао је даље, пробао је са два и са више пари. Обртање код једног пара није могуће. Код два пара калема ствар је могућа, али није задовољавајућа. Ако ове калеме вежемо тако, да кроз њих пролази иста струја, ствара се такође пулзирајуће (лево-десно) поље. Овакво поље није обртно што значи и није решење за наизменични мотор. Решење је било све ближе и ближе. У почетку 1882. године Тесла је констатовао да ће мотор са два пара калема дати обртно магнетно поље, ако кроз сваки пар калемова протекну две посебне струје, које су у извесном временском помаку, тако да у једном пару струја има своју максималну вредност, док је у другом пару калема струја једнака нули.На овај начин, док једна струја постепено расте од нуле до максималне вредности друга треба да пада са максималне вредности на нулу. На тај начин је у арматури мотора добио магнетно поље обртног смера. То је било велико откриће на основу којег је био могућ пренос електричне енергије на веће удаљености. Тесла је за даљих пет година борбе и рада ово откриће успео да усаврши и спроведе у дело. То је постигао помоћу три пара калема кроз које протичу независне струје са временским помаком T/3. Овим је остварено трофазно обртно магнетно поље, које ротира у једном смеру константном јачином. Ово трофазно обртно магнетно поље се још назива и Теслино поље.

Теслино откриће обртног магнетног поља без сумње је једно од највећих дела генија људског. Његов циљ, био је вредан десетогодишње борбе и напора јер без обртног магнетног поља данас се не може ни замислити нормалан живот.

Теслин рад се није задржао само на овоме али оно што је циљ овог рада завршава се на овоме. Поседује преко сто званично признатих патената а много више необјављених и преузетих.

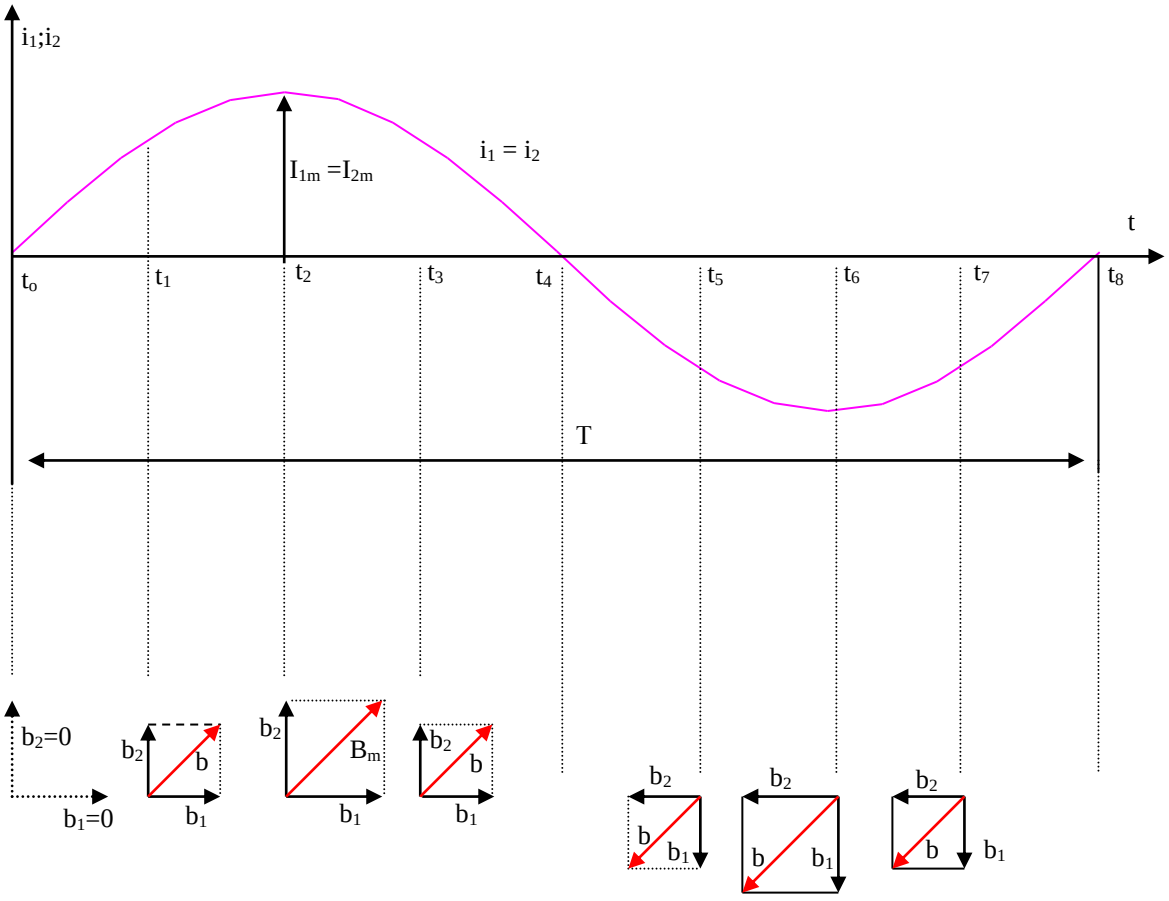
ПУЛЗИРАЈУЋЕ МАГНЕТНО ПОЉЕ



Сл .1

Ако на статору електричне машине (генератор, електромотор) имамо два навоја са просторним помаком од 90°, као на слици 1, тада ће сваки од тих навоја стварати своје магнетно поље индукције B. Смер магнетног поља одредимо правилом десне руке, које гласи:
Обухватимо навој тако да нам савијени прсти показују смер струје, док ће испружени палац показати смер магнетног поља у центру навоја.

Наизменичне струје i_1 односно i_2 стварају магнетна поља индукције b_1 и b_2. Струје i_1 и i_2 су временски промењљиве, мењају се по смеру и по интензитету, најчешће по синусној функцији. Везивањем навоја на ред, кроз њих протиче иста струја ($i_1 = i_2 = i$) па ће ова струја стварати магнетна поља b_1 и b_2 која су нормална на површину одговарајућег навоја (b_1 на S_1 а b_2 на S_2), што је приказано на слици 2.



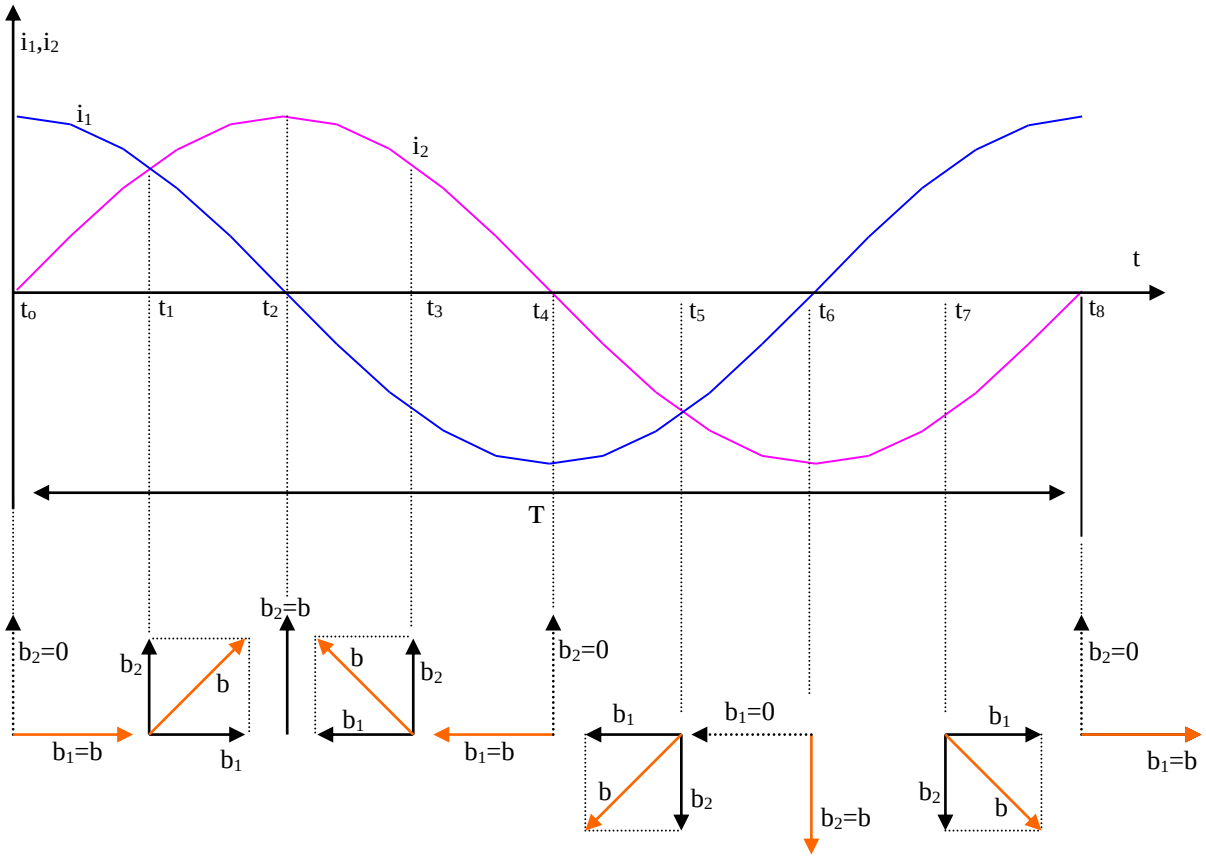
Сл.2

Пошто су струје сразмерне са магнетном индукцијом, порастом струје од 0 до максималне вредности (од t_o до t_2), магнетне индукције b_1 и b_2 се повећавају од нуле до максималне вредности. Резултантна магнетна индукција је једнака векторском збиру појединачних индукција ($\overline{B} = \overline{B}_1 + \overline{B}_2$).
На тај начин се резулантна индукција креће од нуле до максимума (вектор B не мења свој правац). Пад струје од максималне вредности ка нули повлачи за собом и пад резултантне магнетне индукције (од t_2 до t_4) по истом правцу.

Даљим порастом струје са промењеним смером (од t_4 до t_6) повећава се и магнетна индукција али у супротном смеру. Тиме се добије резултантно магнетно поље истог интензитета као у периоду од t_0 до t_2 али супротног смера. Падом струје са максималне вредности на нулу (од t_6 до t_8) опада и резултантна магнетна индукција са максималне вредности на нулу.

Иста струја која пролазећи кроз два просторно померена намотаја под углом од деведесет степени ствараће резултантно магнетно поље које ће се мењати по смеру и интензитету, али не по правцу. Такво магнетно поље се назива пулзирајуће магнетно поље (<u>ово поље није обртно</u>).

ДВОФАЗНО ОБРТНО МАГНЕТНО ПОЉЕ



Сл.3.

Пропуштањем наизменичних струја i_1 и i_2 са временским помаком од T/4 (фазни помак од $\pi/2$) кроз калемове који су просторно померени за угао од $\pi/2$ настаје обртно магнетно поље. Услови обртања овог магнетног поља су: 1. просторни помак између калемова (најчешће од $\pi/2$)

2. временски помак између струја (најчешће од T/4).

Начин добијања овог магнетног поља је представљено на слици број 3. Струје i_1 и i_2 са датим временским помаком (i_2 касни за струјом i_1 за T/4) пролазећи кроз намотаје N_1 и N_2 (према слици 1) ствара обртно магнетно поље чији је смер обртања супротан од смера казаљке на сату. Ако се жели добити смер обртања казаљки на сату потребно је променити смер струје само у једном калему. Ако се у оваквом магнетном пољу налази један стални магнет који је смештен на осовиници тада ће стални магнет настојати да се помера у истом смеру као и обртно магнетно поље (јер се ради о два магнетна поља која настоје да направе једно заједничко). На овом принципу раде једнофазни асинхрони мотори. Ротор тог мотора на себи има намотаје у којима се индукује струја (проводници ротора се налазе у променљивом магнетном пољу), па ће индукована струја имати своје магнетно поље, а самим тим ротор се понаша као стални магнет. На статору се налазе калемови N_1 и N_2 кроз које се пропусти струја i_1 и i_2 са временским помаком од T/4. На тај начин намотаји статора (арматура) мотора стварају магнетно обртно поље у којем долази до обртања ротора.

Ови мотори, тзв. једнофазни асинхрони мотори су нашли велику примену у пракси (машине за прање рубља, мешалице за бетон, косилице, разни млинови итд.).

Фазни помак између струја се може остварити на следећи начин:

1. помоћу две различите фазе (двофазни мотори)
2. помоћу једне фазе (једнофазни мотори).

Код једнофазних мотора да би се добио временски помак између струја i_2 и i_1 карактер оптерећења тих калемова је такав они стварају фазни помак од приближно $\pi/2$ (најбоље је када је тај помак $\pi/2$). То се постиже тако што се на један калем (помоћни) спаја кондензатор, па он на тај начин има претежно капацитативно оптерећење, док главни (радни) намотај располаже са RL оптерећењем. Тако постижемо одговарајући фазни помак између струја у радном и помоћном намотају, што доводи до стварања обртног магнетног поља. Код свих мотора те врсте улога кондензатора је та да покрене мотор (оствари обртно магнетно поље), а након тога он се редовито искључује.

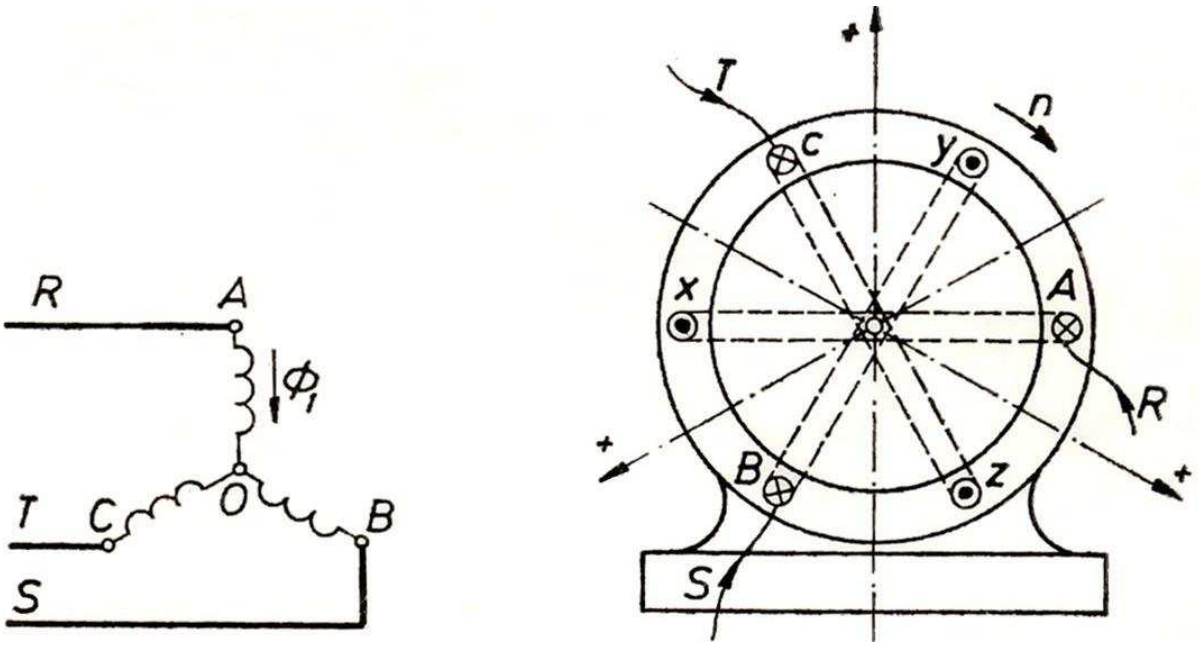
ТРОФАЗНО ОБРТНО МАГНЕТНО ПОЉЕ

Истичући основни значај наизменичне струје које јој дају предност у производњи, преносу и примени у односу на једносмерну струју, две су наизразитије, а то су могућности:

1.трансформација

2.стварање обртног магнетног поља.

Обртно магнетно поље могуће је остварити вишефазним наизменичним струјама (двофазним, трофазним...). У овом случају размотрити ћемо стварање трофазног обртног магнетног поља трофазном струјом, која чини основу електроенергетског система. За стварање обртног магнетног поља трофазном струјом потребна су три једнака намотаја (калема) који су постављени по обиму статора, међусобно померени за по 120 степени ($2\pi/3$ rad), као што је приказано на слици 4б. Крајеви намотаја могу бити спојени на један од познатих начина – звезда или троугао (сл. 4а- веза у звезду).



а) **б)**

Сл. 4.

Прикључењем трофазних намотаја на напон трофазне мреже, кроз проводнике ће потећи наизменичне струје које су међусобно фазно померене за 120 степени а временски за T/3.

Аналитички изрази за струје су ($I_{1m} = I_{2m} = I_{3m} = I_m$):

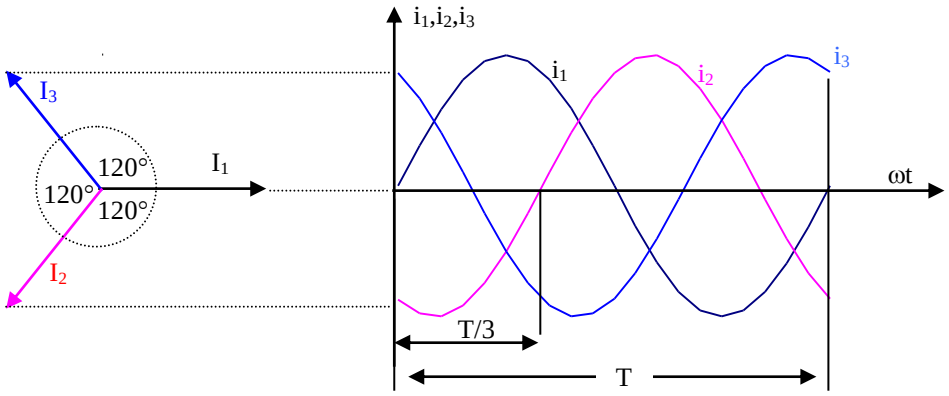
$$i_1 = I_m \sin \omega t$$
$$i_2 = I_m \sin (\omega t - 2\pi/3)$$
$$i_3 = I_m \sin (\omega t - 4\pi/3)$$

Из аналитичког (временског) израза се види да је наизменична струја у функцији са временом t и да је она различита (промењива) са променом времена посматрања. За тачно одређено време и наизменична струја је тачно одређена (синусна функција), па се због тога вредности струја i_1, i_2 и i_3 називају тренутним вредностима ($i = f(t)$).
Векторски и графички дијаграм наведених струја је дат на слици 5.

Векторски (фазорски) дијаграм представља три обртна вектора који ротирају угаоном брзином ω у смеру супротном од смера казаљке на сату.
Угао између ових вектора (фазора) представља фазни угао који уједно и говори колики је фазни помак између фазора (наизменичних струја векторски представљени). Дакле, фазни помак између струја I_1, I_2 и I_3 је 120° (слика 5а).

Временски дијаграм представља наизменичну струју која се временски мења (осцилира) по синусној функцији. Због тога је временски дијаграм дат у облику трију синусоида које су временски померене за T/3 (сл. 5б).

Фазорски и временски дијаграм говоре о истим вредностима, те су ова два дијаграма међусобно повезана. Због тога је довољно нацртати један од њих, на основу којег се може нацртати, по потреби, и други. Редовито се црта фазорски дијаграм, на основу којег се, ако је то потребно, нацрта временски дијаграм.



а) векторски дијаграм б) графички (временски) дијаграм

Сл.5.

За позитивни смер струја у намотајима (сл.4) узет је смер који иде од почетка намотаја (A,B,C) ка њиховим крајевима (x,y,z), а супротан смер је негативан. На слици 5б. Дат је развијени дијаграм тренутних вредности трофазних струја, од којих свака у свом намотају ствара непокретно магнетно поље (пулзирајуће). Међутим, смер и величина магнетног флукса (Φ) сваке струје пулзирати ће у средишту припадајућег намотаја, по правцу нормалном на раван навоја, између вредности $+\Phi_m$ и $-\Phi_m$ (управо онако како се мења јачина струје која и ствара овај флукс), што је објашњено код пулзирајућег магнетног поља.

Према томе, магнетни флукс, самим тим и магнетна индукција ($B = \Phi/S$) ће имати исти облик промене и фазну једнакост са струјом која га производи, па је:

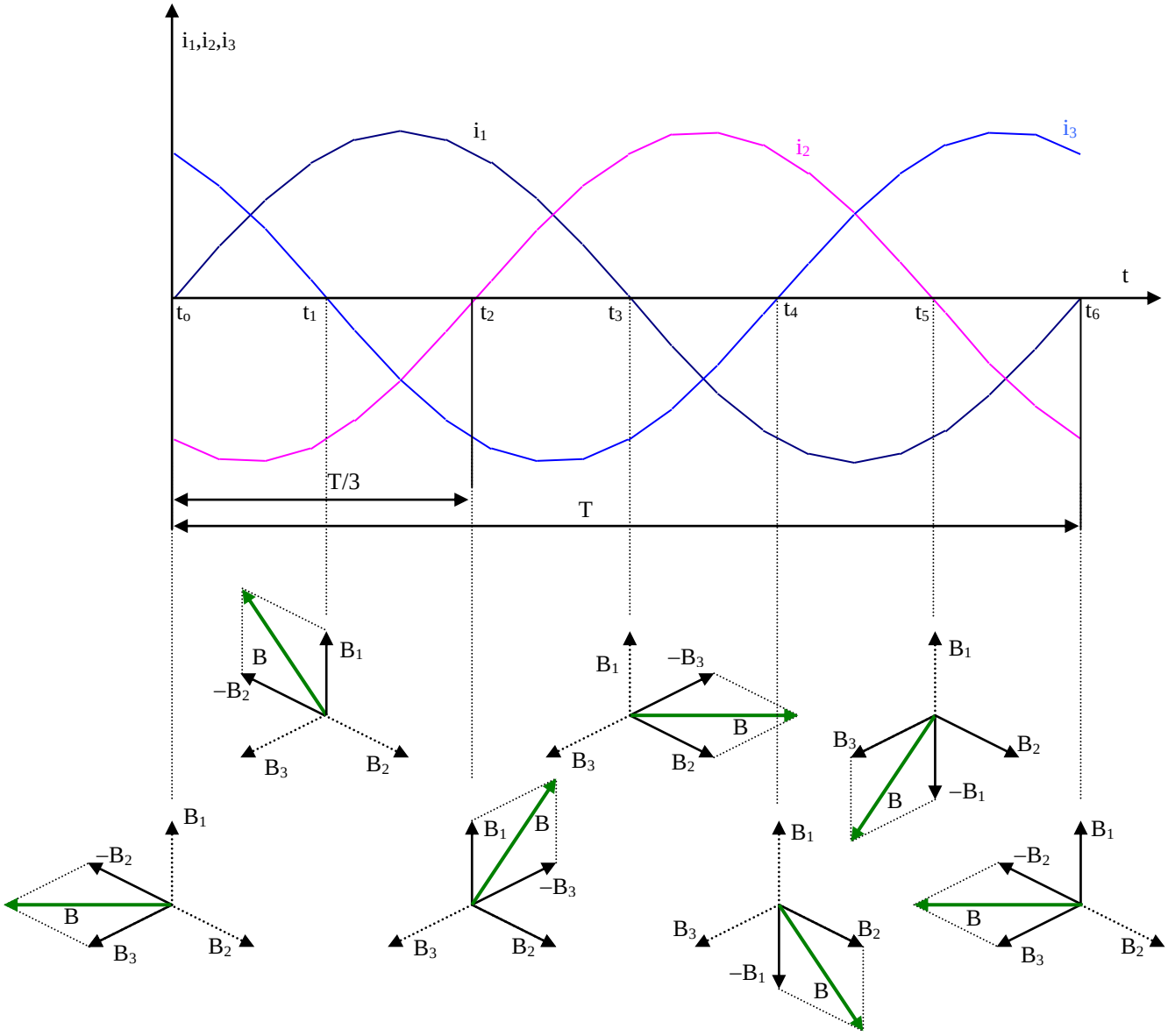
у калему A – x (i_1) $\Rightarrow$ $b_1 = B_m \sin \omega t$,
у калему B – y (i_2) $\Rightarrow$ $b_2 = B_m \sin (\omega t - 2\pi/3)$ и
у калему C – z (i_3) $\Rightarrow$ $b_3 = B_m \sin (\omega t - 4\pi/3)$.

Треба нагласити да су фазори (вектори) који представљају наизменичну струју обртни (обртни вектори трансформисани у временском дијаграму дају осцилацију – синусоиду), смера супротног од казаљке на сату, што није случај са магнетном индукцијом. Резултат овога је, да је у сваком тренутку векторски збир струја, као и тренутни, једнак нули ($\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$, односно $i_1 + i_2 + i_3 = 0$). За разлику од струја, векторски збир магнетних индикција представља укупно магнетно поље, које ће имати одређену вредност (није једнако нули).

Дакле, трофазна наизменична струја са међусобним фазним помаком од 2π/3 радијана, протичући кроз три калема (навоја), који су просторно померени за угао од 2π/3 радијана, ствара у сваком тренутку резултантно магнетно поље чија се магнетна оса обрће по обиму статора угаоном брзином ω (брзином струје напајања).

Обртно магнетно поље је представљено графички уз помоћ временског дијаграма трофазних струја за време од једне периоде T, према слици 6.

На слици 6 назначени су, за одабране тренутке посматрања струја (t_0, t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6), одговарајуће вредности струја и магнетне индукције које те струје стварају у одређеном навоју. Према Амперовом правилу (правило десне руке: *Савијене прсте поставимо у смеру струје, док ће палац одређивати смер магнетног поља*), смерови магнетног поља у центру навоја су нормални на саму површину навоја.



Сл. 6

У тренутку t_0 струја i_1 у навоју A-x једнака је нули, а струја i_2 у навоју B-y има негативан смер, док је струја i_3 у навоју C-z позитивног смера.

Ове струје стварају следеће вредности магнетних индукција:

$b_1 = 0$ ($i_1 = 0$), $b_2 = -B_2$ ($i_2 < = 0$) i $b_3 = B_3$ ($i_3 > 0$). Предтсављајући у одговарајућој размери магнетну индукцију B_2 и B_3 у облику вектора те њиховим векторским сабирањем добије се резултантна магнетна индукција B (резултантно магнетно поље). На слици се види да је у тренутку t_0 резултантна магнетна индукција у истој равни са првим навојем (A-x) и да је вектор резултантног поља усмерен ка крају тога навоја (x), (види сл. 4).

У тренутку t_1: $i_1 = I_1$ ($I_1 > 0$) $\Rightarrow$ $b_1 = B_1$ ($B_1 > 0$);
$i_2 = -I_2$ ($I_2 < 0$) $\Rightarrow$ $b_2 = -B_2$ ($B_2 < 0$) i
$i_3 = 0$ $\Rightarrow$ $b_3 = 0$.

Векторским сабирањем B_1, B_2 и B_3 у тренутку t_1, добије се резултантни вектор који представља укупну магнетну индукцију ових навоја. Видимо да се правац вектора укупне магнетне индукције B поклапа са правцом трећег навоја а његов смер је ка крају тога навоја (z).

У тренутку t_2:

$i_1 = I_1$ ($I_1 > 0$) $\Rightarrow$ $b_1 = B_1$; $i_2 = 0$ $\Rightarrow$ $b_2 = 0$; $i_3 = -I_3$ ($I_3 < 0$) $\Rightarrow$ $b_3 = -B_3$.

Векторским сабирањем појединачних вектора магнетне индукције у тренутку t_2 настаје резултантни вектор B, који даје укупну магнетну индукцију. Правац укупне магнетне индукције се поклапа са положајем другог навоја B-y, а са смером ка његовом крају (y).

У тренутку t_3: $i_1 = 0$ $\Rightarrow b_1 = 0$; $i_2 = I_2$ $\Rightarrow$ $b_2 = B_2$; $i_3 = -I_3$ $\Rightarrow$ $b_3 = -B_3$.

У овом тренутку (t_3) резултантни вектор B је истог правца као и први навој A- x, са смером ка почетку навоја (A) што је супротног смера у односу на почетни тренутак t_0 (b_2 и b_3 су супротних смерова у односу на почетак).

У тренутку t_4 ($i_3 = 0$ $\Rightarrow$ $b_3 = 0$; $i_2 = I_2$ $\Rightarrow$ $b_2 = B_2$ i $i_3 = -I_3$ $\Rightarrow$ $b_3 = -B_3$), резултантна магнетна индукција B је на истом правцу као и трећи навој C-z, са смером ка његовом почетку (C).

На исти начин се одреди резултантна магнетна индукција B за остале тренутке (t_5, t_6....). Ова времена се могу и другачије одабрати, али због једноставнијег објашњења времена су одабрана тако да је у том тренутку једна од струја једнака нули. У том случају резултантна магнетна индукција има исти правац као и положај тога навоја у којем је струја једнака нули (што потврђују сви ти резултантни вектори у датим тренутцима).

Са слике 6 уочавамо да је резултантна магнетна индукција B остварена трофазном струјом, конастантне вредности (B = const.) и да се обрће, у простору, у смеру казаљке на сату, угаоном брзином која је једнака угаоној брзини наизменичне струје ω.

Смер обртања резултантног магнетног поља зависи од редоследа фаза (тј. ових струја). Заменом редоследа фаза RST мења се и смер обртања магнетног поља.

Обртно магнетно поље је једно од најзначајнијих открића нашег научника Николе Тесле, па се оно често и назива теслиним пољем.

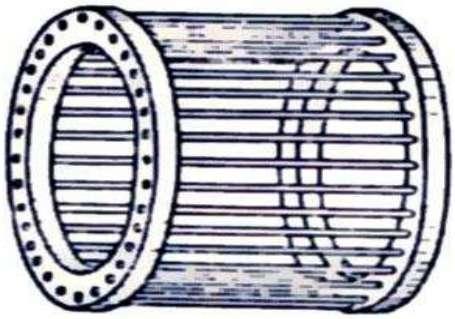
Теслино поље чини основу рада синхроних и асинхроних мотора који су такође Теслино откриће.

Ако поставимо магнет на осовину у шупљину статора (слика 4), где је остварено обртно магнетно поље, магнет ће након покретања у смеру магнетног поља наставитити обртање брзином обртног магнетног поља.

У овом случају обртање магнета (ротора) има синхрону (исту) брзину у односу на обртно магнетно поље произведено у статору, па се због тога овакви мотори називају **синхрони мотори**.

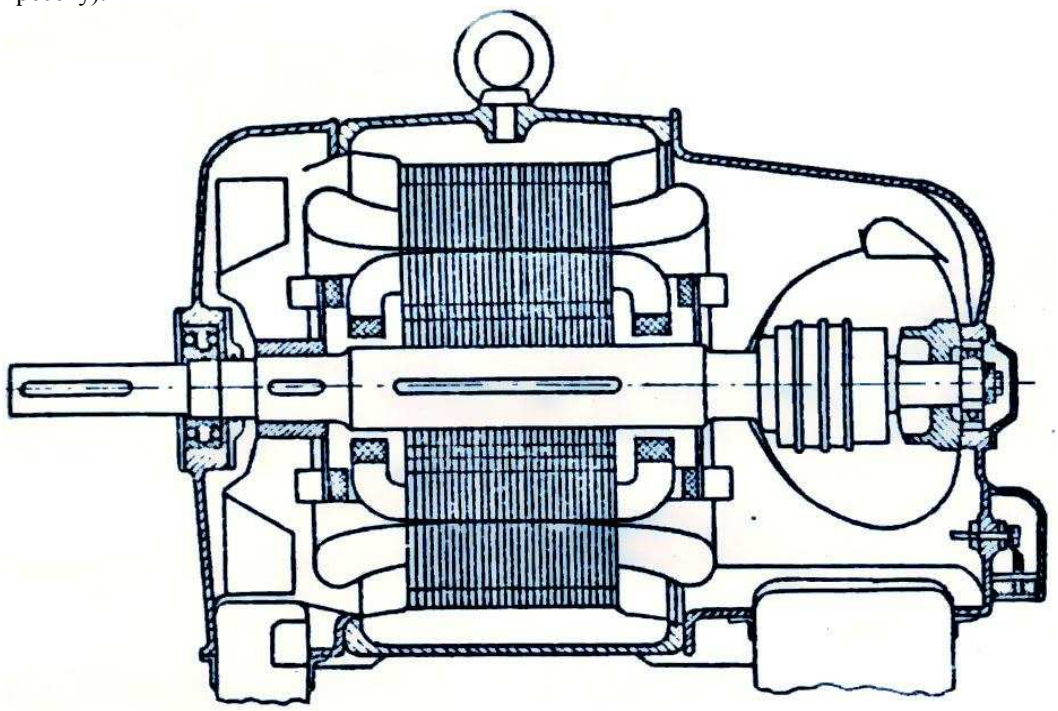
Међутим, ако у шупљину статора, поставимо уместо магнета ротор са проводницима по његовом обиму, обртно магнетно поље, услед пресецања проводника ротора у проводницима индукује ems (струју). Како су проводници ротора кратко спојени кроз њих ће индукована електромоторна сила протерати струју, а узајамно деловање магнетних поља ових струја и обртног магнетног поља проузрокује електромагнетну силу F, која покреће ротор у смеру обртања вектора обртног магнетног поља. Да би обртно магнетно поље индуковало струју у проводницима ротора, брзина обртања ротора је увек мања од брзине обртног магнетног поља статора а то је разлог да се ови мотори, поред назива индукциони називају још и **асинхрони мотори.**

Ротор асинхроног мотора најчешће се изводи са кратко спојеним бакарним шипкама. Бакарне шипке ротора повезују се са обе стране бакарним прстеновима (кратка веза), па тако ротор поприма облик кавеза па се због тога овакви ротори називају кавезни ротори (слика 7.)



Сл. 7

Индукциони асинхрони мотори са кавезним ротором имају најједноставнију израду због чега су веома економични и поуздани у раду.
Изглед индукционог асинхроног мотора са кавезним ротором (статор и ротор) дат је на слици 8 (у пресеку).



Сл. 8.

Трофазно обртно магнетно поље (Теслино поље) је искоришћено за рад трофазних синхроних и асинхроних мотора.

Трофазни генератори су исте конструкције као и трофазни мотори. Улоге су им инверзне. Мотори троше енергију (претварају електричну у механичку) коју даје извор (генератор), док генератори производе електричну енергију на основу неке неелектричне енергије (светлосна, механичка, топлотна, хемијска).
Трофазни генератори се састоје од: 1. статора, који садржи три калема који су просторно померена за 120° и 2. ротора (магнета) којег обрће нека неелектрична енергија (вода, пара..). Услед обртања ротора (магнета) у намотајима статора се индукују емс e_1, e_2 и e_3, које су временски померене за T/3. На тај начин прикључењем трофазног мотора на мрежу (генератор) кроз трофазне намотаје мотора протичу струје које су временски померене за T/3, што је чини први услов за стварање обртног магнетног поља. (Други услов је просторни помак између навоја од 120°).

RAZNI ZADACI

(SA ŠKOLSKIH, REGIONALNIH I REPUBLIČKIH TAKMIČENJA)

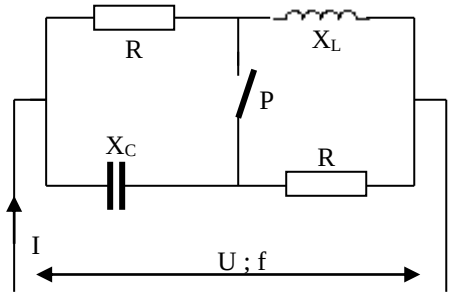
1. Kalem ima induktivnost L = 15,9 H. Nacrtati zavisnost induktivnog otpora i struje od frekvencije f ($X_L = f(f)$ i $I = f(f)$), ako je efektivna vrednost napona U = 100 V.

(*Školsko takmičemje « Mihajlo Pupin » N. Sad; 2002.*)

2. Trenutna snaga koju prima idealni kalem je $p_L = 20 \sin (2 \cdot 10^6 t + 120°)$ mW, a napon $U_m = 2\sqrt{2}$ V. Napisati analitički (vremenski) izraz za struju kalema.

(*Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.*)

3.



Za koliko će se puta povećati struja u kolu prema slici, nakon zatvaranja prekidača. Nakon dokaza zaokružiti jedno od tačnih (ponuđenih) rešenja.

Brojni podaci:
$R = X_L = X_C$

Ponuđena rešenja: a) poveća se 2 puta; b) poveća se 4 puta; c) smanji se 2 puta; d) smanji se 4 puta; e) neko drugo rešenje.

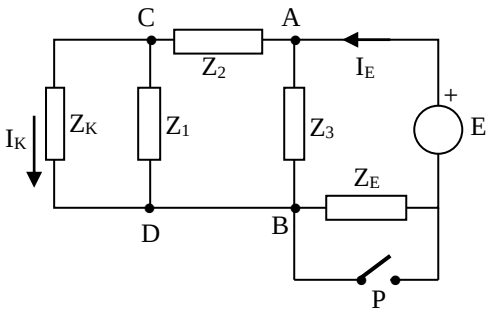
(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

4. Dve grane su paralelno vezane . Jedna sadrži R_1 i X_L a druga R_2 i X_C , pri čemu su sve otpornosti jednake 2 Ω, na frekvenciji od 50 Hz. Kako se menja aktivna provodnost kola $G = G_1 + G_2$ ako se frekvencija poveća dva puta?

Ponuđena rešenja: a) poveća se 2 puta; b) smanji se 2 puta; c) ne menja se; d) neko drugo rešenje.

(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

5.

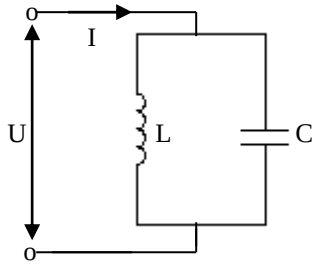


Pri otvorenom prekidaču poznate su struje $\underline{I}_K = \underline{I}_E = 4$ [mA]. Kolika će biti struja I_K' nakon zatvaranja prekidača P?

Brojne vrednosti:
$\underline{E} = (40 + j40)$ V; $\underline{Z}_E = 10$ kΩ; $\underline{Z}_K = j10$ kΩ.

(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

6.



Pri kojem će odnosu provodnosti u kolu sa slike napon U prednjačiti struji I ?
Uz detaljno obrazloženje zaokružiti tačno rešenje.

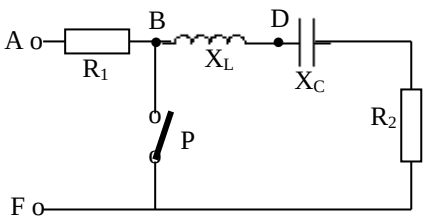
Ponuđena rešenja:
a) $B_L < B_C$; b) $B_C < B_L$ c) $B_L = B_C$
d) neko drugo rešenje.

(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

7. Ako je u rednoj vezi itpornika $R = 10\ \Omega$ i kondenzatora na učestanosti $f = 500$ Hz fazna razlika napona i struje jednaka $\varphi = -45°$, odrediti učestanost f′ na kojoj će pri istom naponu struja biti dva puta manja nego na f.

(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

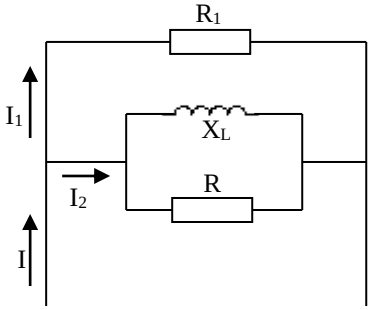
8.



U kolu sa slike poznati su otpornost $R_1 = 100\ \Omega$ i induktivnost $L = 0{,}01$ H. Pri zatvorenom prekidaču napon $U_{AF} = 30$ V, a pri otvorenom nastupa rezonansa, a napon $U_{AB}' = 10$ V i $U_{AD}' = 10\sqrt{5}$ V. Odrediti struju pri rezonansi I_o i kapacitet kondenzatora.

(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

9.



Odrediti R i X_L sa slike ako je poznato:
$I = 30$ A; $I_1 = 15$ A; $I_2 = 18$ A; $R_1 = 4\ \Omega$.

(Školsko takmičenje « Nikola Tesla » Beograd; 1998.)

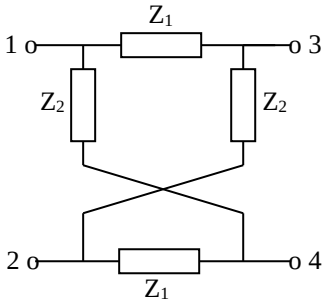
10. Naći kompleksnu amplitudu prostoperiodičnog napona: $u = 10 \sin (\omega t + 60°)$ [V].

(Školsko takmičenje, Bačka Palanka; 2002)

11. Pri kojem faznom uglu je trenutna vrednost naizmenične struje brojno jednaka efektivnoj vrednosti ?

(Školsko takmičenje, Bačka Palanka; 2002)

12.



Za kolo prostoperiodične struje, prema slici, poznato je $Z_1 = X_L = 100\ \Omega$ i $Z_2 = X_C = 50\ \Omega$.

Odrediti kompleksnu impedansu između tačaka 1 i 2 kada su tačke 3 i 4 kratko spojene.

(Školsko takmičenje, Bačka Palanka; 2002)

13. Induktivni kalem priključen je na idealni naponski generator prostoperiodičnog napona. Ako je trenutna snaga kalema negativna, kalem:

a) Prima energiju od generatora,
b) Vraća energiju generatoru
c) I prima i vraća, što zavisi od induktivnosti kalema,
d) Nije moguće dati odgovor.

Uz potreban komentar, zaokružiti tačno rešenje.
Napomena ! Negativan odgovor povlači i negativan broj poena.

(Deveto republičko takmičenje; 2003)

14. Šta predstavljaju granice propusnog opsega kod rednog rezonantnog kola ?

Ponuđena rešenja:

a) Učestanosti pri kojima se propušta jačina struje koja nije manja za $\sqrt{2}$ od rezonantne struje.
b) Učestanosti pri kojima je jačina struje u kolu $\sqrt{2}$ puta veća od struje pri rezonansi.
c) Učestanosti pri kojima se propušta struja od njene srednje vrednosti do maksimalne.
d) Učestanost pri kojoj se propuštaju jačine struja veće od efektivnih.

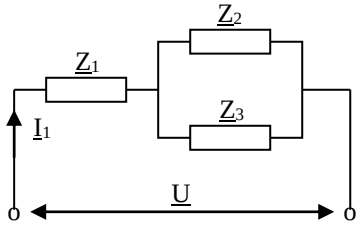
Uz komentar zaokružiti tačno rešenje, uz napomenu da negativan odgovor nosi i negativne bodove.

(Deveto republičko takmičenje; 2003)

15. Elektirčno oscilatorno kolo sastoji se od kalema i kondenzatora. Ako se kapacitivnost kondenzatora poveća četiri puta a induktivnost kalema ostene ista, kako će se promeniti period oscilovanja oscilatornog kola ?

(Deveto republičko takmičenje; 2003)

16.



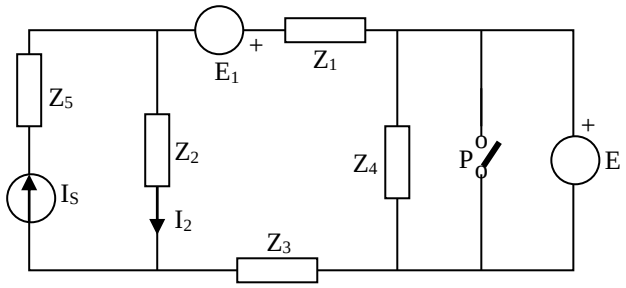
Nepoznata impedansa $\underline{Z}_1$ vezana je redno sa paralelnom vezom impedansi $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_3$, prema slici, i kolo je priključeno na napon $\underline{U} = 4$ V. Odrediti impedamsu Z_1, ako su poznati sledeći podaci:

$Z_e = 4 \cdot e^{-j30°}$; $P_2 = 0$ W; $Q_2 = 1$ VAr; $P_3 = \sqrt{3}$ W;
i $Q_3 = 0$ VAr.

Napomena! Z_e je ukupna impedansa kola, a P i Q su aktivna odnosno reaktivna snaga odgovarajućih impedansi.

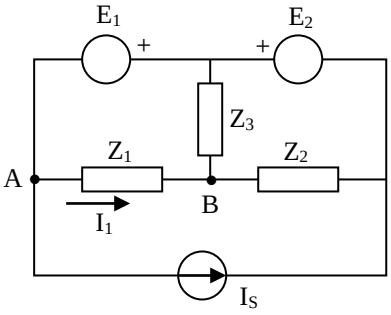
(Deveto republičko takmičenje; 2003)

17. Po otvaranju prekidača P, u kolu prostoperiodične struje (vidi sliku), struja kroz impedansu Z_2 se poveća u naznačenom smeru za $\Delta I_2 = 2$ mA. Odrediti kolika je vrednost ems E, ako je: $\underline{Z}_1 = (2 + j3)$ kΩ; $\underline{Z}_2 = j5$ kΩ; $\underline{Z}_3 = (4 - j4)$ kΩ; $\underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = 5$ kΩ; $\underline{I}_S = 8$ mA i $\underline{E}_1 = (3 + j2)$ V.



(Deveto republičko takmičenje; 2003)

18.



Za električno kolo, prema slici, odrediti efektivnu vrednost struje I_1, ako je dato:
$\underline{E}_1 = (-2 - j2)$ V; $\underline{E}_2 = (-6 + j2)$ V; $\underline{Z}_1 = -j1$ Ω; $\underline{Z}_2 = 2$ Ω ; $\underline{Z}_3 = j2$ Ω; $\underline{I}_S = 1$ A.

(Deveto republičko takmičenje; 2003)

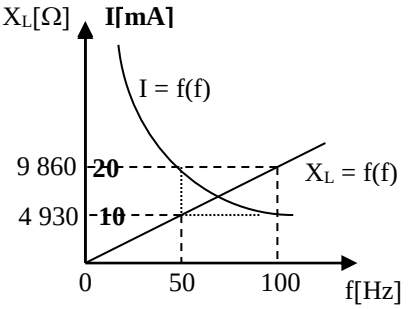
19. Promenljivi otpornik i idealni kalem vezani su na red u kolo naizmenične struje učestanosti **ω**. Napon fazno prednjači u odnosu na struju za 60°. Ako se otpornost poveća za **ΔR** za koliko se mora promeniti induktivnost **ΔL** da bi fazni pomak ostao nepromenjen?

(Deveto regionalno takmičenje; 2003.)

REŠENJA ZADATAKA (sa školskih, regionalnih i republičkih takmičenja):

1. -----

Za $f = 0 \Rightarrow X_L = 0$; $I = \infty$;
Za $f = 50$ Hz $\Rightarrow X_L = 314 \cdot 15{,}7 = 4\,930\ \Omega$; $I = 0{,}02$ A $= 20$ mA.
Za $f = 100$ Hz $\Rightarrow X_L = 9\,860\ \Omega$; $I = 0{,}01$ A $= 10$ mA
Za $f = \infty \Rightarrow X_L = \infty$; $I = 0$.



2. ----- Kako je kod savršenog kalema (vidi snagu kod L kola):
$p_L = ui = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = UI \sin 2\omega t$, sledi:
$U \cdot I = 20 \cdot 10^{-3} \Rightarrow I = 20 \cdot 10^{-3}/U = 10$ mA; $2\omega = 2 \cdot 10^6 \Rightarrow \omega = 10^6$ [rad/s] $\Rightarrow i = 10\sqrt{2} \sin (10^6 t + 120°)$ mA.

3. ----- Kada je P isključeno:

$$\underline{Z} = \frac{(R + jX)\cdot(R - jX)}{R + jX + R - jX} = \frac{R^2 + X^2}{2R} = \frac{2R^2}{2R} = R ,$$

a kada je uključen:

$$\underline{Z}' = \frac{R \cdot (-jX)}{R - jX} + \frac{R \cdot jX}{R + jX} = \frac{-jRX \cdot (R + jX)}{(R - jX)\cdot(R + jX)} + \frac{jRX \cdot (R - jX)}{(R + jX)\cdot(R - jX)} = \frac{-jR^2X + RX^2 + jR^2X + RX^2}{R^2 + X^2} = R .$$

Kako je impedansa ista i pri uključenom i isključenom prekidaču ($\underline{Z} = \underline{Z}'$), sledi da će struja ostati ista.
Dakle, tačan odgovor je pod tačkom e)

4. ----- Pri $f' = 2f \Rightarrow X_L' = 2X_L = 4\ \Omega$; $X_C' = X_C/2 = 1\ \Omega$.
Na frekvenciji $f = 50$ Hz $\Rightarrow$

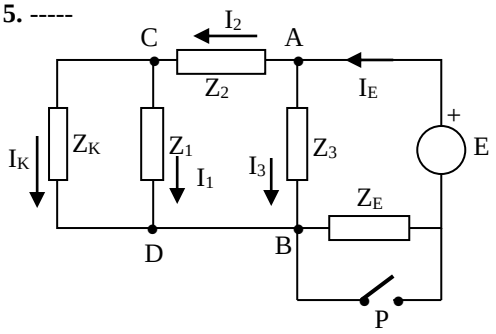
$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{2}{4+4} = 0{,}25[\mathrm{S}] \rightarrow G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} = 0{,}25[\mathrm{S}] \Rightarrow G = G_1 + G_2 = 0{,}5\ [\mathrm{S}].$$

Na frekvenciji $f' = 2f = 100$ Hz:

$$G_1' = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L'^2} = \frac{2}{4+16} = 0{,}1[\mathrm{S}] \rightarrow G_2' = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C'^2} = \frac{2}{4+1} = 0{,}4[\mathrm{S}]. \Rightarrow G' = G_1' + G_2' = 0{,}5\ [\Omega].$$

Ukupna aktivna provodnost kola je ostala ista ($G' = G = 0{,}5$ S).
Tačan odgovor je pod c)

5. -----



Kada je P isključen, sledi:
$\underline{U}_{AB} - \underline{E} + \underline{I}_E \cdot \underline{Z}_E = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AB} = \underline{E} - \underline{I}_E \underline{Z}_E \Rightarrow$
$\underline{U}_{AB} = (40 + j40) - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 = j40$ [V].
$\underline{U}_{CD} = \underline{I}_K \underline{Z}_K = 4 \cdot 10^{-3} \cdot j10 \cdot 10^3 = j40$ [V].
$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{AC} - \underline{U}_{CD} = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AC} = \underline{U}_{CD} - \underline{U}_{AB} = 0$.
$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_K = 0$, jer je $I_2 = U_{AC}/Z_2 = 0/Z_2 = 0$.
Sledi da je $\underline{I}_1 = -\underline{I}_K = -4$ [mA].

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_{CD}}{\underline{I}_1} = \frac{j40}{-4 \cdot 10^{-3}} = -j10 \cdot 10^3[\Omega] = -j10[\mathrm{k}\Omega].$$

Kako je $\underline{Z}_K = j10$ kΩ (kalem) a $\underline{Z}_1 = -j10$ kΩ (kond.), između ove dve impedanse dolazi do oscilatornog kola ($I_2 = 0$).
Za čvor A je : $\underline{I}_E = \underline{I}_3 + \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_E = 4$ [mA].

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{I}_3} = \frac{j40}{4\cdot 10^{-3}} = j10\cdot 10^3\,[\Omega] = j10\,[k\Omega].$$

Uključenjem prekidača, sledi: $\underline{U}_{AB}' = E = (\,40 + j40\,)$ [V]

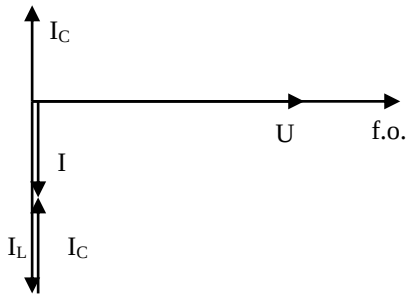
$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_{AB}'}{\underline{Z}_3} = \frac{40 + j40}{j10\cdot 10^3} = (4 - j4)\cdot 10^{-3}\,[A] = (4 - j4)\,[mA].$$

Zbog antirezonanse(oscilatornog kola) na impedansama $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_K$ nema struje I_2 ($\underline{U}_{AC} = 0$), pa je napon $\underline{U}_{CD}' = \underline{U}_{AB}' = \underline{E} = (\,40 + j40\,)$ V.

Struja na impedansi $\underline{Z}_K$, nakon uključenja P, sada iznosi:

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_{CD}'}{\underline{Z}_K} = \frac{40 + j40}{j10\cdot 10^{-3}} = (4 - j4)\cdot 10^{-3}\,[A] = (4 - j4)\,[mA].$$

6. -----



$\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C$; $I = I_L - I_C$.

Napon U će prednjačiti struji I ako je $I_L > I_C$.

$$I_L = \frac{U}{X_L} = U\cdot B_L$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\cdot B_C$$

Ako je $B_L > B_C \Rightarrow I_L > I_C \Rightarrow \varphi = 90°$, tj. napon prednjači struji.

Od ponuđenih rešenja tačno je rešenje pod b.

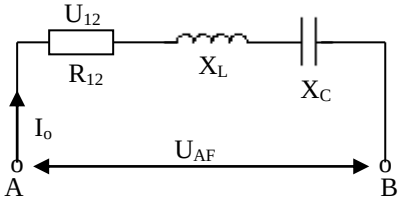
7. ----- $\operatorname{tg}\varphi = X_C/R = 1 \Rightarrow X_C = R = 10\ [\Omega] \Rightarrow C = 1/2\pi f\cdot X_C = 1/3140\cdot 10 = 31{,}85\cdot 10^{-6}$ [F] = 31,85 [μF].

Na frekvenciji f = 500 Hz impedansa iznosi: $Z = \sqrt{R^2 + X_C{}^2} = 10\sqrt{2}\,[\Omega]$.

$$\frac{I}{I'} = \frac{U/Z}{U/Z'} = \frac{Z'}{Z} = 2 \Rightarrow Z' = 2\cdot Z = 20\sqrt{2}\,[\Omega] \Rightarrow X_C' = \sqrt{Z'^2 - R^2} = 10\sqrt{7} = \frac{1}{2\pi f'\cdot C} \Rightarrow f' = \frac{1}{2\pi\cdot X_C\cdot C} = 188{,}97\,[Hz].$$

I' i Z' su struja, odnosno impedansa na frekvenciji f'.

8. -----



Pri otvorenom prekidaču (rezonansi) $U_{12} = U_{AF} = 30$ V.

$$I_o = \frac{U_{AB}'}{R_1} = \frac{10}{100} = 0{,}1\,[A]$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 = \frac{U_{12}}{I_o} = \frac{30}{0{,}1} = 300\,[\Omega] \Rightarrow R_2 = 200\,[\Omega].$$

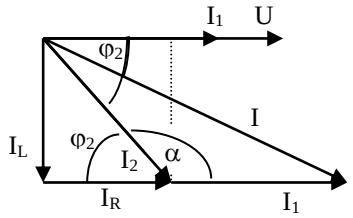
$$Z_{AD} = \frac{U_{AD}'}{I_o} = \frac{10\sqrt{5}}{0{,}1} = 100\sqrt{5} = \sqrt{R_1{}^2 + X_L{}^2} \Rightarrow$$

$$X_L = \sqrt{Z_{AD}{}^2 - R_1{}^2} = \sqrt{50000 - 10000} = 200\,[\Omega]$$

$$X_L = \omega_o L \Rightarrow \omega_o = \frac{X_L}{L} = \frac{200}{0{,}01} = 20000\,\left[\mathrm{rad}/\mathrm{s}\right].$$

Kako je $X_L = X_C \Rightarrow \frac{1}{\omega_o\cdot C} = 200 \Rightarrow C = \frac{1}{20000\cdot 200} = 250\cdot 10^{-9}\,[F] = 250\,[nF].$

9. -----



$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos\alpha \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{I_1^2 + I_2^2 - I^2}{2I_1I_2} = \frac{15^2 + 18^2 - 30^2}{2\cdot 15\cdot 18} = -0{,}65 \Rightarrow$$

$\alpha = 130{,}5°$

$\alpha + \varphi_2 = 180° \Rightarrow \varphi_2 = 49{,}5°$

$\cos\varphi_2 = I_R/I_2 \Rightarrow I_R = I_2\cos\varphi_2 = 18\cdot 0{,}65 = 11{,}7$ [A].

$I_L = I_2\sin\varphi_2 = 18\cdot 0{,}76 = 13{,}68$ [A].

Otpornosti R i X_L iznose:

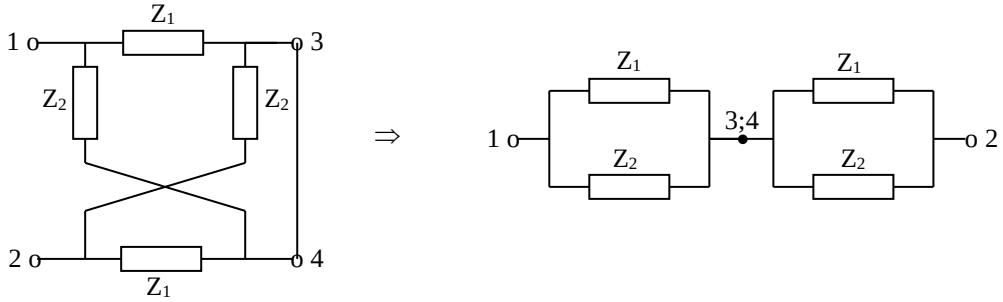
$$R = \frac{U}{I_R} = \frac{I_1R_1}{I_R} = \frac{15\cdot 4}{11{,}7} = 5{,}13[\Omega];$$

$$X_L = \frac{U}{I_L} = \frac{15\cdot 4}{13{,}68} = 4{,}39[\Omega].$$

10. ----- $\underline{U}_m = 10\cdot e^{j60°} = 10\cdot(\cos 60° + j\sin 60°) = 10\cdot\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(5 + j5\sqrt{3}\right)[V].$

11. ----- $i = I \Rightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I_m\sin\omega t \Rightarrow \sin\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega t = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45\left[^o\right] = \frac{\pi}{4}[\text{rad}].$

12. ----



Na osnovu ekvivalentne šeme, impedansa između tačaka 1 i 2 iznosi:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = 2\cdot\frac{j100\cdot(-j50)}{j100-j50} = 2\cdot\frac{5000}{j50}\cdot\frac{-j}{-j} = 2\cdot\frac{-j5000}{50} = 2\cdot(-j100) = -j200[\Omega].$$

13. ----- Rešenje je pod b) Vraća energiju generatoru. Za komentar videti objašnjenje snage kod savršenog kalema.

14. ----- Tačan odgovor je pod a) Učestanost pri kojoj se propuštaju struje koje nisu manje od $\frac{I_o}{\sqrt{2}}$.

Komentar pronaći u **Propusnom opsegu** (oscilatorna kola).

15. ----- $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_o' = \dfrac{1}{\sqrt{L'C'}} = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot 4C}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{\omega_o}{2},$

$$f_o = \frac{1}{T_o} \Rightarrow T_o = \frac{1}{f_o} = \frac{1}{\frac{\omega_o}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

$$f_o' = \frac{1}{T_o'} \Rightarrow T_o' = \frac{1}{f_o'} = \frac{1}{\frac{\omega_o'}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega_o'} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_o}{2}} = 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_o} = 2 \cdot T_o$$

Perioda oscilovanja će se povećati dva puta.

16. ----- $\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = j1\ [VA]$; $\underline{S}_3 = P_3 + jQ_3 = \sqrt{3}[VA]$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{4}{4 \cdot e^{-j30}} = 1 \cdot e^{j30} = \cos 30 + j \sin 30 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)[A] \quad \Rightarrow \quad I_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = 1[A].$$

$$\underline{S}_e = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^{\,*} = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \left(2\sqrt{3} - j2 \right)[VA]$$

$$\underline{S}_e = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 \Rightarrow \underline{S}_1 = \underline{S}_e - \underline{S}_2 - \underline{S}_3 = 2\sqrt{3} - j2 - j1 - \sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - j3 \right) \Rightarrow \quad P_1 = \sqrt{3}\ \text{W}; \quad Q_1 = -3\ \text{Var (kap.)}$$

$$P_1 = I_1^{\,2} R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{P_1}{I_1^{\,2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}[\Omega]; \quad |Q_1| = \left| I_1^{\,2} X_C \right| \Rightarrow |X_C| = \left| \frac{Q_1}{I_1^{\,2}} \right| = \frac{3}{1} = 3[\Omega].$$

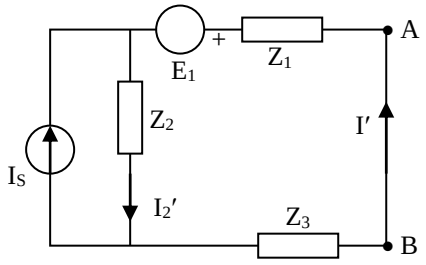
Kompleksna impedansa Z_1 je:

$$\underline{Z}_1 = \left(\sqrt{3} - j3 \right)[\Omega].$$

17. ----- **Napomena**! Ako je na idealni strujni generator redno vezan otpornik (impedansa Z_5) njegova otpornost nema uticaja na struju tog generatora (struja je ista), pa se on može isključiti iz kola ($Z_5 = 0$). Na isti način kod paralelne veze idealnog naponskog generatora sa otpornikom (impedansa Z_4), napon na krajevima generatora ne zavisi od otpornosti paralelno vezanog otpora, pa se on može isključiti iz kola ($Z_4 = \infty$).

Na osnovu navedene konstatacije dobije se ekvivalentn šeme, prikazane na slikama(P uklj. i P isključeno).

P uključeno

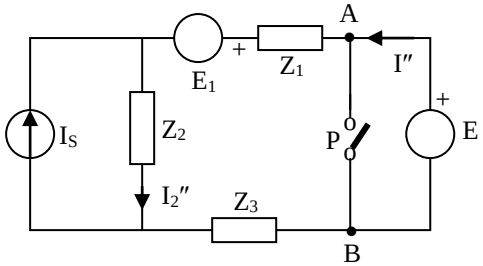


Ako je prekidač uključen, napon između tačaka A i B je jednak nuli (ems E nema uticaja na ostatak kola). Na osnovu drugog Kirhovog zakona sledi:

$\underline{I}'\underline{Z}_1 - \underline{E}_1 - \underline{I}_2'\underline{Z}_2 - \underline{I}'\underline{Z}_3 = 0$; $I_2' = I_S + I' \Rightarrow$

$$-\underline{E}_1 = \underline{I}' \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \right) + \underline{I}_S \underline{Z}_2 \Rightarrow \underline{I}' = \frac{-\underline{E}_1 - \underline{I}_S \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

P isključeno



Kada je P isključen ($U_{AB} = E$), pa sledi jednačina (drugi Kirhofov zakon):

$\underline{E} - \underline{I}''\underline{Z}_1 - \underline{E}_1 - \underline{I}_2''\,\underline{Z}_2 - \underline{I}''\underline{Z}_3 = 0$; $I_2'' = I_S + I'' \Rightarrow$

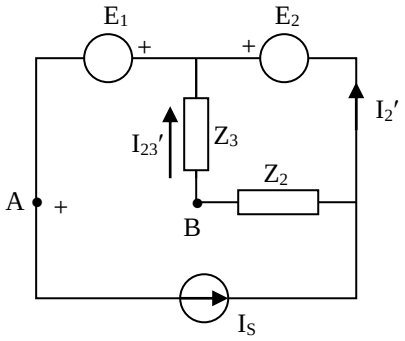
$\underline{E} - \underline{E}_1 = \underline{I}'' \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \underline{I}_S \underline{Z}_2 \Rightarrow$

$$\underline{I}'' = \frac{\underline{E} - \underline{E}_1 - \underline{I}_S \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\Delta \underline{I}_2 = \underline{I}_2'' - \underline{I}_2' = \underline{I}_S + \underline{I}'' - \left(\underline{I}_S + \underline{I}' \right) = \underline{I}'' - \underline{I}' = \frac{\underline{E} - \underline{E}_1 - \underline{I}_S \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} - \frac{-\underline{E}_1 - \underline{I}_S \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \Rightarrow$$

$\underline{E} = \Delta \underline{I}_2 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (2 + j3 + j5 + 4 - j4) \cdot 10^3 = 2 \cdot (6 + j4) = (12 + j8)$ [V].

18. -----



Koristeći Tevenenovu teoremu, prema ekvivalentnim šemama, sledi:

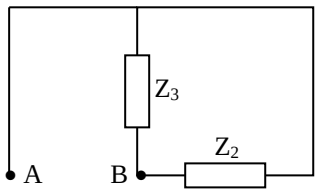
$\underline{E}_2 + \underline{I}_{23}'\underline{Z}_3 + \underline{I}_{23}'\underline{Z}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{I}_{23}' = \frac{-\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{6 - j2}{2 + j2} = (1 - j2)[\mathrm{A}];$$

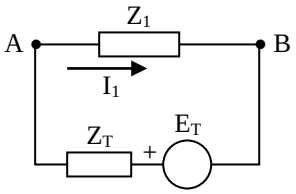
$\underline{U}_{AB} + \underline{E}_1 + \underline{I}_{23}'\underline{Z}_3 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{AB} = -\underline{E}_1 - \underline{I}_{23}'\underline{Z}_3 \Rightarrow$

$\underline{U}_{AB} = 2 + j2 - (1 - j2)\cdot j2 = 2 + j2 - j2 - 4 = -2$ [V].

$\underline{E}_T = \underline{U}_{AB} = -2$ [V].



$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} = (1 + j1)[\Omega].$$



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_1} = \frac{-2}{1 + j1 - j1} = -2[\mathrm{A}] \Rightarrow I_1 = 2[\mathrm{A}].$$

19. -----

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \mathrm{tg}60 = \sqrt{3} \Rightarrow \omega L = \sqrt{3}R$$

Pre povećanja otpornosti R impedansa kola je iznosila:

$$\underline{Z} = R + j\omega L,$$

a nakon povećanja otpornosti R:

$$\underline{Z}' = (R + \Delta R) + j(\omega L + \Delta\omega L) = (R + \Delta R) + j\omega(L + \Delta L).$$

Iz uslova zadatka ($\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi' = \sqrt{3}$), sledi:

$$\frac{\omega L}{R} = \frac{\omega(L + \Delta L)}{R + \Delta R} \Rightarrow \omega LR + \omega L\Delta R = \omega LR + \omega\Delta LR \Rightarrow \omega L\Delta R = \omega\Delta LR \Rightarrow \Delta L = \frac{L\Delta R}{R}.$$

Kako je $\frac{\omega L}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{\omega}$, predhodni izraz se može dati preko kružne učestanosti ω i on glasi:

$$\Delta L = \frac{L}{R}\Delta R = \frac{\sqrt{3}}{\omega}\Delta R$$