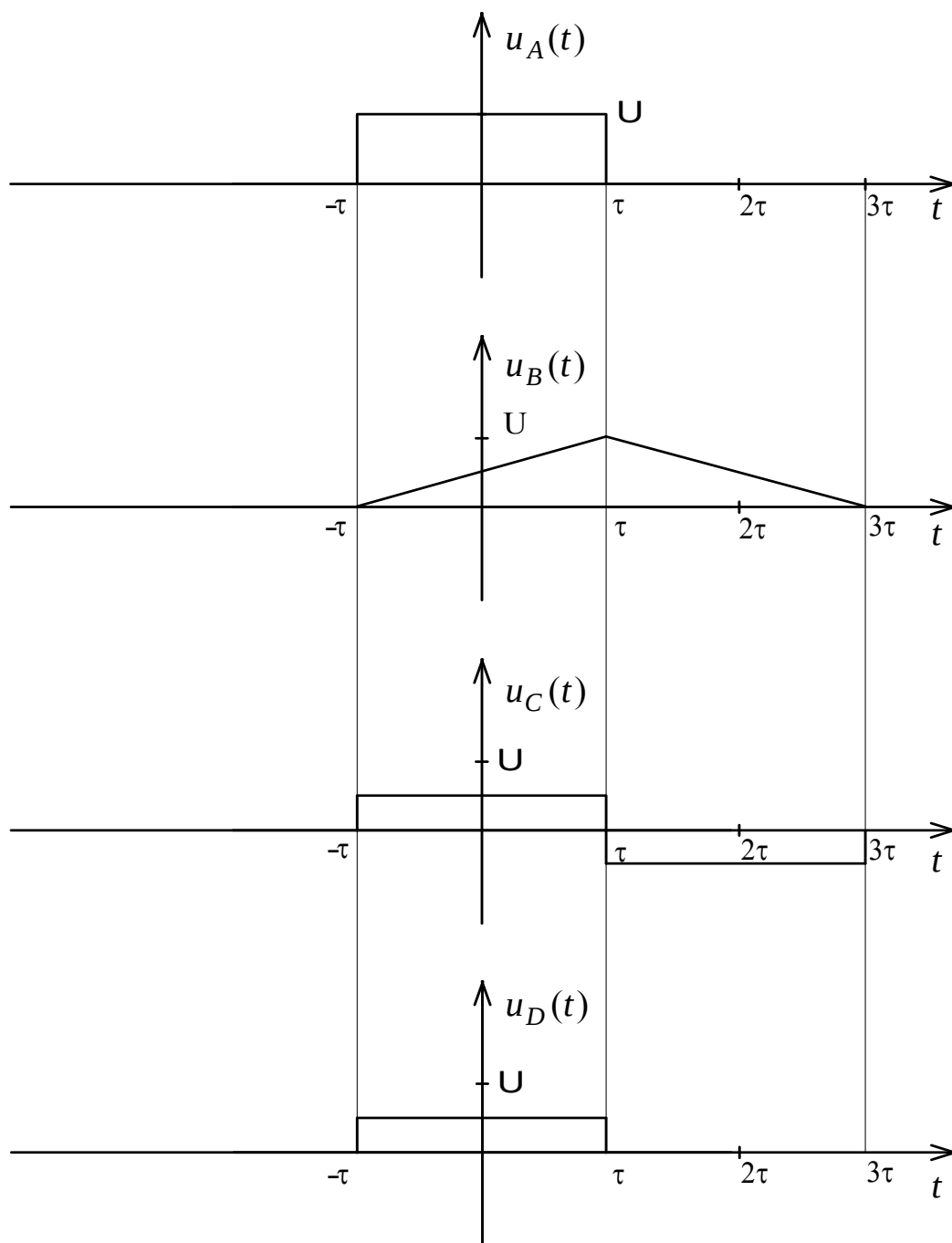
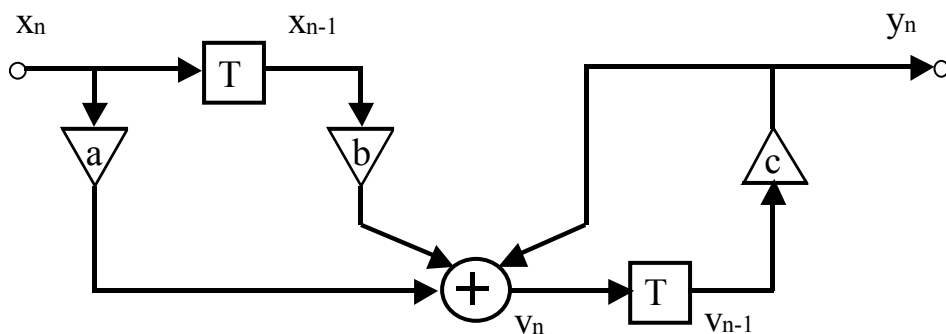


Slika 2. Oblici signala u tačkama A , B , C i D u vremenskom domenu

3.4. Diskretni sistemi

Diskretni sistemi su sistemi namenjeni za obradu diskretnih signala. Slično kao i kod analognih sistema, diskretni sistem konvertuje jedan ili više diskretnih ulaznih signala u jedan ili više diskretnih izlaznih signala, u skladu sa određenim pravilima.

Blok šema diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazana je na slici 3.4.1.



Slika 3.4.1. Blok šema diskretnog sistema

Najopštija karakteristika linearnog sistema opisana je izrazom:

$$y_n = f_n(\dots x_{n-k}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, \dots), \quad (3.4.1)$$

gde je f_n zavisnost koja je, u opštem slučaju, zavisna od vrednosti n , tj. vremena, pa izlazni signal u svakom trenutku n zavisi od:

- trenutnog oblika funkcionalne zavisnosti, f_n ,
- prethodnih vrednosti ulaznog signala, $\dots x_{n-k}, \dots, x_{n-1}$,
- trenutne vrednosti ulaznog signala x_n i
- budućih vrednosti ulaznog signala $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, \dots$.

Osim ove zavisnosti može se dodati i povratna sprega, preko koje izlazni signal može da zavisi i od prethodnih vrednosti izlaznog signala. Analiza ovakvih sistema bila bi veoma složena i u praksi se, srećom, ne koristi. Za praktične sisteme bez povratne sprege obično važe sledeća ograničenja koja znatno pojednostavljaju rad:

- 1) Kauzalnost. U praksi se ne može ostvariti zavisnost izlaznog signala od budućih vrednosti pobudnog signala.
- 2) Linearnost. Obično se veza između trenutne vrednosti izlaznog signala i ulaznog signala izražava kao:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n,k} \cdot x_k, \quad (3.4.1a)$$

gde su $h_{n,k}$ koeficijenti koji opisuju sistem. U ovom izrazu kauzalnost nije uzeta u obzir. Kada bi se uvela kauzalnost, gornja granica u sumi bila bi zamenjena sa n . Tada bi izlazni signal imao oblik:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^n h_{n,k} \cdot x_k. \quad (3.4.1b)$$

3) Vremenska nepromenljivost. Ako koeficijenti $h_{n,k}$ ne zavise eksplicitno od vremena, n , tada se može uvesti oznaka $h_{n,k} = h_{n-k}$, tj. koeficijent u svakom trenutku n zavisi samo od rastojanja od posmatrane tačke, k , tj. od $n - k$.

Kada se sva ograničenja uvedu u analizu, dobija se sledeća veza:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^n h_{n-k} \cdot x_k, \quad (3.4.2)$$

u kojoj se lako prepoznaje diskretna konvolucija.

Za slučaj da je pobuda jednaka jediničnom impulsu, $x_n = \delta_n$, odziv se naziva impulsni odziv i jednak je h_n , što se lako dokazuje jer u prethodnoj sumi za svako n postoji samo jedan sabirak, onaj za koji je $k = 0$.

Diskretni sistemi koji imaju osobinu linearnosti, vremenske nepromenljivosti (invarijantnosti) i kauzalnosti obično se nazivaju digitalni filtri.

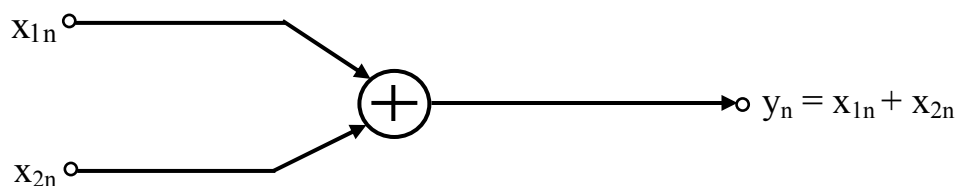
Komponente digitalnih filtara

Za razliku od analognih sistema za obradu signala, kod kojih je sistem sastavljen od kombinacije pasivnih (otpornici, kalemovi, kondenzatori i sl.) i aktivnih (operacioni pojačavači i sl.) komponenti, digitalni filtri koji se mogu realizovati u praksi sastavljeni su od tri komponente: sabirača, množača i kola za kašnjenje.

Funkcionisanje svake od ovih komponenti može se opisati u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Sabirač

Sabirač je kolo u kome se sabira dva ili više ulaznih signala i daju izlazni signal. Primer je poka-
zan na slici 3.4.2.



Slika 3.4.2. Sabirač

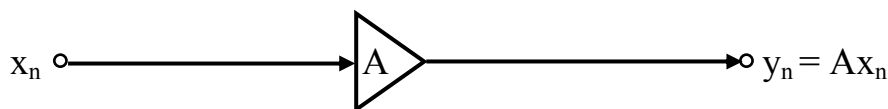
Izlazni signal određuje se kao:

$$y_n = x_{1n} + x_{2n}. \quad (3.4.3)$$

Množač

Množač je kolo u kome se ulazni signal množi datom konstantom i tako formira izlazni signal.

Primer je pokazan na slici 3.4.3.



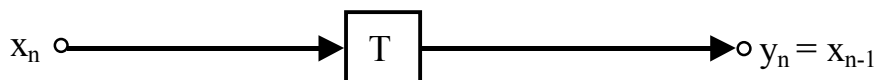
Slika 3.4.3. Množač

Izlazni signal određuje se u obliku:

$$y_n = A \cdot x_n. \quad (3.4.4)$$

Kolo za kašnjenje

Kolo za kašnjenje na svom izlazu daje signal koji kasni u odnosu na ulazni signal za 1, odnosno za jedan period odabiranja. Primer je pokazan na slici 3.4.4.



Slika 3.4.4. Kolo za kašnjenje

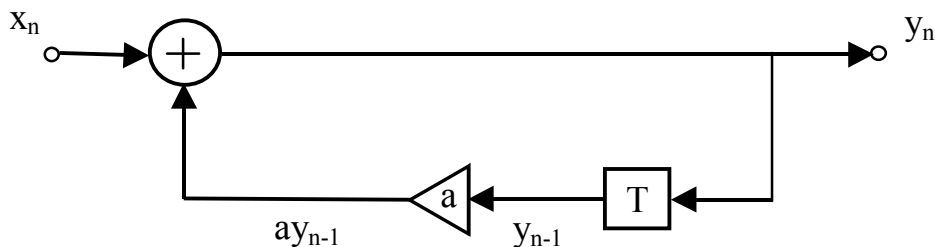
Izlazni signal ima oblik:

$$y_n = x_{n-1}. \quad (3.4.5)$$

To znači da je signal na izlazu pomeren udesno u odnosu na signal na ulazu, pa je u svakoj tački vrednost izlaznog signala jednaka prethodnoj vrednosti ulaznog signala.

Povratna sprega

Ako se bilo gde u sistemu izlazni signal vraća unazad, dalje od izlaza, i ponovo učestvuje u proračunu, kaže se da postoji povratna sprega. Primer povratne sprege pokazan je na slici 3.4.5. Izlazni signal vraća se na sabirač i ponovo, uz dodatno kašnjenje, učestvuje u formiranju izlaznog signala. U povratnoj petlji uvek mora da bude postavljeno bar jedno kolo za kašnjenje. Eventualno pojačanje u petlji ne sme da bude veće od 1.



Slika 3.4.5. Kolo sa povratnom spregom

Opis diskretnog sistema preko diferencnih jednačina

Kada se nacrtaju blok šema diskretnog sistema, mogu se za svaku tačku ispisati jednačine koje povezuju signal u toj tački sa ostalim signalima u sistemu. Ove jednačine nazivaju se diferencne jednačine. Takve su, npr. jednačine za kolo na slici 3.4.1.:

$$v_n = a \cdot x_n + b \cdot x_{n-1} + y_n,$$

$$y_n = c \cdot v_{n-1}. \quad (3.4.6a)$$

Kombinovanjem jednačina uvek se može dobiti jedna jednačina koja pokazuje zavisnost izlaznog signala od trenutne vrednosti i prethodnih vrednosti ulaznog signala. Ako u sistemu postoji povratna sprega, jednačina će sadržavati i zavisnost od prethodnih tačaka izlaznog signala. Za posmatrani primer dobije se izlazni signal u obliku:

$$y_n = a \cdot c \cdot x_{n-1} + b \cdot c \cdot x_{n-2} + c \cdot y_{n-1}. \quad (3.4.6b)$$

Pomoću ove jednačine uvek se, uz poznat pobudni signal, može odrediti izlazni signal. Linearna diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima uvek se može napisati u obliku:

$$y_n = \sum_{m=0}^M b_m \cdot x_{n-m} + \sum_{k=1}^K a_k \cdot y_{n-k}. \quad (3.4.7)$$

Ovakve jednačine mogu se iskoristiti na nekoliko načina:

- Ako je zadat ulazni signal i početni uslovi, izlazni signal može se odrediti tačku po tačku. Ovaj postupak primenljiv je samo za jednostavne signale i sisteme;
- Na osnovu diferencne jednačine može se nacrtati, odnosno realizovati sistem (postupak ilustrovan na slici 3.4.6);
- Ako se na ulaz dovede pobuda u obliku delta impulsa, može se odrediti impulsni odziv sistema. Uz pomoć impulsnog odziva može se, primenom konvolucije, odrediti odziv na bilo koji pobudni signal;
- Pomoću diferencne jednačine i impulsnog odziva sistema može se odrediti frekvencijski odziv sistema (kao FTD impulsnog odziva). Frekvencijski odziv odgovara funkciji prenosa kod linearnih sistema i veoma je pogodan za analizu osobina sistema.

Na slici 3.4.6. pokazana je blok šema filtra koji odgovara diferencnoj jednačini datoj izrazom (3.4.7) za $M = K = 3$.

Na slici 3.4.7. pokazan je veoma jednostavan filter. U poređenju sa jednačinom (3.4.7) vidi se da za sve koeficijente a_k važi $a_k = 0$, tj. da nema povratne sprege preko koje bi se izlazni signal vraćao u sistem. Impulsni odziv ovakvog filtra ima oblik:

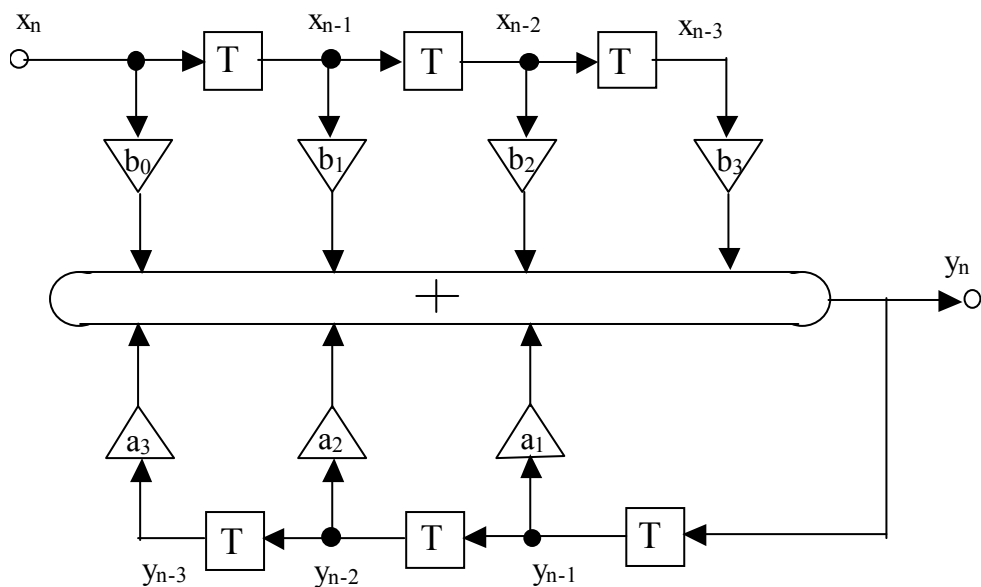
$$h_n = 2 \cdot \delta_n - 0.5 \cdot \delta_{n-1}. \quad (3.4.8)$$

Ovakvi filtri nazivaju se FIR (engl. Finite Impulse Response) filtri, odnosno filtri sa konačnim impulsnim odzivom.

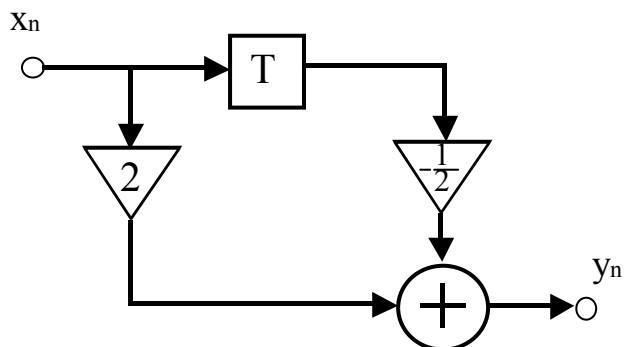
Na slici 3.4.8. pokazan je filter kod koga postoji povratna sprega. Takav filter ima impulsni odziv sa beskonačnim trajanjem:

$$h_n = (-3/4)^n \cdot u_{n-1}. \quad (3.4.9)$$

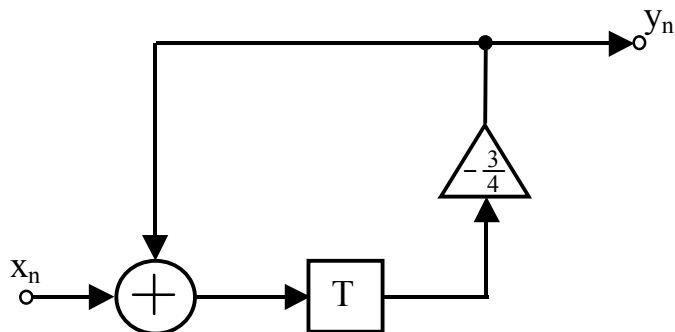
Filtar se naziva IIR (engl. Infinite Impulse Response) filtir.



Slika 3.4.6. Primer filtra realizovanog preko diferencnih jednačina



Slika 3.4.7. Primer jednostavnog FIR filtra



Slika 3.4.8. Primer jednostavnog IIR filtra

Prednosti i nedostaci FIR i IIR filtara

FIR filtri su jednostavniji za analizu od IIR filtara, i uvek su stabilni, tj. nikad se ne može desiti da izlazni signal počne nekontrolisano da raste. IIR filtri su, međutim, znatno efikasniji jer se sa manje komponenti (kola za kašnjenje i sabirača) u odnosu na FIR filtre preciznije realizuju zahtevane prenosne karakteristike.

Projektovanje diskretnih sistema

Diskretni sistemi ili filtri, projektuju se na osnovu potreba koje se jave u toku obrade signala. Postoji čitav niz različitih postupaka koji detaljno opisuju kako se realizuju pojedine konkretne varijante filtriranja. Mogu se izdvojiti dve široke grupe postupaka za projektovanje filtara:

- Projektovanje digitalnih na osnovu analognih filtara,
- Projektovanje filtara na osnovu zadate funkcije prenosa u frekvencijskom domenu.

Za svaki postupak projektovanja postoje detaljno razrađeni algoritmi. Detalji postupaka proučavaju se u posebnom predmetu, nazvanom Digitalna obrada signala.

Naročit značaj u digitalnoj obradi signala igra numerička tačnost postupka. Postoje tri osnovna razloga:

- 1) diskretni signali numerički se zapisuju sa konačnim brojem cifara, što znači da se vrednosti signala kvantizuju, bez obzira na namere korisnika,
- 2) koeficijenti filtra (numeričke vrednosti pojačanja pojačavača) moraju se zaokružiti na vrednost sa konačnim brojem decimala,
- 3) računске operacije sabiranja i množenja u signal procesorima nisu potpuno tačne, nego imaju za posledicu određeno zaokruživanje rezultata.

Zbog navedenih razloga postupak projektovanja filtara neophodno mora da obuhvati i detaljno testiranje sistema i eventualne korekcije parametara kako bi se umanjili nepoželjni efekti. Detalji nisu tema ovog udžbenika. Mogu se naći u specijalizovanoj literaturi [3].

4. DIGITALIZACIJA SIGNALA

U prethodnim glavama uglavnom su razmatrani signali sa kontinualnim vrednostima, funkcije kontinualne promenljive. Ovaj tip signala obično nazivamo analogni signali, iako to nije sasvim precizan naziv. Poznatiji su sledeći primeri analognih signala:

- telefonski signal,
- signali muzike i govora u radio difuziji,
- klasičan televizijski signal (iako se kod njega već javlja delimična diskretizacija),
- zapis zvuka na gramofonskoj ploči i magnetofonskoj traci, itd.

Najveći deo komunikacionih sistema u prošlosti (do početka osamdesetih godina prošlog veka) korišćen je za prenos analognih signala. Razvojem tehnologije i uređaja za obradu i prenos signala, kao i teoretskih saznanja, od kraja sedamdesetih godina prošlog veka počinje sve intenzivniji razvoj postupaka zasnovanih na sasvim drugačijim principima. Osnov novih postupaka čine digitalizacija analognih signala, obrada i prenos digitalnih signala.

Da bi analogni signal mogao da se pretvori u digitalni, neophodna je realizacija tri postupka:

- a) odabiranje (odmeravanje, uzorkovanje, samplovanje, engl. Sampling) i
- b) kvantizacija (engl. Quantization) i
- c) kodovanje (engl. Coding).

Veoma jednostavno objašnjenje za odabiranje i kvantizaciju moglo bi se dati u jednoj rečenici: Odbirke signala treba uzimati dovoljno često da bi se prenele i najbrže promene u signalu; amplitudu treba kvantizovati dovoljno fino (gusto) da korisnik (najčešće slušalac) bude zadovoljan kvalitetom, tj. da ne primeti razliku između originalnog i kvantizovanog signala.

Kodovanje je poseban postupak kojim se dobijene vrednosti odbiraka opisuju (zamenjuju) nekom oznakom (kodnom reči). U toku prenosa, kodna reč predstavlja originalnu vrednost odbirka.

4.1. Odabiranje signala

Odabiranje je postupak kojim se analogni signal (funkcija sa kontinualnom promenljivom) preslikava (pretvara) u niz brojeva, tj. funkciju sa diskretnim vremenom. Brojevi se nazivaju odbirci (odmerci, uzorci, samplovi). Odbirci odgovaraju vrednostima analognog signala u trenucima koji su međusobno razmaknuti za konstantnu veličinu koja se označava sa T i naziva perioda odabiranja. Postupak se zasniva na teoremi o odabiranju:

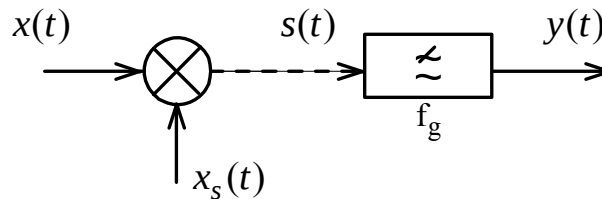
Svaki analogni signal $x(t)$ čiji je spektar (Furijeova transformacija) $X(f)$ ograničen na opseg učestanosti $(0, B)$, jednoznačno je određen signalom odbiraka, $s(t) = x(t) \cdot x_s(t)$, odnosno odbircima s_n , određenim iz izraza: $s_n = x(n \cdot T)$, pod uslovom da perioda odabiranja zado-

voljava nejednakost $T \leq 1/(2 \cdot B)$. Signal $x_s(t)$, sa kojim se vrši odabiranje, ima osobinu periodičnosti, sa periodom T .

Ako se sa f_s označi učestanost odabiranja, $f_s = 1/T$, uslov za važenje teoreme o odabiranju može se napisati i u obliku:

$$f_s \geq 2 \cdot B. \quad (4.1.1)$$

Sistem za odabiranje može se predstaviti šemom na slici 4.1.1. Na slici je prikazan deo za odabiranje, sastavljen od množača, kao i deo za rekonstrukciju signala, NF filter.



Slika 4.1.1. Sistem za odabiranje

Periodični signal kojim se vrši odabiranje, $x_s(t)$, dat je izrazom:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t - kT), \quad (4.1.2)$$

gde je $u(t)$ impuls odabiranja. Na izlazu množača dobija se signal $s(t)$ koji se naziva diskretizovani signal ili signal odbiraka:

$$s(t) = x(t) \cdot x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot u(t - kT). \quad (4.1.3)$$

Ovaj signal, doduše, i dalje je analogni signal. Međutim, ako se odabiranje vrši periodičnom povorkom delta impulsa (tzv. idealno odabiranje), dobijene vrednosti u trenucima odabiranja formiraju diskretni signal, $s_n = x(nT)$. Signal $s(t)$ prenosi se od predajnika, u kom je izvršeno odabiranje, kroz odgovarajući sistem za prenos, do prijemnika, u kom se vrši rekonstrukcija.

Signal na izlazu prijemnika, $y(t)$, dobija se iz signala odbiraka postupkom rekonstrukcije. Rekonstrukcija se vrši pomoću filtra propusnika niskih učestanosti. Ako je zadovoljen uslov teoreme o odabiranju, a granična učestanost filtra zadovoljava uslov $B < f_g < f_s - B$, signal $y(t)$ proporcionalan je ulaznom signalu, $x(t)$.

Posmatrano bez matematičkih izraza, odbirke treba uzimati dovoljno često da prenesu kompletnu informaciju o promenama vrednosti signala. 'Dovoljno često' znači da unutar svake periode najbrže postojeće promene (a to je baš prostoperiodična promena za koju je učestanost najveća i jednaka širini spektra, B), treba uzeti bar dva odbirka. Ako je ovaj uslov zadovoljen za najbržu promenu, sigurno će biti zadovoljen i za sve sporije promene, kod kojih je perioda promene veća, pa će se u toku jedne njihove periode uzeti i više od dva odbirka.

Učestanost odabiranja koja je jednaka dvostrukoj maksimalnoj učestanosti u spektru ulaznog signala naziva se i Nikvistova učestanost odabiranja (Nyquist Sample Rate). Interesantno je i tumačenje po kom u svakoj sekundi treba preneti bar po dva podatka za svaki Hz iz širine spektra signala. Npr. za signal čija je širina spektra $B = 4 kHz$ treba preneti bar 8000 podataka (odbiraka) u svakoj sekundi.

Dokaz teoreme o odabiranju

Da bi se dokazala teorema o odabiranju, treba pokazati da je izlazni signal, $y(t)$, jednak (ili proporcionalan) ulaznom signalu, $x(t)$. Dokaz je jednostavan ako se poznaju osobine Furijeove transformacije. Posmatrajmo varijantu sa analognom signalom $s(t)$, dobijenim u kolu za odabiranje prikazanom na slici 4.1.1. Spektar tog signala može se odrediti primenom osobine Furijeove transformacije po kojoj proizvod dva signala u vremenskom domenu podrazumeva konvoluciju njihovih spektara u frekvencijskom domenu. Za dokaz je potrebno:

- 1) da spektar signala $x(t)$ bude ograničen po širini na interval učestanosti $(0, B)$, (za dokazivanje teoreme oblik signala i njegovog spektra nije značajan),
- 2) da se za signal $x_s(t)$ može odrediti Furijeova transformacija (periodičan signal koji se uvek može razviti u Furijeov red, a zatim se može odrediti Furijeova transformacija tog reda).

Furijeov red signala $x_s(t)$ ima oblik $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \cdot e^{jn\omega_s t}$ gde su u_n koeficijenti kompleksnog oblika Furijeovog reda. U zadatku 4.1.1. pokazano je da se koeficijenti signala $x_s(t)$ mogu povezati sa FT impulsa odabiranja kao $u_n = \frac{1}{T} U(n \cdot f_s)$, gde je $U(n \cdot f_s)$ vrednost Furijeove transformacije impulsa odabiranja, $u(t)$, u tački $f = n \cdot f_s$.

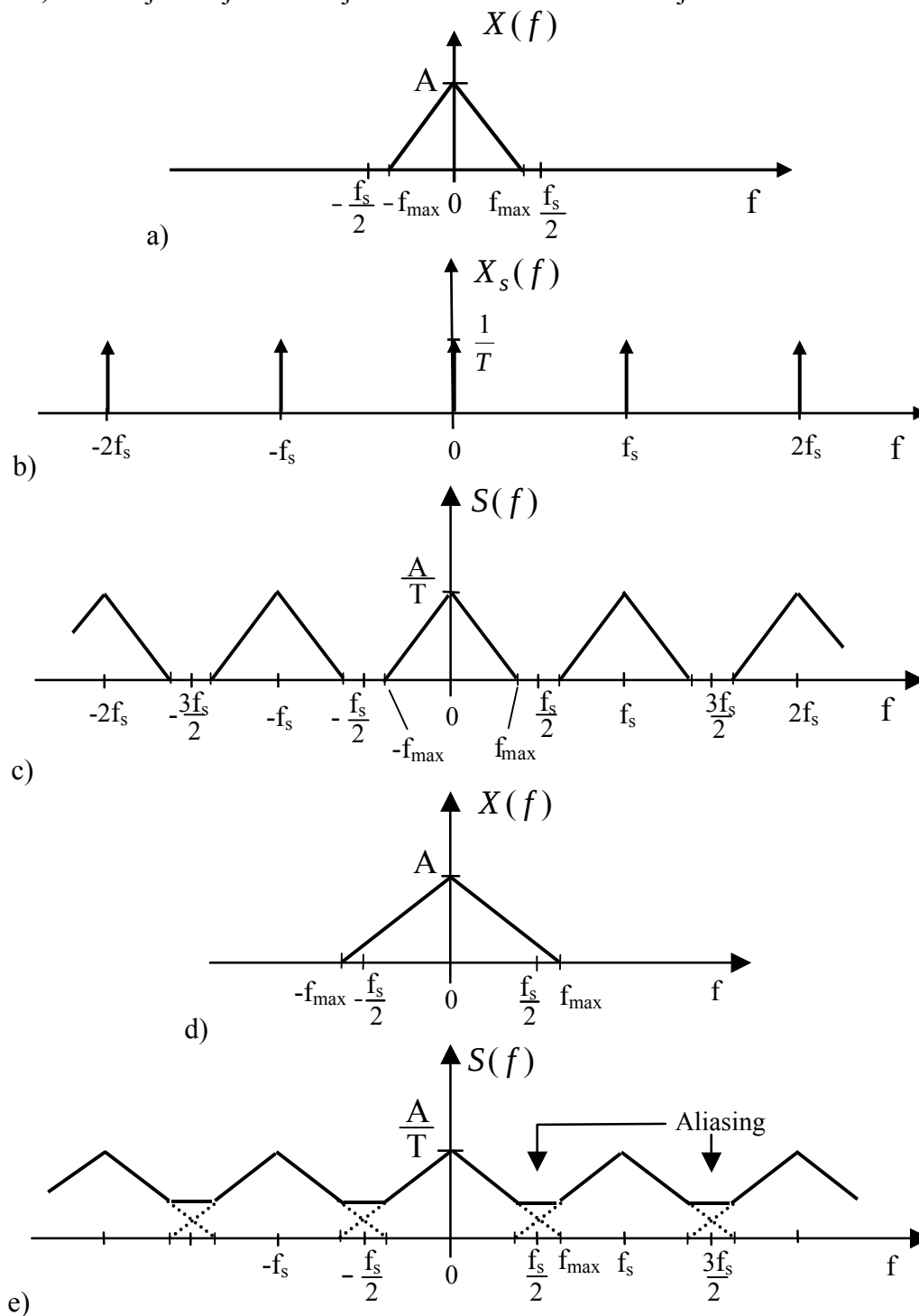
Furijeova transformacija periodičnog signala $x_s(t)$ određuje se primenom osobine linearnosti na Furijeov red, u obliku:

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \cdot e^{jn\omega_s t} \right) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f - n \cdot f_s)t} \cdot dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \cdot \delta(f - n \cdot f_s). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Pošto se signal odbiraka, prema (4.1.3), dobija množenjem dva signala, spektar signala odbiraka jednak je konvoluciji spektra (4.1.4) i spektra originalnog signala, $X(f)$. Pošto se radi o konvoluciji sa povorkom pomerenih delta impulsa, primenom ranije pokazanog postupka, rezultat će imati oblik zbira pomerenih originalnih spektara. Spektar signala odbiraka dobija se u obliku:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \cdot X(f - n \cdot f_s). \quad (4.1.5)$$

Svi spektri pokazani su na slici 4.1.2. za slučaj kada se odabiranje vrši periodičnom povorkom delta impulsa, odnosno kada je $u(t) = \delta(t)$. Odabiranje sa periodičnom povorkom delta impulsa naziva se idealno odabiranje. Na slici 4.1.2a) prikazan je spektar ulaznog signala. Oblik trougla izabran je zato što je pogodan za crtanje i ima osobinu koja često odgovara signalima u stvarnosti: pri većim učestanostima moduo spektra opada. Na slici 4.1.2b) prikazan je spektar signala kojim se vrši odabiranje. Ovaj spektar ima oblik povorke jednakih delta impulsa, amplitude $1/T$. Na slici 4.1.2c) prikazan je spektar signala odbiraka, dobijenog konvolucijom prethodna dva spektra, za slučaj kada je zadovoljen uslov teoreme o odabiranju.



Slika 4.1.2. Spektri signala u postupku odabiranja: ulaznog signala (a) i (d), povorke impulsa (b), signala odbiraka bez preklapanja (c) i sa preklapanjem (e)

Ako je zadovoljen uslov teoreme o odabiranju, neće doći do preklapanja transliranih komponenti spektra. Na slici 4.1.2d) prikazan je spektar ulaznog signala koji je, u odnosu na učestanost odabiranja, širi nego što uslovljava teorema o odabiranju. Na spektru signala odbiraka vidi se posledica: dolazi do preklapanja spektara. Pojava se naziva i aliasing (engl. Alias, lažno ime, Aliasing, lažno predstavljanje).

Signal odbiraka, $s(t)$, prenosi se od predajnika do prijemnika. U ovoj fazi proučavanja smatramo da se signal u toku prenosa ne menja.

Na prijemnoj strani treba, iz signala odbiraka, na neki način rekonstruisati poslani signal. Rekonstrukcija se vrši pomoću filtra propusnika niskih učestanosti. Nakon prolaska signala $s(t)$ kroz takav filter, spektar izlaznog signala dobija se u obliku:

$$Y(f) = H(f) \cdot S(f). \quad (4.1.6)$$

Pošto je $H(f)$ funkcija prenosa idealnog NF filtra, kroz filter će proći samo spektralne komponente signala odbiraka unutar granica $(0, f_g)$. Ako se granična učestanost f_g podesi na vrednost $f_g = f_s / 2$ i ako je zadovoljen uslov teoreme o odabiranju, spektar izlaznog signala može se napisati u obliku:

$$Y(f) = u_0 \cdot X(f), \quad (4.1.7)$$

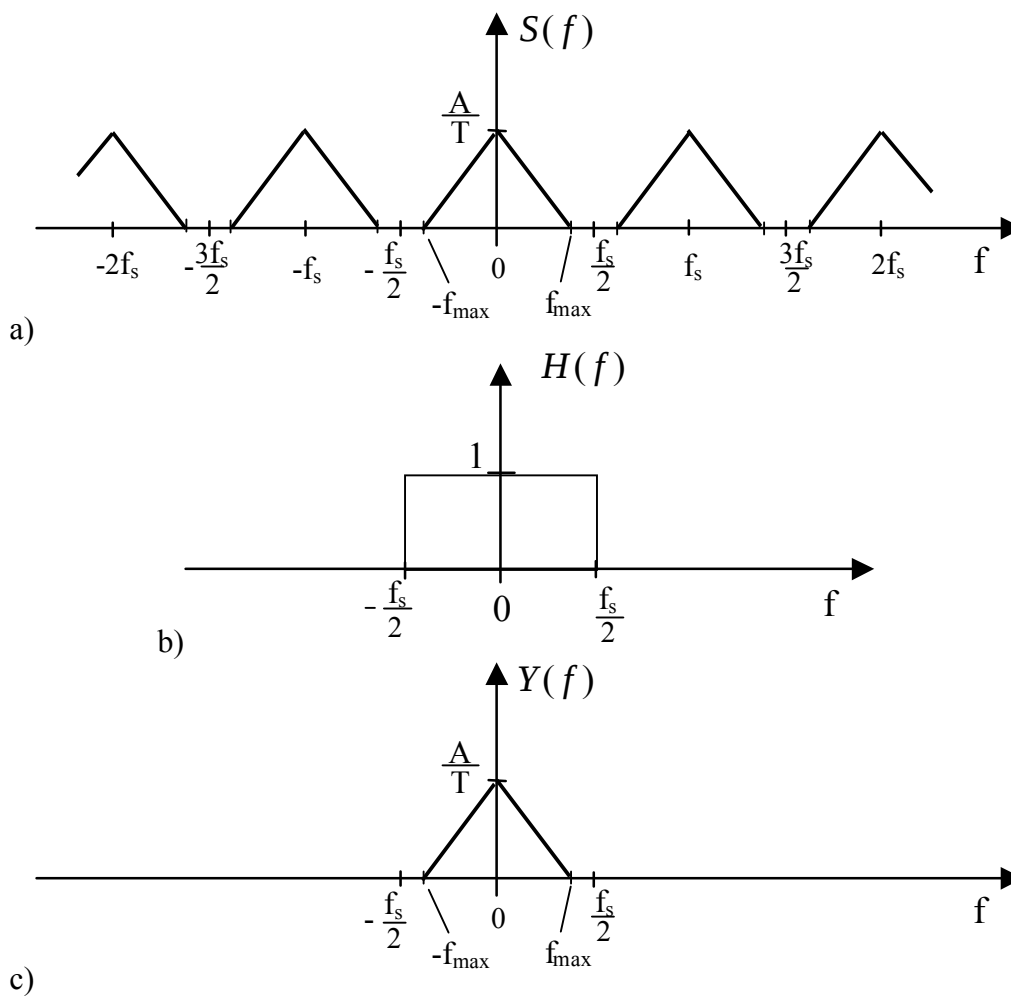
gde je $u_0 = U(0)/T$. Inverznom FT izraza (4.1.7) dobija se da je izlazni signal proporcionalan sa ulaznim, tj. $y(t) = u_0 \cdot x(t)$. Spektri signala na prijemnoj strani za slučaj kada su zadovoljeni uslovi teoreme o odabiranju pokazani su na slici 4.1.3.

Ovim je pokazano da signal koji je rekonstruisan iz signala odbiraka ima vrednost proporcionalnu ulaznom signalu, pa je time dokazana i teorema o odabiranju. U objašnjenju je pretežno korišćen frekvencijski domen jer se u njemu rezultati mogu veoma lako prikazati grafički i objasniti analitičkim postupcima.

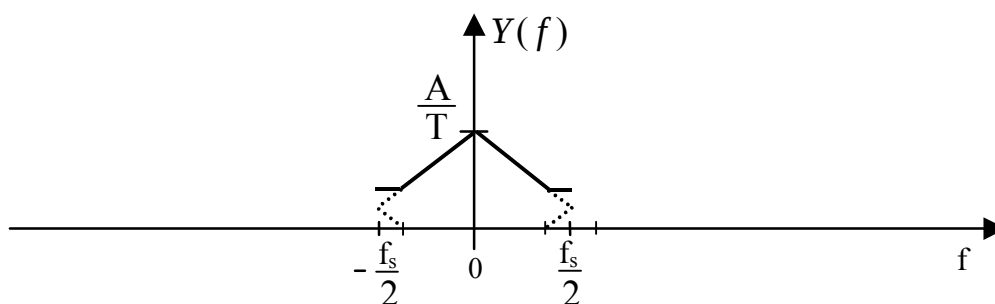
U slučaju da nije ispunjen osnovni uslov teoreme o odabiranju, $f_s > 2 \cdot f_{\max}$, spektar signala odbiraka ima izgled kao na slici 4.1.2e). Nakon prolaska kroz NF filter, spektar izlaznog signala ima oblik prikazan na slici 4.1.4. Na krajevima spektra zapaža se način na koji se manifestuje preklapanje spektra (aliasing): komponenta koja se u ulaznom signalu nalazi na učestanosti $\frac{f_s}{2} + \Delta f$, nakon odabiranja, pojavljuje se na mestu $\frac{f_s}{2} - \Delta f$. Odavde i potiče naziv aliasing (komponente se pojavljuju na promenjenim, 'lažnim' učestanostima). Pri tom dolazi do nepopravljivog oštećenja signala, jer se preklopljene komponente ni na koji način ne mogu razdvojiti.

Prema slici 4.1.4., očigledno je da se pri nedovoljno visokoj učestanosti odabiranja javljaju dva problema:

1. komponente u opsegu učestanosti $\frac{f_s}{2} < f < f_{\max}$ ne mogu se pravilno preneti;
2. usled preklapanja spektra, nepopravljivo su oštećene i komponente u opsegu učestanosti $f_s - f_{\max} < f < f_s / 2$ (lako se uočavaju na slici 4.1.4.).



Slika 4.1.3. Spektri signala na prijemnoj strani: spektar signala odbiraka (a), funkcija prenosa idealnog filtra (b) i spektar izlaznog signala (c)



Slika 4.1.4. Spektar izlaznog signala kad nije zadovoljen uslov teoreme o odabiranju

Prvi problem može se rešiti samo povećanjem učestanosti odabiranja na vrednost koju uslovljava teorema o odabiranju.

Drugi problem može se rešiti tako što se ulazni signal, $x(t)$, pre odabiranja propusti kroz NF filter sa graničnom učestanošću f_g koja je jednaka $f_g = f_s / 2$. Ovakav filter naziva se anti-aliasing filter ili Nikvistov filter.

Rekonstrukcija signala u vremenskom domenu

Objašnjenje postupka rekonstrukcije signala u vremenskom domenu znatno je složenije nego u frekvencijskom domenu. Može se relativno jednostavno objasniti samo u slučaju kada se odabiranje vrši povorkom delta impulsa. Tada se signal odbiraka, $s(t)$, može napisati u obliku:

$$s(t) = x(t) \cdot x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT), \quad (4.1.8)$$

jer delta impulsi imaju sledeću osobinu: njihova širina teži nuli pa se pri množenju delta impulsa sa bilo kojom funkcijom, $x(t)$, dobija rezultat koji i dalje sadrži delta impuls, na istom mestu na kom je bio pre množenja, ali pomnožen sa konstantom jednakom vrednosti funkcije u tački u kojoj se nalazi impuls. Signal na izlazu idealnog filtra (linearnog sistema) može se izračunati u vremenskom domenu kao konvolucija pobude, $s(t)$ i impulsnog odziva sistema, $h(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) = s(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(\tau - kT) \right] \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot h(t - kT). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

U prethodnom izrazu primenjeni su već poznati postupci zamene redosleda integracije i sabiranja, kao i uvođenje smene $\tau - kT = \lambda$. Pošto je impulsni odziv filtra idealnog propusnika niskih učestanosti jednak:

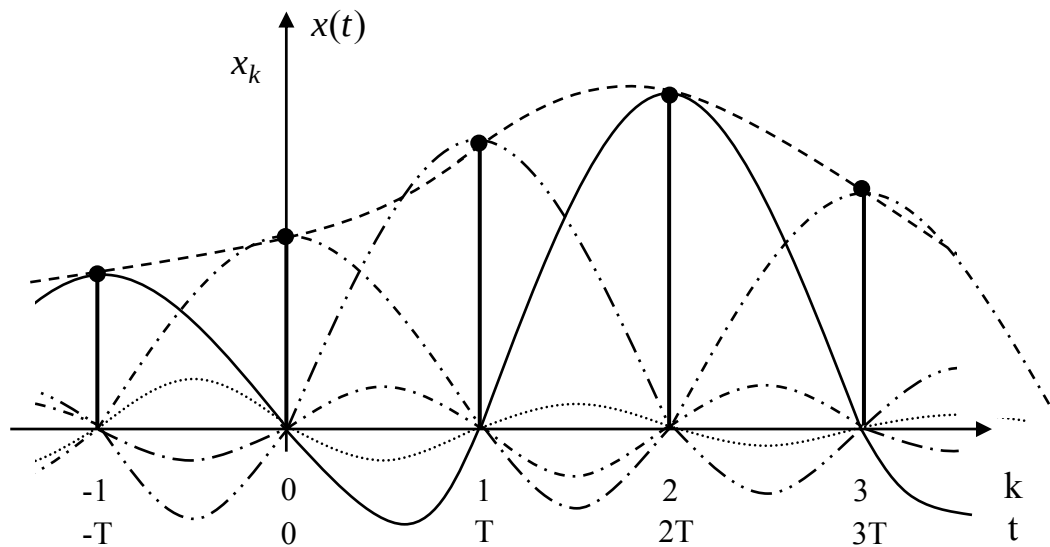
$$h(t) = 2f_g \cdot \frac{\sin(2\pi f_g t)}{2\pi f_g t}, \quad (4.1.10)$$

izlazni signal može se, konačno, napisati u obliku:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot 2f_g \cdot \frac{\sin[2\pi f_g (t - kT)]}{2\pi f_g (t - kT)}. \quad (4.1.11)$$

Iz izraza (4.1.11) vidi se da je u tačkama u kojima se uzimaju odbirci, $t = k \cdot T$, vrednost izlaznog signala jednaka vrednosti posmatranog odbirka, jer je uticaj svih ostalih sabiraka jednak nuli, zbog osobina funkcije tipa $\sin x / x$. U tačkama između onih u kojima se uzimaju odbirci vrši se sabiranje svih sabiraka u izrazu (4.1.11).

U vremenskom domenu veoma se teško analitički dokazuje da je rezultat baš jednak očekivanom, ali numerički postupci pokazuju da je rezultat upravo originalna funkcija. Izraz (4.1.11) prikazan je grafički na slici 4.1.5. Skup vrednosti $x(kT) = x_k$ prikazan je kao povorka odbiraka ili 'štapića' (to nisu delta impulsi nego način na koji se obično crta diskretni signal) lociranih u trenucima $t = k \cdot T$. U okolini svakog odbirka nacrtan je impulsni odziv idealnog NF filtra, a crtkana funkcija predstavlja zbir svih odziva, u skladu sa izrazom (4.1.11). I u slučajevima u kojima nije vršeno idealno odabiranje treba izračunati konvoluciju signala odbirka i impulsnog odziva, ali ovaj postupak nije jednostavan ni analitičkim ni grafičkim putem.



Slika 4.1.5. Rekonstrukcija signala u vremenskom domenu

Specifičnosti u postupku odabiranja

Teorema o odabiranju propisuje minimalnu učestanost odabiranja za koju je moguća rekonstrukcija originalnog signala. Dobra osobina minimalne učestanosti odabiranja jeste činjenica da je broj odbiraka minimalan, a nedostatak je potreba za idealnim NF filtrom, za koji je već pokazano da se u praksi ne može realizovati.

Učestanost odabiranja može da bude veća od minimalne, Nikvistove. Pri tom su translirane komponente spektra na frekvencijskoj osi razmaknutije nego pri Nikvistovoj učestanosti odabiranja. Pri većoj učestanosti lakše se realizuje filter koji obezbeđuje rekonstrukciju signala, ali je broj odbiraka u jedinici vremena veći, što zahteva veći broj računskih operacija u jedinici vremena, odnosno bržu obradu signala. Pravilan izbor učestanosti odabiranja predstavlja inženjerski kompromis.

Rešeni primeri uz poglavlje 4.1.**Zadatak 4.1.1. (E, S)**

Signal $x(t)$ ima spektar $X(f)$ ograničen na interval učestanosti $(0 \div f_m)$. Signal kojim se vrši odabiranje dat je izrazom (4.1.2), gde je T perioda odabiranja, a $u(t)$ impuls odabiranja. Poznato je da je $u(t) = 0$ za $|t| > \tau/2$, $\tau < T$, a FT signala $u(t)$ je $U(f)$.

a) Odrediti spektar diskretizovanog signala (signala odbiraka) $s(t)$.

b) Odrediti minimalnu vrednost f_s i graničnu učestanost NF filtra, f_g , tako da se dobije $y(t) = k \cdot x(t)$. Kolika je konstanta k ?

c) Ako je:
$$u(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{drugde,} \end{cases}$$

$\tau = T/2$, $f_s = 3f_m$, $f_g = f_m$, nacrtati spektar diskretizovanog signala i odrediti izlazni signal $y(t)$.

Rešenje:

a) Odabiranje se vrši periodičnim signalom $x_s(t)$. Signal se može razviti u Furijeov red:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{j2\pi n f_s t}, \text{ gde su koeficijenti dati izrazom:}$$

$$x_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x_s(t) \cdot e^{-j2\pi n f_s t} dt.$$

Pošto u intervalu $(-T/2 \div T/2)$ važi identitet $x_s(t) = u(t)$, pa se u prethodnom izrazu može izvršiti zamena periodične funkcije $x_s(t)$ sa jednim impulsom odabiranja, $u(t)$:

$$x_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cdot e^{-j2\pi n f_s t} dt.$$

Pošto je $u(t) = 0$ za $|t| > T/2$, mogu se proširiti granica integrala na $(-\infty \div \infty)$, a da se pri tom ne promeni vrednost integrala. Dobija se sledeći izraz:

$$x_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi n f_s t} dt.$$

Integral je jednak definicionoj formuli za Furijeovu transformaciju, ali ne u obliku funkcije od učestanosti nego funkcije od celobrojnih vrednosti $f = n f_s$:

$$x_n = \frac{1}{T} \cdot U(n f_s).$$

Na osnovu izvedenih izraza vidi se da koeficijenti Furijeovog reda odgovaraju vrednostima FT u tačkama $n f_s$.

Signal odbiraka jednak je:

$$s(t) = x_s(t) \cdot x(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot U(n f_s) \cdot e^{j2\pi n f_s t}.$$

FT prethodnog izraza određuje se na sledeći način:

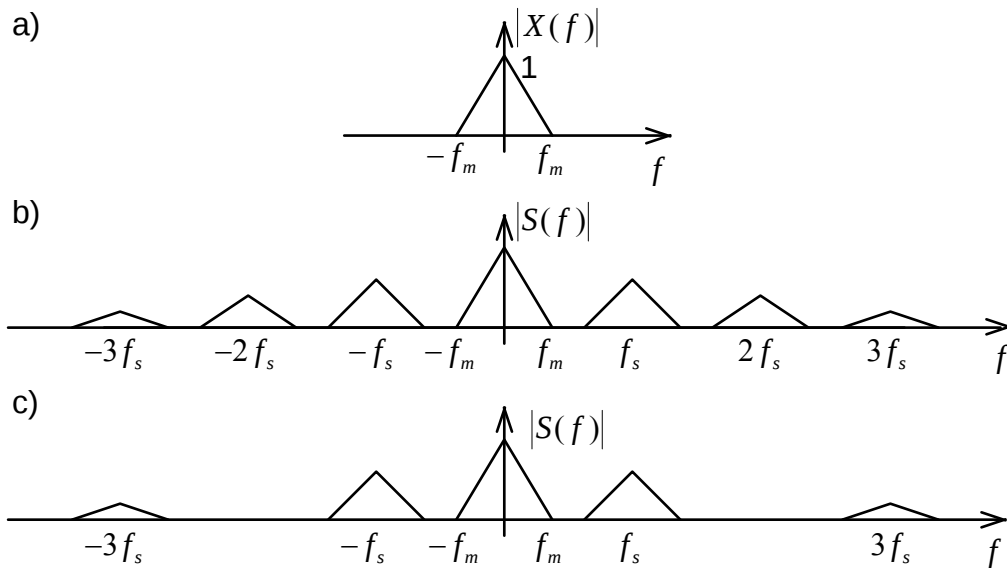
$$S(f) = F\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot U(n f_s) \cdot e^{j2\pi n f_s t} \right] \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(nf_s) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(f-nf_s)t} dt = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(nf_s) \cdot X(f-nf_s). \quad (1)$$

Spektar signala odbiraka, $S(f)$, prema izrazu (1), predstavlja beskonačan zbir spektara funkcije $x(t)$ transliranih na frekvencijskoj osi za učestanost nf_s i pomnoženih težinskim koeficijentom (kaže se i ‘ponderisanih koeficijentom’) $U(nf_s)$. Koeficijent je, u opštem slučaju, kompleksni broj. Izraz (1) ima ogroman značaj. U rešavanju zadataka može se koristiti bez izvođenja.

b) Za funkciju $X(f)$ u obliku trougla (oblik trougla izabran je radi jednostavnosti crtanja), prikazanu na slici 1a., spektar $S(f)$ skiciran je na slici 1b. Da bi se na izlazu NF filtra dobila funkcija $y(t) = k \cdot x(t)$, treba izbeći preklapanje transliranih komponenti u spektru $S(f)$ i, pomoću NF filtra, izdvojiti član za koji je $n = 0$. Sa slike je očigledno da moraju biti ispunjeni uslovi: $f_s \geq 2f_m$ i $\frac{f_s}{2} > f_g \geq f_m$.

Konstanta k , prema (4.1.7), ima vrednost $k = u_0 = U(0)/T$.



Slika 1. Spektralna gustina amplituda ulaznog signala $x(t)$ (a), signala odbiraka u opštem slučaju (b) i signala odbiraka ako je $u(t)$ pravougaoni impuls kod kog je $\tau/T = 0.5$ (c)

c) Za zadato $u(t)$, koeficijenti Furijeovog reda (tj. FT na celobrojnim umnošcima učestanosti odabiranja) imaju vrednosti:

$$\frac{1}{T} \cdot U(nf_s) = \frac{1}{T} \cdot U\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} = \begin{cases} 1/2 & n = 0, \\ 0 & n = 2k, \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1. \end{cases} \quad (2)$$

Treba zapaziti da povorka pravougaonih impulsa, kod kojih je trajanje impulsa jednako trajanju pauze ($\tau/T = 0.5$) ima interesantnu osobinu: sadrži samo neparne harmonike.

FT diskretizovanog signala, prema (1) i (2), može se napisati u obliku:

$$S(f) = \frac{1}{2} X(f) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cdot X[f - (2k+1)f_s].$$

Spektar diskretizovanog signala $s(t)$ prikazan je na slici 1c. Za vrednost granične učestanosti zadatu u tekstu zadatka, $f_g = f_m$, filter eliminiše sve translirane komponente u spektru signala

odbiraka, pa se za izlazni signal dobija: $y(t) = \frac{1}{2} x(t)$.

Zadatak 4.1.2. (E, S)

Signal kojim se vrši odabiranje u sistemu sa slike 4.1.1. dat je izrazom:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T \cdot \delta(t - kT).$$

Na ulaz sistema dovodi se signal:

$x(t) = X_1 \cos \omega_1 t + X_2 \sin \omega_2 t$, gde su X_1 i X_2 konstante, a učestanosti imaju vrednosti:

$f_1 = 2 \text{ kHz}$ i $f_2 = 4 \text{ kHz}$ (Za saobraćajni odsek uzeti $X_2 = 0$).

Odrediti izlazni signal za sledeće periode odabiranja:

a) $T = 100 \mu\text{s}$, b) $T = 200 \mu\text{s}$, c) $T = 500 \mu\text{s}$,

ako je gornja granična učestanost NF filtra $f_g = 4050 \text{ Hz}$.

Rešenje:

Kada se odabiranje vrši periodičnom povorkom delta impulsa pomnoženih konstantom T , kao u tekstu zadatka, tada važi $u(t) = T \cdot \delta(t)$, pa je FT ovakvog impulsa:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} T \cdot \delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = T, \text{ odnosno } U(nf_s) = T \text{ za svako celobrojno } n,$$

pa izraz (1) u zad. 4.1.1. postaje:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s). \quad (1)$$

Spektar $X(f)$ signala $x(t)$ lako se određuje u obliku:

$$X(f) = \frac{X_1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] + \frac{X_2}{2j} [\delta(f - f_2) - \delta(f + f_2)]. \quad (2)$$

Navedenim periodama odabiranja odgovaraju učestanosti odabiranja:

a) $f_s = 10 \text{ kHz}$, b) $f_s = 5 \text{ kHz}$ i c) $f_s = 2 \text{ kHz}$.

Prema jednačinama (1) i (2), spektar signala $s(t)$ sastoji se od delta impulsa, a spektar signala $x(t)$ od prostoperiodičnih komponenti sa tačno određenim učestanostima. Postoji više postupaka za određivanje izlaznog signala. Veoma je jednostavan i pregledan grafički postupak. Sastoji se od crtanja spektra signala $s(t)$ i pažljivog unošenja amplituda i faza uz svaki pojedini delta impuls.

U ovom zadatku detaljno je objašnjen tabelarni postupak. Na osnovu spektra diskretizovanog signala, može se formirati tabela koja sadrži one spektralne komponente (delta impulse) koje se nalaze unutar propusnog opsega NF filtra za navedene učestanosti odabiranja. Podaci su uneti u tabelu 1. U tabelu su unete učestanosti (u kHz) za svaku od komponenti. Pošto je granična učestanost filtra $f_g = 4.05 \text{ kHz}$, vrednosti iznad granične nisu unete u tabelu jer se sigurno neće pojaviti u izlaznom signalu. Ispod učestanosti su upisane amplitude svake komponente. U tabelu su upisane uglavnom komponente na nenegativnim učestanostima, osim jednog izuzetka. Iz tabele se može napisati izraz za spektar izlaznog signala:

$$Y(f) = Y_1(f) + Y_1^*(f),$$

gde se $Y_1(f)$ dobija direktno iz tabele, a $Y_1^*(f)$ opisuje one članove ($n < 0$ i $f_k < 0$ za $n = 0$) koji nisu upisani u tabelu.

Tabela 1. Pregled prostoperiodičnih komponenti

$n = 0$		$n = 1$				$n = 2$			
f_1	f_2	$f_s + f_1$	$f_s - f_1$	$f_s + f_2$	$f_s - f_2$	$2f_s + f_1$	$2f_s - f_1$	$2f_s + f_2$	$2f_s - f_2$
a) $\frac{2}{X_1}$	$\frac{4}{X_2}$	12	8	14	6	22	18	24	16
$\frac{2}{2j}$	$\frac{2}{2j}$	-	-	-	-	-	-	-	-
b) $\frac{2}{X_1}$	$\frac{4}{X_2}$	7	3	9	1	12	8	14	6
$\frac{2}{2j}$	$\frac{2}{2j}$	-	$\frac{X_1}{2}$	-	$-\frac{X_2}{2j}$	-	-	-	-
c) $\frac{2}{X_1}$	$\frac{4}{X_2}$	4	0	6	-2	6	2	8	0
$\frac{2}{2j}$	$\frac{2}{2j}$	$\frac{X_1}{2}$	$\frac{X_1}{2}$	-	$-\frac{X_2}{2j}$	-	$\frac{X_1}{2}$	-	$-\frac{X_2}{2j}$

$n = 3$				$n = 4$			
$3f_s + f_1$	$3f_s - f_1$	$3f_s + f_2$	$3f_s - f_2$	$4f_s + f_1$	$4f_s - f_1$	$4f_s + f_2$	$4f_s - f_2$
8	4	10	2	10	6	12	4
-	$\frac{X_1}{2}$	-	$-\frac{X_2}{2j}$	-	-	-	$-\frac{X_2}{2j}$

Proširenje tabele u vrstama a) i b) za $n = 3$ i $n = 4$ nije potrebno, jer bi sve komponente koje bi se tamo upisale imale učestanost iznad granične.

Za date učestanosti odabiranja dobijaju se sledeći rezultati:

a) $f_s > 2f_m$, pa je izlazni signal $y(t) = x(t)$.

$$b) Y_1(f) = \frac{X_1}{2} \delta(f - f_1) + \frac{X_2}{2j} \delta(f - f_2) + \frac{X_1}{2} \delta(f - (f_s - f_1)) - \frac{X_2}{2j} \delta(f - (f_s - f_2)).$$

Izlazni signal dobija se inverznom transformacijom spektra izlaznog signala, $Y(f)$, i ima oblik:

$$y(t) = X_1 \cos 2\pi f_1 t + X_2 \sin 2\pi f_2 t + X_1 \cos 2\pi (f_s - f_1)t - X_2 \sin 2\pi (f_s - f_2)t.$$

$$c) Y_1(f) = \frac{X_1}{2} \delta(f - 2) + \frac{X_2}{2j} \delta(f - 4) + \frac{X_1}{2} \delta(f - 4) + \frac{X_1}{2} \delta(f) - \frac{X_2}{2j} \delta(f + 2) + \\ + \frac{X_1}{2} \delta(f - 2) - \frac{X_2}{2j} \delta(f) + \frac{X_1}{2} \delta(f - 4) - \frac{X_2}{2j} \delta(f - 2) - \frac{X_2}{2j} \delta(f - 4).$$

Izlazni signal dobija se na način opisan pod b) i ima oblik:

$$y(t) = X_1 \cos 2\pi f_1 t + X_2 \sin 2\pi f_2 t + X_1 \cos 2\pi f_2 t + X_1 + X_2 \sin 2\pi f_1 t + \\ + X_1 \cos 2\pi f_1 t + 0 + X_1 \cos 2\pi f_2 t - X_2 \sin 2\pi f_1 t - X_2 \sin 2\pi f_2 t = \\ = X_1 + 2X_1 \cos 2\pi f_1 t + 2X_1 \cos 2\pi f_2 t.$$

Zadatak 4.1.3. (E)

a) Ako je $x(t)$ signal koji je jednak nuli izvan intervala $|t| \leq T/2$, dokazati da je on potpuno određen vrednostima spektra na umnošcima učestanosti $f_s < 1/T$.

b) Ako je signal $x(t)$ vremenski ograničen na interval T i ako je njegov spektar uglavnom ograničen na opseg učestanosti B , odrediti minimalan broj vremenskih odbiraka N_T i minimalan broj odbiraka spektra N_f kojima je potpuno određen taj signal.

Rešenje:

a) Signal ograničenog trajanja, $x(t)$, ima Furijeovu transformaciju $X(f)$. Od signala $x(t)$ može se konstruisati novi signal $x_p(t)$ tako što se signal $x(t)$ periodično ponavlja sa periodom T_p za koju važi $T_p > T$. Novi signal može se razviti u Furijeov red:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{F}_n \cdot e^{jn\omega_p t},$$

pri čemu su koeficijenti Furijeovog reda:

$$\underline{F}_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t) \cdot e^{-jn\omega_p t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega_p t} dt = \frac{1}{T_p} X(nf_p).$$

Prema prethodnom izrazu, koeficijenti Furijeovog reda signala $x_p(t)$ jednaki su vrednostima FT signala $x(t)$ u tačkama $f = n \cdot f_p$. Signal je potpuno određen svojim koeficijentima Furijeovog reda, a pošto je $x(t) = x_p(t)$ u jednoj periodi i signa $x(t)$ određen je poznavanjem vrednosti istih tih odbiraka.

b) Po teoremi o odabiranju u vremenskom domenu, signal $x(t)$ određen je odbircima svakih $\Delta t = 1/(2B)$ sekundi. Pošto signal $x(t)$ traje T sekundi, ukupan broj odbiraka kojima je određen signal $x(t)$ iznosi:

$$N_T = T/\Delta t = 2 \cdot B \cdot T.$$

Ako se teorema o odabiranju primeni u frekvencijskom domenu na spektar $X(f)$, on je određen odbircima na rastojanju Δf koje se, po analogiji, dobija kao recipročna vrednost trajanja signala, $\Delta f = 1/T$. Kako je $X(f)$ različito od nule u opsegu učestanosti $(0 \div B)$, ukupan broj odbiraka koji određuju $X(f)$ jednak je:

$$N_f = 2 \cdot B/\Delta f = 2 \cdot B \cdot T.$$

Signal je, dakle, definisan jednakim brojem odbiraka u vremenskom i u frekvencijskom domenu.

Zadatak 4.1.4. (E, S)

Spektar signala $x(t)$ različit je od nule samo u opsezima učestanosti $(0 \div B)$ i $(3B \div 5B)$.

Ako je posle odabiranja, u cilju rekonstrukcije signala $x(t)$, primenjena kombinacija filtara idealnih propusnika niskih učestanosti i opsega učestanosti, odrediti sve vrednosti učestanosti odabiranja f_s za koje se na izlazu može dobiti ulazni signal.

Rešenje:

Zadatak se najlakše rešava grafički. Postoje tri grupe rešenja:

$f_s \geq 10B$ (strogo po teoremi o odabiranju),

$f_s = 6B$, (ako se translirani delovi spektra 'učešljavaju' jedni među druge) i

$f_s = 2B$, ako je signal $x_s(t)$ takav da sadrži samo neparne harmonike, odnosno da je važi uslov: $U(2kf_s) = 0$, ($k = 1, 2, \dots$), pa se ponovo delovi spektra učešljavaju ali ne preklapaju.

Zadatak 4.1.5. (E)

Na slici 1. prikazan je sistem za odabiranje. Signal na ulazu ima oblik:

$$u(t) = U \cdot (\cos 2\pi f_m t + \cos 3\pi f_m t), \quad U = 1 \text{ V}, \quad f_m = 2 \text{ kHz}.$$

Signal odabiranja ima oblik:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cdot \delta(t - nT),$$

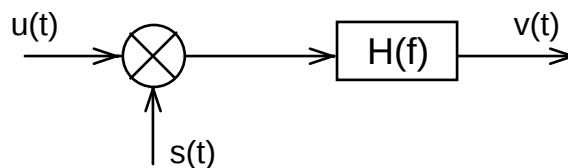
a) NF filter ima prenosnu karakteristiku:

$$H(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f\tau} & |f| \leq f_g, \\ 0 & \text{drugde,} \end{cases} \quad f_g = 4.1 \text{ kHz}, \quad \tau = 0.5 \text{ ms}.$$

Odrediti amplitude i početne faze svih prostoperiodičnih komponenti izlaznog signala $v(t)$ u slučajevima:

a) $f_s = 1/T = 8 \text{ kHz}$,

b) $f_s = 1/T = 6 \text{ kHz}$.



Slika 1. Sistem za odabiranje

Rešenje:

a) $v(t) = U \cdot [\cos 2\pi f_m(t - \tau) + \cos 3\pi f_m(t - \tau)]$.

b) $v(t) = U \cdot [\cos 2\pi f_m(t - \tau) + 2 \cdot \cos 3\pi f_m(t - \tau) + \cos 4\pi f_m(t - \tau)]$.

Zadatak 4.1.6. (E)

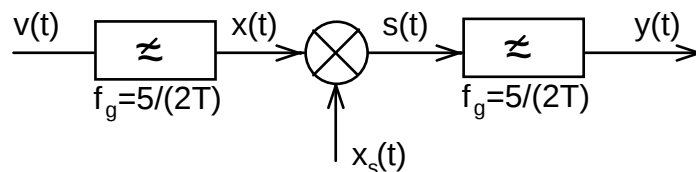
Signal $v(t)$ na ulazu u sistem prikazan na slici 1., dat je izrazom:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - nT), \text{ gde je } u(t) \text{ pravougaoni impuls: } u(t) = \begin{cases} E & |t| < T/4, \\ 0 & \text{drugde.} \end{cases}$$

Odabiranje se vrši periodičnom povorkom delta impulsa:

$$x_s(t) = T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{kT}{2}\right),$$

a) NF filteri su idealni, sa istom graničnom učestanošću. Odrediti izlazni signal $y(t)$.



Slika 1. Sistem za odabiranje sa NF filtrom na ulazu

Rešenje:

Prema tekstu zadatka, ulazni signal je periodična povorka pravougaonih impulsa i pauza jednako trajanja. Za takav signal u zadatku 4.1.1. izraz (2), pokazano je da sadrži samo jednosmernu komponentu i neparne harmonike. Kroz ulazni NF filter praktično prolaze samo jednosmerna komponenta, amplitude $E/2$ i prvi harmonik, amplitude E/π , na učestanosti $f_0 = 1/T$. Ovakav signal odabire se sa učestanošću odabiranja $f_s = 2/T = 2 \cdot f_0$. Nakon odabiranja, spektar signala odbiraka sadrži komponente na svim multiplima učestanosti f_0 . Izlazni filter pušta jednosmernu komponentu i dva harmonika, na učestanostima f_0 i $2 \cdot f_0$, sa amplitudama $E/2$, $2E/\pi$ i E , respektivno. Izlazni signal ima oblik:

$$y(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \cdot \cos \omega_0 t + E \cdot \cos 2\omega_0 t.$$

4.2. Kvantizacija

Kvantizacija je postupak kojim se kontinualni skup vrednosti signala (napona ili struje) preslikava (pretvara) u diskretni skup vrednosti. Kvantizacija je jedan od osnovnih koraka u formiranju digitalnog signala. Kvantizacija je ireverzibilan postupak. Ne postoji način da se, posle izvršene kvantizacije, signal vrati u oblik koji je imao pre kvantizacije.

Postoje dva osnovna tipa kvantizacije: uniformna i neuniformna. Osnovna osobina uniformne kvantizacije jeste da su koraci kvantizacije (pojam koji je detaljno objašnjen u nastavku) jednaki na svim amplitudskim nivoima. Ovakva kvantizacija veoma je jednostavna i za analizu i za realizaciju, ali nije pogodna za primenu kod svih tipova signala. Za mnoge potrebe pogodnije je da koraci kvantizacije ne budu jednaki, nego da budu prilagođeni trenutnim vrednostima signala. Ovakva kvantizacija naziva se neuniformna kvantizacija. Osobine neuniformne kvantizacije objašnjene su u nastavku.

Uniformna kvantizacija

Kvantizacija se najlakše objašnjava grafički, na primeru prikazanom na slici 4.2.1. Uvodi se niz novih pojmova:

- Maksimalna i minimalna vrednost signala, $U_{\max}$ i $U_{\min}$ odgovaraju očekivanoj najvećoj i najmanjoj vrednosti signala koji treba kvantizovati. Često su moduli tih vrednosti jednaki pa važi