

Delta impuls

Delta impuls je posebna vrsta funkcije koja, po nekim tumačenjima, nije funkcija u pravom smislu te reči. Neki autori nazivaju je raspodela (engl. Distribution). Njen detaljni tretman daleko prevazilazi okvire ove knjige. Delta impuls, $\delta(t)$, definiše se pomoću četiri izraza:

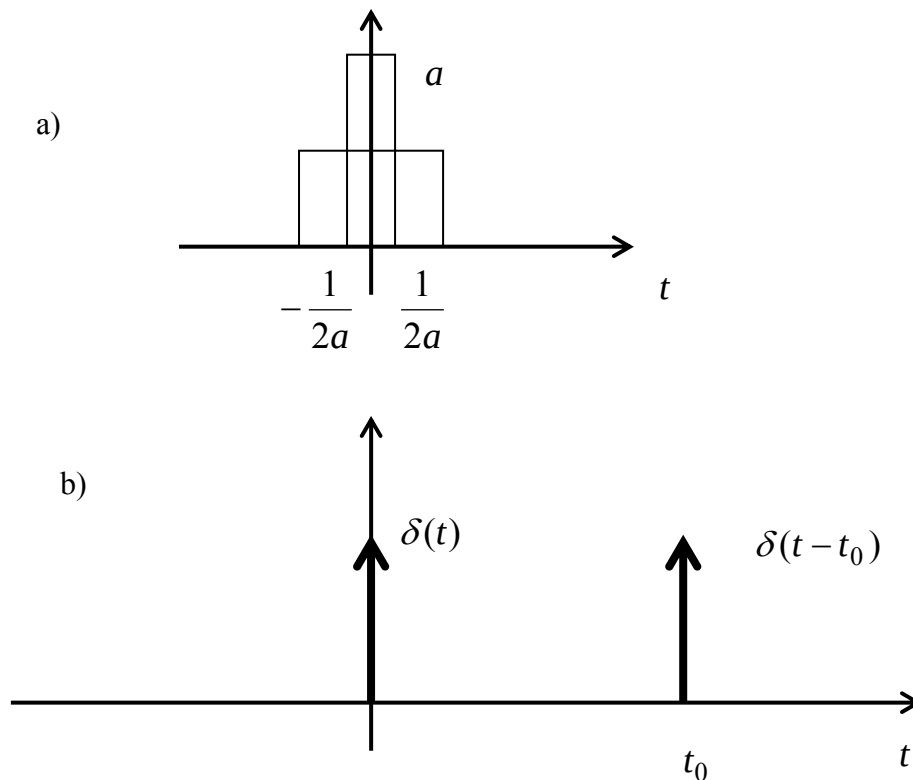
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0, \\ \infty & t = 0, \end{cases} \quad (2.3.20a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1, \quad (2.3.20b)$$

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad \text{i} \quad (2.3.20c)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = x(t_0). \quad (2.3.20d)$$

Izrazi (2.3.20a) i (2.3.20b) imaju interesantno geometrijsko objašnjenje. Delta impuls može da se posmatra kao pravougaonik širine $1/a$ i visine a , kod kog $a \rightarrow \infty$. Prikazan je na slici 2.3.2a. Površina ovog pravougaonika uvek je jednaka jedinici, u skladu sa (2.3.20b). Osim pravougaonika, mogu se posmatrati i drugi oblici koji imaju slične osobine kao funkcija oblika $\sin x / x$, Gausova funkcija, itd. [3].



Slika 2.3.2. Geometrijska ilustracija nastajanja delta impulsa (a), impuls i pomeren impuls (b)

Izraz (2.3.20c) ukazuje na (pomalo neobičnu) osobinu parnosti delta impulsa. Po ovoj osobini, važi i sledeća jednakost:

$$\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t).$$

To znači da je delta impuls uvek lociran u onoj tački u kojoj je vrednost njegovog argumenta jednaka nuli. Parnost je očigledna kod impulsa $\delta(t)$. Ilustrovana je na slici 2.3.2b, ali nije tako očigledna, iako postoji, kod impulsa $\delta(t - t_0)$ na istoj slici. Ova osobina ima čestu primenu.

Poslednji definicioni izraz, (2.3.20d), ima dvostruki značaj, u zavisnosti od toga da li je parametar t_0 konstanta ili promenljiva.

Ako je $t_0 = \text{const.}$, izraz (2.3.20d) ukazuje na osobinu odabiranja: proizvod bilo koje funkcije i pomerenog delta impulsa jednak je vrednosti funkcije u tački u kojoj je lociran delta impuls.

Ako se t_0 posmatra kao promenljiva, tada je mnogo preglednije ako se umesto t_0 upotrebi oznaka koja se češće koristi za promenljivu, τ , pa se, uz dodatnu primenu osobine parnosti, dobija:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - \tau) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(\tau - t) \cdot dt = x(\tau). \quad (2.3.21)$$

U ovom integralu privremena promenljiva označena je sa t . Izraz (2.3.21) pokazuje da konvolucija signala $x(t)$ sa delta impulsom daje originalni signal. To znači da je delta impuls neutralni element za konvoluciju. Ova osobina delta impulsa ima izuzetan značaj u mnogim praktičnim primenama.

Dodatne osobine i primena delta impulsa pokazane su nakon objašnjenja osobina FT.

Osobine Furijeove transformacije

Kao i Furijeov red, i FT ima mnogo osobina koje značajno pojednostavljaju njenu primenu. Ovde su nabrojane i objašnjene najvažnije:

1. Parsevalova teorema.

Po Parsevalovoj teoremi energija aperiodičnog signala, E , može se odrediti i u vremenskom i u frekvencijskom domenu i ima, naravno, istu vrednost:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \cdot df. \quad (2.3.22)$$

Dokazuje se na osnovu osobina kompleksnih funkcija, smenama i zamenom redosleda integracije:

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 P \cdot e^{\frac{\tau}{T}} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^{\infty} P \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{2PT}{1 + (2\pi fT)^2}.$$

b) Srednja snaga slučajnog signala u opsegu $(0 \div f_c)$ ima vrednost:

$$P_1 = 2 \cdot \int_0^{f_c} W(f) df = \frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \arctg(2\pi f_c T) = \frac{P}{2},$$

a srednja snaga slučajnog signala u opsegu $(f_c \div 2f_c)$:

$$P_2 = 2 \cdot \int_{f_c}^{2f_c} W(f) df = \frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \arctg\left(\frac{2\pi f_c T}{1 + 2(2\pi f_c T)^2}\right) = 0.2 \cdot P.$$

Preko činioca 2 sa kojim je pomnožen integral obuhvaćena je snaga za negativne učestanosti.

2.4. Diskretni signali

Paralelno sa teorijom analognih signala i sistema razvijena je i teorija diskretnih signala i sistema. Posmatra se diskretni signal ili signal sa diskretnim vremenom, oblika:

$$x_d = \{\dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}. \quad (2.4.1)$$

Ovaj signal je, u stvari, uređen skup brojeva. Ako brojevi pripadaju kontinualnom skupu vrednosti, govorimo o diskretnom signalu. Ako je izvršena njihova kvantizacija, radi se o digitalnom signalu. U najvećem delu teorije koja je ovde izložena smatramo da se radi o diskretnim signalima. Efekti kvantizacije spomenuti su na kraju poglavlja 3.4.

Obično se smatra da je diskretni signal nastao odabiranjem analognog signala, $x_a(t)$. Između odbiraka x_n i analognog signala tada postoji veza:

$$x_n = x(n) = x_a(nT). \quad (2.4.2)$$

Diskretni signal, međutim, nije uvek nastao odabiranjem analognog signala.

Domen definisanosti diskretnog signala često se naziva vremenski ili signalni domen.

Postoji čitav niz analogija između pojmova koji su ranije uvedeni za analogne signale i sličnih pojmova kod diskretnih signala. U nastavku su navedeni primeri koji pokazuju sličnosti, ali i razlike [2,4,5].

- Signal sa konačnim trajanjem (signal koji je različit od nule u konačnom broju tačaka):

$$x(n) = x_n = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 3, \\ 0 & \text{drugde.} \end{cases} \quad (2.4.3)$$

- Signal sa beskonačnim trajanjem:

$$x_n = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ \alpha^n & n \geq 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

- Jedinični impuls:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & \text{drugde.} \end{cases} \quad (2.4.5)$$

- Pomereni jedinični impuls:

$$\delta_{n-k} = \begin{cases} 1 & n = k, \\ 0 & \text{drugde.} \end{cases} \quad (2.4.6)$$

- Jedinična funkcija (step funkcija):

$$u_n = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ 1 & n \geq 0. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

- Periodični signal:

$$x_n = A \cdot \sin(2\pi n \theta + \phi), \quad (2.4.8)$$

gde je A -amplituda, θ -relativna učestanost, a ϕ -početna faza.

- Kompleksni periodični signal:

$$e^{j2\pi n \theta} = \cos(2\pi n \theta) + j \cdot \sin(2\pi n \theta). \quad (2.4.9)$$

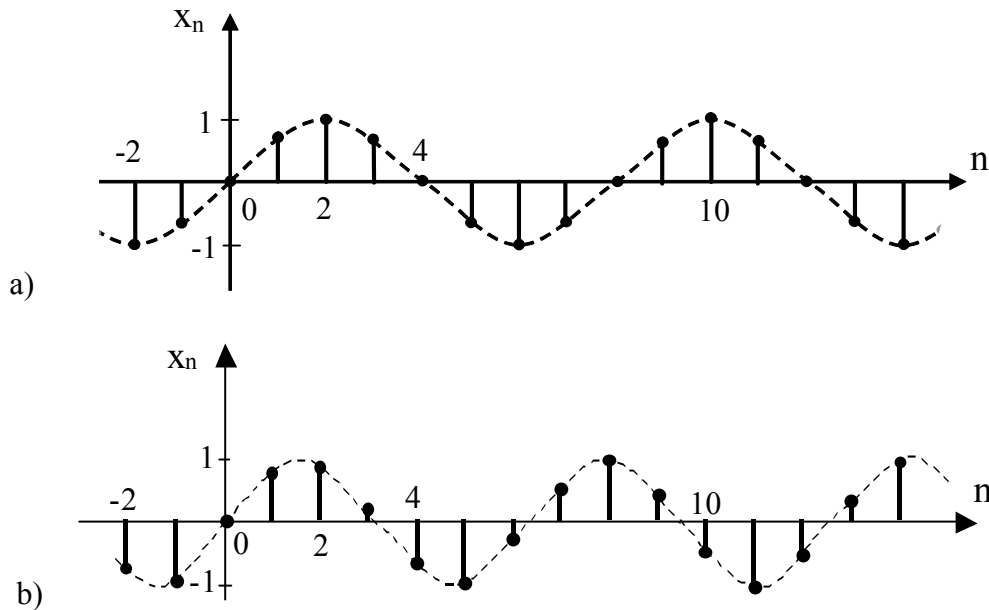
Treba istaći da je jedinični impuls kod diskretnih signala ‘obična’ funkcija, za razliku od kontinualnih funkcija kod kojih je delta impuls definisan na poseban način.

Primer periodičnog diskretnog signala prikazan je na slici 2.4.1 a), dok je na slici 2.4.1 b) prikazan sinusoidalni diskretni signal koji nije periodičan, $x_n = A \cdot \sin(n)$, jer ne postoji ceo broj n_0 za koji važi jednakost $\sin(n) = \sin(n + n_0)$.

Kod analognih signala, signal oblika $x(t) = \sin(t)$ ima osobinu periodičnosti, ali mu je perioda jednaka parnom multiplu broja π .

Signali (2.4.8) i (2.4.9) imaju naročit značaj u obradi signala.

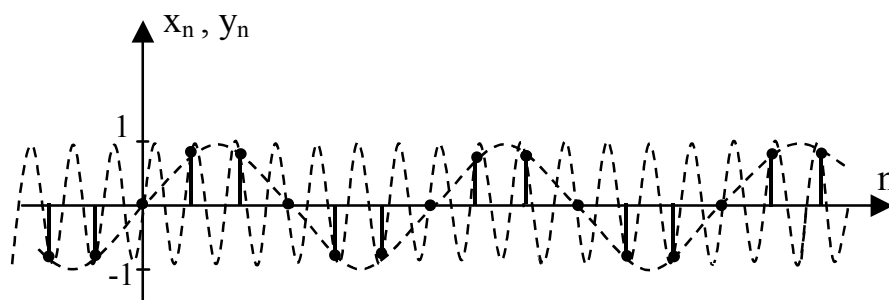
Relativna učestanost θ odgovara učestanosti periodičnog signala, uz neke specifičnosti. Kod analognih periodičnih signala, tipa $\sin(2\pi f_0 t)$, za svaku različitu vrednost učestanosti f_0 dobija se različit signal.



Slika 2.4.1. Periodični diskretni signal a) i aperiodični sinusni signal b)

Kod diskretnih signala postoji značajna razlika. Samo za vrednosti za koje važi $|\theta| < 1/2$ dobijaju se različiti signali. Za ostale vrednosti relativne učestanosti, signali se ne razlikuju od onih iz intervala $|\theta| < 1/2$. U definicionom izrazu (2.4.8) javlja se periodičnost i po promenljivoj n i po relativnoj učestanosti, sa periodom jednakom jedinici. To znači da se jednaki signali dobijaju za $\theta_0, \theta_0 \pm 1, \theta_0 \pm 2, \dots, \theta_0 \pm k, \dots$ gde je θ_0 učestanost za koju važi ograničenje vrednosti na interval $|\theta_0| < 1/2$, a k ceo broj.

Ova se osobina lako dokazuje jer je, npr. $\sin 2\pi n(\theta_0 + k) = \sin(2\pi n\theta_0 + 2\pi nk)$, pa za celobrojne n i k promena faze odgovara vrednosti 2π , a sinusna funkcija ima osobinu periodičnosti sa periodom 2π . Ilustracija ove osobine za funkcije $x_n = \sin 2\pi n \cdot (1/6)$ i $y_n = \sin 2\pi n \cdot (7/6)$ pokazana je na slici 2.4.2.



Slika 2.4.2. Primer dva periodična signala sa različitim učestanostima i jednakom diskretnom realizacijom

Čak i unutar intervala $|\theta| < 1/2$ postoji konjugovano kompleksna simetrija, pošto za kompleksne funkcije važi $e^{j2\pi\theta} = (e^{j2\pi(-\theta)})^*$. Dokaz ove osobine takođe je očigledan.

3. SISTEMI ZA PRENOS I OBRADU SIGNALA

Telekomunikacioni sistem je sistem koji obuhvata sve sklopove neophodne za realizaciju prenosa poruka na daljinu.

Za svaki sistem mogu se uočiti ulazni ili pobudni signali (pobude), $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ i izlazni signali (odzivi), $y_1(t), y_2(t), \dots, y_K(t)$. Sistem je potpuno definisan ako je poznata zavisnost svakog odziva od pobudnih signala. U ovom kursu izučavaju se uglavnom sistemi sa jednom pobudom i jednim odzivom. Kod takvih sistema je $N = K = 1$, a zavisnost je obično data u obliku:

$$y(t) = K[x(t)], \quad (3.0.1)$$

gde K označava funkcionalnu zavisnost, ili operator i opisuje kako funkcioniše sistem.

Prema tipu zavisnosti izlaznog od ulaznog signala, sistemi se dele na linearne i nelinearne, a svaki od njih na inercijalne (sa memorijom) i neinercijalne (bez memorije). Sistemi sa memorijom imaju osobinu da im vrednost odziva u svakom trenutku zavisi od vrednosti pobude u posmatranom trenutku i ranijim trenucima (koji su prethodili posmatranom).

3.1. Linearni sistemi

Ako se zavisnost (3.0.1) može napisati u obliku:

$$y(t) = h_0 \cdot x(t) + h_1 \cdot x(t - \tau_1) + h_2 \cdot x(t - \tau_2) + \dots \quad (3.1.1)$$

pri čemu su $h_0, h_1, h_2, \dots$ koeficijenti (ne zavise od pobude nego imaju konstantnu vrednost), a $\tau_i, i = 1, 2, \dots$ vremenski intervali (vremenske konstante), kaže se da je sistem linearan.

Koeficijenti h_i i konstante $\tau_i, i = 1, 2, \dots$ u potpunosti opisuju sistem.

Linearni sistemi, kao što je već rečeno, dele se na sisteme bez memorije i sisteme sa memorijom.

Ako je bar jedna od konstanti $\tau_i, i = 1, 2, \dots$ različita od nule, kaže se da sistem ima memoriju.

Linearni sistemi bez memorije

Linearni sistemi bez memorije najjednostavniji su za analizu. Njihov drugi naziv je pojačavači. Izlazni signal dobija se množenjem ulaznog signala nekom konstantnom vrednošću koja se naziva pojačanje. U izrazu (3.1.1) praktično postoji samo prvi sabirak, $y(t) = h_0 \cdot x(t)$, a pojačanje je označeno sa h_0 .

Linearni sistemi sa memorijom

Linearni sistemi sa memorijom često se nazivaju filtri. Filtri su sklopovi od posebnog značaja u telekomunikacijama.

Postoji više načina da se pokaže kako se određuje odziv linearnog sistema sa memorijom na zadatu pobudu. Posebnu ulogu u ovim dokazima igra delta impuls. Kada je pobudni signal jednak delta impulsu, $x(t) = \delta(t)$, tada se izlazni signal, $y(t)$, naziva impulsni odziv. Obično se impulsni odziv označava sa $h(t)$ pa, prema (3.0.1), važi jednačina: $h(t) = K[\delta(t)]$.

Ako linearni sistem ispunjava i uslov tzv. vremenske nezavisnosti (invarijantnosti), tada je odziv na pomereni delta impuls jednak pomerenom impulsnom odzivu, tj. $h(t - \tau) = K[\delta(t - \tau)]$. Osobina se relativno lako dokazuje, a jasna je i sama po sebi ako se shvati da vremenska nezavisnost znači da je funkcionisanje sistema potpuno nezavisno od izbora koordinatnog početka, tj. tačke u kojoj je $t = 0$.

Ako se pobudni signal, prema (2.3.21), napiše u obliku konvolucije samog signala sa delta impulsom, tj.:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau, \quad (3.1.2)$$

i ako se operator K iz izraza (3.0.1) primeni samo na veličine koje su funkcija vremena, t (ne i privremene promenljive, τ), dobija se:

$$\begin{aligned} y(t) &= K[x(t)] = K\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot K[\delta(t - \tau)] \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.2a)$$

Izraz (3.1.2a) pokazuje da se odziv linearnog sistema može odrediti pomoću konvolucije pobude i impulsnog odziva posmatranog sistema.

Na osnovu već ranije pokazanih osobina FT, prema (2.3.27), direktno se zaključuje da važi sledeća jednakost:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f), \quad (3.1.3)$$

gde je sa $H(f)$ označena FT impulsnog odziva linearnog sistema.

Funkcija $H(f)$ naziva se prenosna funkcija, funkcija prenosa, prenosna karakteristika ili frekvencijski odziv linearnog sistema. Funkcija prenosa je kompleksna funkcija. Funkcija prenosa i impulsni odziv čine Furijeov transformacioni par i za njih važe sve ranije navedene osobine Furijeove transformacije.

Funkcija prenosa $H(f)$ može se, kao i svaka kompleksna funkcija, predstaviti preko realnog i imaginarnog dela, kao i preko modula i argumenta. Obično se koristi predstava preko modula i argumenta kao:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\Phi(f)} = A(f) \cdot e^{j\Phi(f)} = A(f) \cdot e^{-j\Theta(f)}. \quad (3.1.4)$$

Amplitudska karakteristika, $A(f) = |H(f)|$, uvek je parna funkcija, dok je fazna karakteristika, $\Phi(f)$, neparna funkcija učestanosti. Ponekad se, umesto fazne karakteristike, koristi tzv. karakteristika faznog kašnjenja, $\Theta(f)$. Prema (3.1.4), karakteristika faznog kašnjenja jednaka je negativnoj vrednosti fazne karakteristike.

Filtiri se primenjuju u različitim postupcima za obradu i prenos signala. Obično se problem koji treba rešiti uklapa u neku od sledećih kategorija:

- ako je zadata elektronska struktura linearnog sistema, treba odrediti funkciju prenosa i/ili impulsni odziv;
- ako je zadata funkcija prenosa ili impulsni odziv, treba odrediti odziv na zadatu pobudu;
- ako je zadata funkcija prenosa, treba projektovati elektronsko kolo koje takvu funkciju realizuje u praksi.

U okviru ovog udžbenika objašnjeni su jednostavniji primeri iz prve dve kategorije problema.

Problemi iz treće kategorije ovde se ne razmatraju. Njihovo rešavanje veoma je standardizovano. Primenuju se postupci koji su detaljno opisani u specijalizovanim priručnicima i vezani za praktičnu elektroniku. Očekivana funkcija prenosa linearnog sistema, obično se zadaje u frekvencijskom domenu. Zatim se, primenom neke od standardnih tehnika projektovanja, realizuju uređaji sa karakteristikama što sličnijim zadatim, uz pomoć aktivnih i pasivnih elektronskih komponenti. Složenije realizacije (obično pri tom i skuplje) po pravilu daju bolju aproksimaciju.

Ako je unapred zadata elektronska struktura linearnog sistema, funkcija prenosa određuje se postupcima koji su detaljno analizirani na kursovima iz Osnova elektrotehnike i Teorije električnih kola. Za potrebe analize električnih kola u telekomunikacijama, obično je dovoljno poznavanje elementarnih osobina razdelnika napona, kao i redne i paralelne veze različitih komponentata. Kod jednostavnijih električnih kola, funkcija prenosa lako se izračunava kao kompleksna impedansa ili transmitansa, korišćenjem kompleksnih izraza za impedanse otpornika (R), kalemova ($j\omega L$) i kondenzatora ($1/(j\omega C)$).

Idealan prenos

Strogo posmatrano, idealan prenos podrazumeva da je izlazni signal jednak ulaznom. U praksi je ovaj uslov malo ublažen time što je dozvoljeno da izlazni signal može da ima promenjenu amplitudu i može da kasni za ulaznim signalom, tj. da postoji sledeća veza:

$$y(t) = A \cdot x(t - t_0), \quad (3.1.5)$$

gde su A i t_0 konstante. Primenom FT na ovu jednačinu dobija se da važi:

$$Y(f) = A \cdot e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f) = H(f) \cdot X(f), \quad (3.1.6)$$

odnosno da funkcija prenosa, koja je u opštem slučaju data izrazom $H(f) = A(f) \cdot e^{j\phi(f)}$, prema (3.1.6), kod idealnog prenosa ima oblik $H(f) = A \cdot e^{-j2\pi f t_0}$, tj. ima konstantnu amplitudsku i linearno promenljivu faznu karakteristiku, odnosno linearno promenljivu karakteristiku faznog kašnjenja. Opisane osobine funkcije prenosa treba da budu zadovoljene u opsegu učestanosti u kome je spektar ulaznog signala, $X(f)$, različit od nule, jer samo u tom opsegu učestanosti prenosni sistem ima uticaja na ulazni signal.

Zahtev za linearnošću idealne fazne karakteristike treba dodatno objasniti. Ako se kroz idealan sistem, koji unosi kašnjenje t_0 , prenosi prostoperiodičan signal oblika $\cos \omega t$, izlazni signal imaće oblik $\cos \omega(t - t_0) = \cos(\omega t - \omega t_0)$, pri čemu je $-\omega t_0 = -2\pi f \cdot t_0$ promena faze. Za svaku vrednost ulazne učestanosti, f , promena faze ima različitu vrednost.

Ako nisu zadovoljeni uslovi za idealan prenos, javljaju se izobličenja zbog kojih izlazni signal nije jednak ulaznom signalu. Za slučaj prostoperiodičnog pobudnog signala, izobličenja se svode na promenu amplitude i početne faze. Postupak određivanja odziva detaljno je opisan u zadatku 3.1.1c. Ako signal nije prostoperiodičan, postupak je znatno složeniji. Jedan jednostavan primer pokazan je u zadatku 3.1.4, a opštija analiza data je u poglavlju 5.1. i odgovarajućim zadacima.

Idealni filtri

Treba razlikovati idealan prenos od idealnih filtara. Postoje dve osnovne vrste idealnih filtara. To su propusnici niskih učestanosti (NF filtri) i propusnici visokih učestanosti (VF filtri). Sve ostale vrste filtara, propusnici opsega, nepropusnici opsega, kao i složeniji tipovi filtara, dobijaju se kombinacijama NF i VF filtara.

Idealni NF filtar

Idealni NF filtar ima funkciju prenosa:

$$H_{NF}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f t_0} & |f| \leq f_g, \\ 0 & \text{drugde,} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

gde je f_g gornja granična učestanost, a t_0 konstanta koja se naziva kašnjenje sistema.

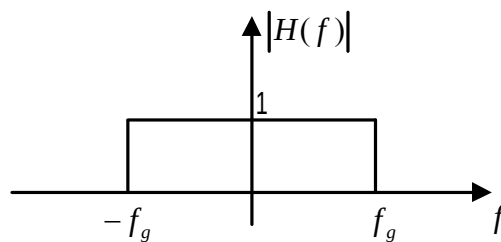
Pomoću inverzne Furijeove transformacije izraza (3.1.7), impulsni odziv NF filtra može se odrediti u obliku:

$$h_{NF}(t) = 2f_g \cdot \frac{\sin[2\pi f_g(t - t_0)]}{2\pi f_g(t - t_0)}. \quad (3.1.8)$$

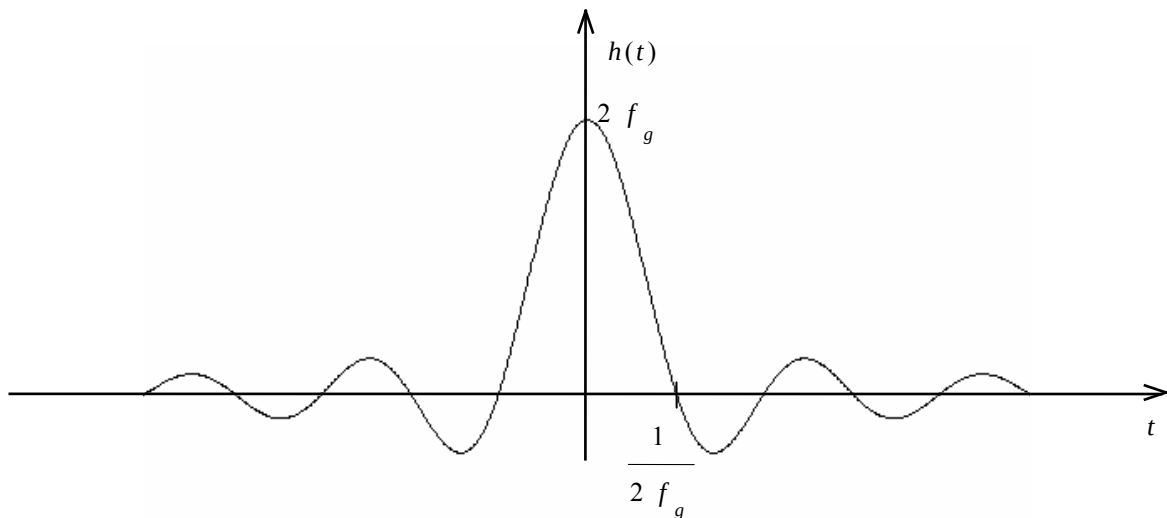
Ako je $t_0 = 0$, dobija se idealni filtar kod kojeg nema kašnjenja.

Na slici 3.1.1. prikazana je funkcija prenosa idealnog NF filtra, a na slici 3.1.2. impulsni odziv tog filtra. Transformacioni par koji čine pravougaoni impuls i funkcija oblika $\sin x / x$ veoma se često sreće u telekomunikacijama, kako kod 1-D tako i kod 2-D signala. Zbog toga je veoma korisno da se dobro shvati veza koja postoji između ove dve funkcije. Važna je i činjenica da se transformacijom pravougaonog impulsa može analitički odrediti funkcija oblika $\sin x / x$, dok se inverzna transformacija realizuje samo pomoću osobine dualnosti, pošto ne postoje odgovarajući tablični integrali koji bi omogućili formalnu integraciju.

Sa slike 3.1.2. vidi se da idealni NF filter ne zadovoljava uslov kauzalnosti, jer odziv na pobudu u koordinatnom početku počinje, teoretski, u $t = -\infty$. Oдавде se zaključuje da se idealni filteri ne mogu praktično realizovati. U praksi se mogu realizovati filteri koji imaju približno idealnu funkciju prenosa, sa impulsnim odzivom koji počinje u trenutku kad se pojavi pobuda i liči na zakasnelu i malo asimetričnu (deformisanu) funkciju sa slike 3.1.2.



Slika 3.1.1. Funkcija prenosa idealnog NF filtra



Slika 3.1.2. Impulsni odziv idealnog NF filtra za $t_0 = 0$

Idealni VF filter

Idealni VF filter ima funkciju prenosa:

$$H_{VF}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f t_0} & f < -f_d \wedge f > f_d, \\ 0 & \text{za } |f| \leq f_d, \end{cases} \quad (3.1.9)$$

gde je f_d donja granična učestanost, a t_0 kašnjenje sistema.

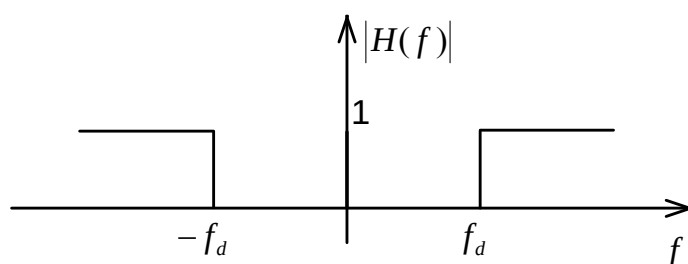
Da bi se odredio impulsni odziv može se direktno izračunati inverzna Furijeova transformacija izraza (3.1.9). Međutim, ako se iskoristi činjenica da se $H_{VF}(f)$ može izraziti preko funkcije prenosa NF filtra kao:

$$H_{VF}(f) = e^{-j2\pi f t_0} - H_{NF}(f), \text{ za } f_g = f_d. \quad (3.1.9a)$$

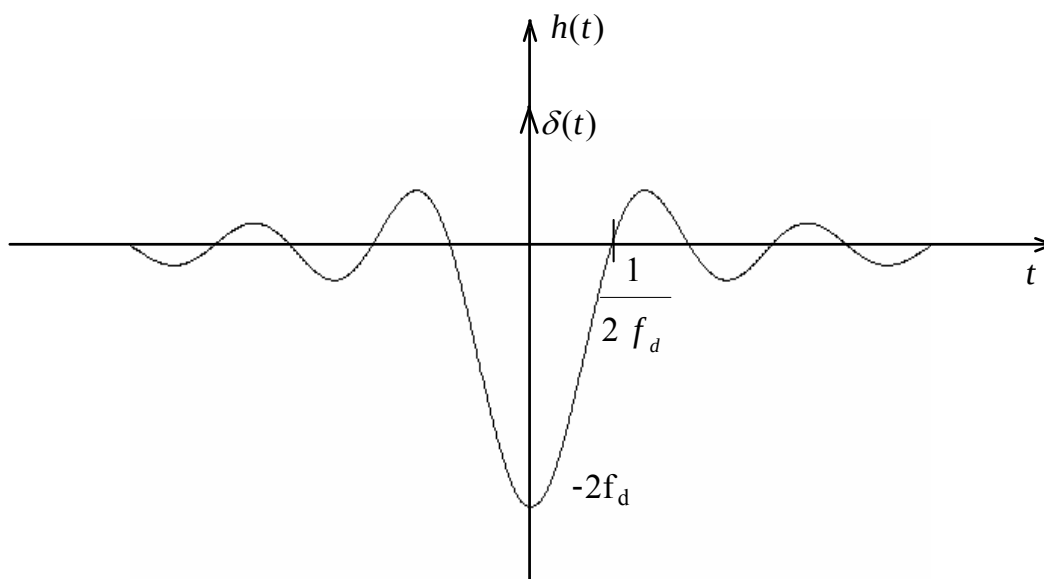
pomoću osobine linearnosti, iz jednačine (3.1.9a) lako se dobija impulsni odziv u obliku:

$$h_{VF}(t) = \delta(t - t_0) - 2f_d \cdot \frac{\sin[2\pi f_d(t - t_0)]}{2\pi f_d(t - t_0)}. \quad (3.1.10)$$

Na slici 3.1.3. prikazana je funkcija prenosa idealnog VF filtra, a na slici 3.1.4. impulsni odziv tog filtra. Važe slični zaključci kao i kod NF filtra.



Slika 3.1.3. Funkcija prenosa idealnog VF filtra



Slika 3.1.4. Impulsni odziv idealnog VF filtra za $t_0 = 0$

Idealni pojasni filter

U telekomunikacijama se često javlja potreba i za idealnim pojasnim filtrom. To je filter koji propušta opseg učestanosti u intervalu $(f_d \div f_g)$. Impulsni odziv može se odrediti direktnom integracijom što se čitaocima preporučuje kao veoma korisna vežba.

Međutim, ako se definišu:

$$\text{širina propusnog opsega } B = \frac{1}{2} \cdot (f_g - f_d) \text{ i}$$

$$\text{centralna učestanost propusnog opsega, } f_c = \frac{1}{2} \cdot (f_g + f_d),$$

može se primeniti sledeći postupak. Prenosna funkcija idealnog pojasnog filtra može se u frekvencijskom domenu dobiti konvolucijom dve funkcije:

- funkcije prenosa idealnog NF filtra kod kog je $f_g = B$ i
- para delta impulsa na učestanostima $\pm f_c$.

Do ovog zaključka može se doći posmatranjem funkcije prenosa pojasnog filtra i poznavanjem konvolucije funkcije sa pomeranim delta impulsom, opisane izrazom (2.3.37a).

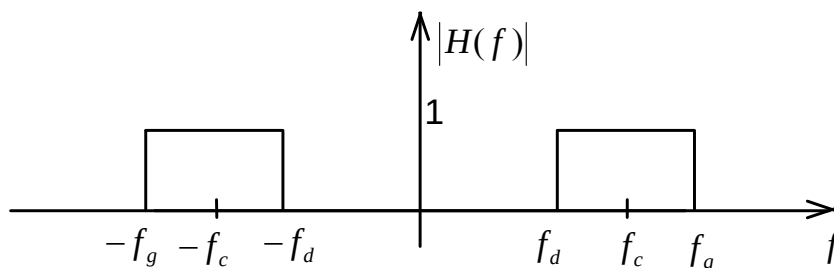
Kao ekvivalent konvolucije dve funkcije u frekvencijskom domenu, u vremenskom domenu treba izvršiti množenje njihovih inverznih transformacija, od kojih je jedna već određena kao $h_{NF}(t)$, uz uslov $f_g = B$, a druga odgovara inverznoj Furijeovoj transformaciji para delta impulsa. Lako se pokazuje da je ova druga funkcija jednaka $2 \cdot \cos 2\pi f_c t$.

Množenjem vremenskih oblika dobija se impulsni odziv pojasnog filtra u obliku:

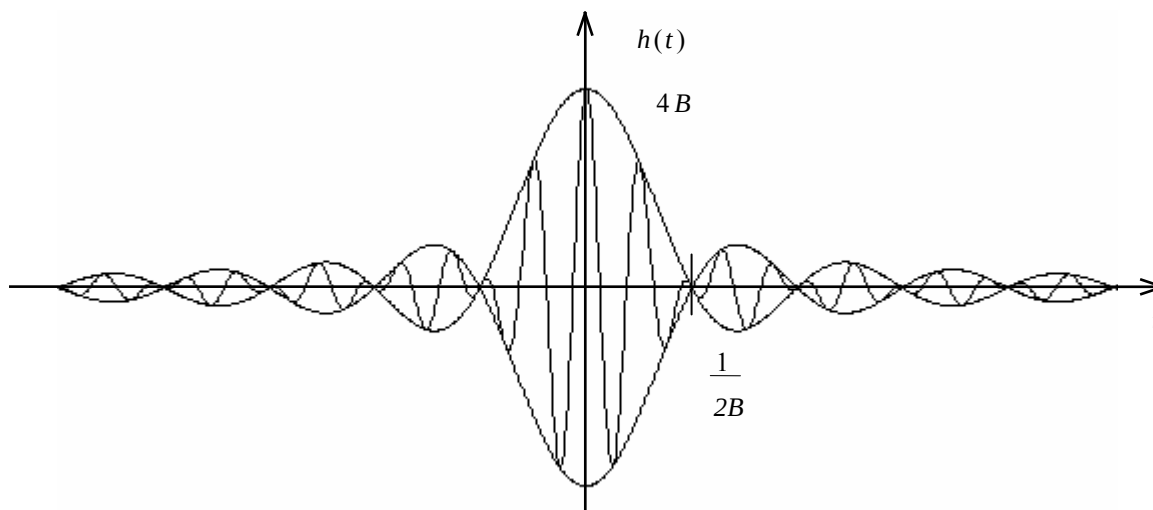
$$h_{PF}(t) = 4B \cdot \frac{\sin[2\pi B \cdot (t - t_0)]}{2\pi B \cdot (t - t_0)} \cdot \cos 2\pi f_c \cdot (t - t_0). \quad (3.1.11)$$

Na slici 3.1.5. prikazana je funkcija prenosa idealnog PF filtra, a na slici 3.1.6. impulsni odziv tog filtra, za $t_0 = 0$. Impulsni odziv ima oblik proizvoda funkcije tipa $\sin x / x$, za koju se rastojanje među nulama određuje pomoću vrednosti B i kosinusoide, čija perioda zavisi od centralne učestanosti pojasnog filtra, f_c .

Ni ovaj filter ne može se praktično realizovati. Moguće su samo različite aproksimacije idealnog filtra. Za praktičnu primenu i aproksimacije filtera daju sasvim zadovoljavajuće rezultate.



Slika 3.1.5. Funkcija prenosa idealnog PF filtra



Slika 3.1.6. Impulsni odziv idealnog PF filtra

Rešeni primeri uz poglavlje 3.1.

Zadatak 3.1.1. (E, S)

Na slici 1. dato je jednostavno RC kolo. Odrediti:

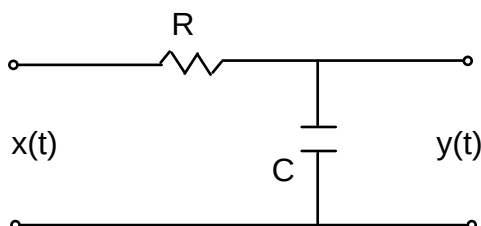
- Funkciju prenosa kola;
- Energiju ulaznog signala kao i odnos energije izlaznog signala koncentrisane u opsegu učestanosti $(0 \div f_g = 1/(2\pi RC))$ i ukupne energije izlaznog signala, ako je ulazni signal oblika:

$$x(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Amplitude i faze komponenti na izlazu kola ako ulazni signal ima oblik:

$$x(t) = X_0 + X_1 \cdot \cos \omega_0 t + X_2 \cdot \sin 2\omega_0 t + X_3 \cdot \cos 3\omega_0 t,$$

pod uslovom da je $\omega_0 RC = 0.5$.

Slika 1. RC kolo

Rešenje:

a) Funkcija prenosa kola može se odrediti na dva načina: indirektno, preko impulsnog odziva u vremenskom domenu i direktno, preko kompleksnih impedansi električnog kola. Pošto je kolo na slici 1. veoma jednostavno (razdelnik napona), mogu se napisati sledeće jednačine u frekven-cijskom domenu:

$$X(f) = (Z_R + Z_C) \cdot I(f), \quad Y(f) = Z_C \cdot I(f), \quad Y(f) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \cdot X(f),$$

pa je funkcija prenosa:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}.$$

b) Energija ulaznog signala može se odrediti u vremenskom domenu kao:

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = A^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} A^2 RC.$$

Energija izlaznog signala lakše se određuje u frekvencijskom domenu:

$W_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$, gde je $Y(f) = H(f) \cdot X(f)$ FT izlaznog signala. Dalje je:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{ARC}{1 + j2\pi fRC}, \quad Y(f) = \frac{ARC}{(1 + j2\pi fRC)^2},$$

$$W_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = (ARC)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\left| (1 + j2\pi fRC)^2 \right|^2} = (ARC)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{\left[1 + (2\pi fRC)^2 \right]^2}.$$

Smenom $\mu = \arctg(2\pi fRC)$ dobije se:
$$W_y = \frac{A^2 RC}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \mu \cdot d\mu = \frac{A^2 RC}{4}.$$

Energija izlaznog signala u opsegu učestanosti $(0 \div f_g)$ računa se na isti način kao W_y , ali sa promenjenim granicama. Konstanta (2) ispred integrala koristi se umesto integrala u simetričnim granicama. Ovakva zamena moguća je samo kod parnih podintegralnih funkcija i često se koristi u telekomunikacijama:

$$W_{yg} = 2 \int_0^{f_g} |Y(f)|^2 df = \frac{A^2 RC}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right), \quad \text{pa je} \quad \frac{W_{yg}}{W_y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0.8.$$

c) Odziv linearnog sistema na pobudu prostoperiodičnim signalom oblika:

$$x_p(t) = U \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi), \quad \text{čija FT ima oblik:}$$

$$X_p(f) = \frac{U}{2} \cdot [e^{j\varphi} \cdot \delta(f - f_1) + e^{-j\varphi} \cdot \delta(f + f_1)],$$

primenom inverzne FT na izraz (3.1.3), ima oblik:

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_p(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f t} df.$$

Primenjujući osobine delta impulsa, kao i princip superpozicije, lako se pokazuje da važi:

$$y_p(t) = \frac{U}{2} \cdot [e^{j\varphi} \cdot H(f_1) \cdot e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j\varphi} \cdot H(-f_1) \cdot e^{-j2\pi f_1 t}].$$

Koristeći opšte osobine modula i argumenta funkcije $H(f)$:

$$H(f) = A(f) \cdot e^{j\Phi(f)}, \quad A(f) = A(-f) = |H(f)|, \quad \Phi(f) = -\Phi(-f) = \arg\{H(f)\},$$

izlazni signal dobija se u obliku:

$$y_p(t) = U \cdot A(f_1) \cdot \cos[2\pi f_1 t + \varphi + \Phi(f_1)]. \quad (1)$$

Oblik odziva linearne mreže na pobudu signalom sinusnog oblika dobija se tako što se ponovi prethodni postupak sa početnom fazom podešenom na $\varphi = -\pi/2$.

Za posmatrano kolo, funkcija prenosa ima oblik:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctg(2\pi f RC)} = A(f) \cdot e^{j\Phi(f)}. \quad (2)$$

Primenjujući princip superpozicije na ulazni signal zadat pod c), dobija se:

$$y(t) = A(0) \cdot X_0 + A(f_0) \cdot X_1 \cdot \cos[\omega_0 t + \Phi(f_0)] + A(2f_0) \cdot X_2 \cdot \sin[2\omega_0 t + \Phi(2f_0)] + A(3f_0) \cdot X_3 \cdot \cos[3\omega_0 t + \Phi(3f_0)].$$

Moduo i argument prenosne karakteristike u tačkama 0 , f_0 , $2f_0$, i $3f_0$, potrebni za konačno definisanje amplituda i faza komponenti izlaznog signala, imaju vrednosti:

$$A(0) = 1; \quad A(f_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad A(2f_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad A(3f_0) = \frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\Phi(f_0) = -\arctg(0.5) = -26.57^\circ; \quad \Phi(2f_0) = -\arctg(1.0) = -45^\circ;$$

$$\Phi(3f_0) = -\arctg(1.5) = -56.31^\circ.$$

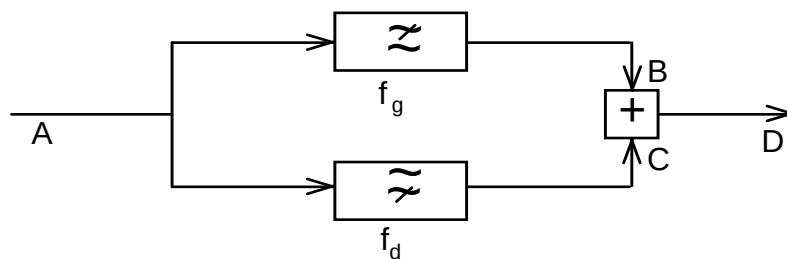
Zadatak 3.1.2. (E, S)

a) Odrediti funkciju prenosa i odgovarajuće impulsne odzive idealnog NF , VF i PF (pajasnog filtra), kad nema kašnjenja.

b) Ako se na ulaz kola na slici 1. dovede signal:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

odrediti energije signala u tačkama B, C i D preko ukupne energije signala, kao i ukupnu prenosnu karakteristiku kola od tačke A do D, pod uslovom da je $f_d = f_g$.



Slika 1. Složeno kolo

Rešenje:

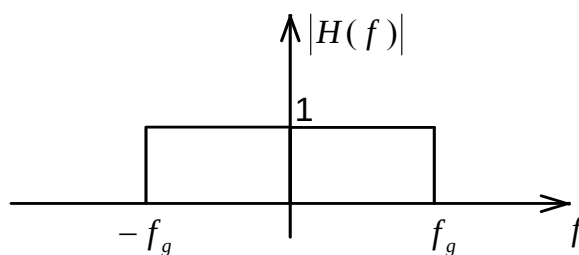
a) Funkcija prenosa idealnog NF filtra, prikazana na slici 2., ima oblik:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_g, \\ 0 & |f| > f_g. \end{cases}$$

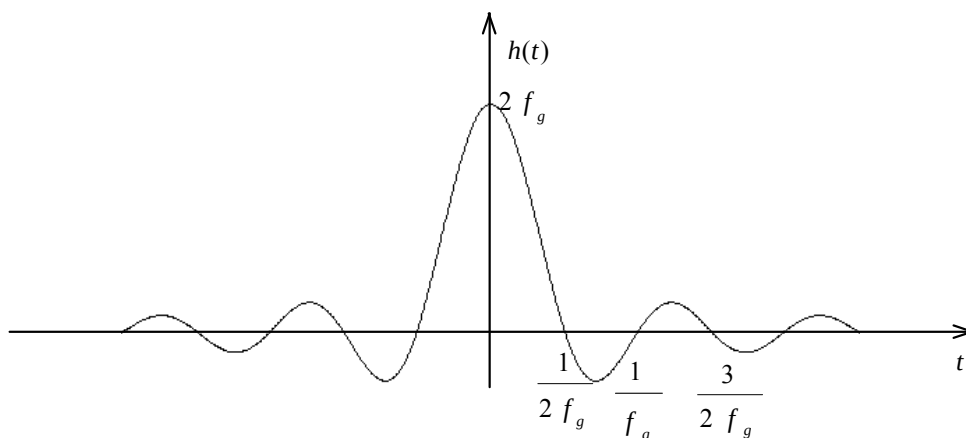
Odgovarajući impulsni odziv prikazan je na slici 3. Dat je izrazom:

$$h(t) = 2f_g \cdot \frac{\sin(2\pi f_g t)}{2\pi f_g t}. \quad (1)$$

Ovaj izraz ponovo potvrđuje dobro poznatu vezu između pravougaonog impulsa i njegovog transformacionog para, funkcije oblika $\sin x/x$.



Slika 2. Funkcija prenosa idealnog NF filtra

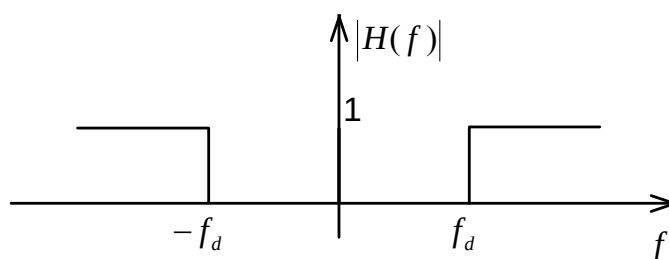
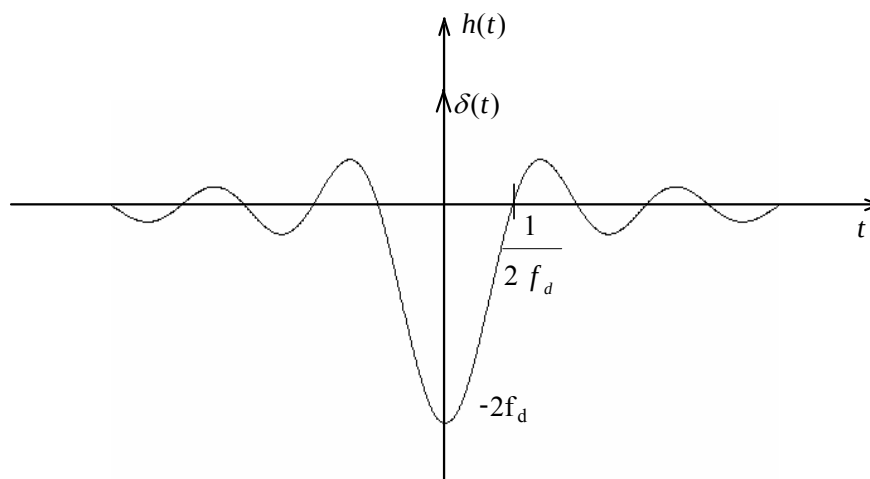
Slika 3. Impulsni odziv idealnog NF filtra

Funkcija prenosa idealnog VF filtra, koji propušta samo komponente iznad donje granične učestanosti f_d , prikazana je na slici 4. i data izrazom:

$$H(f) = \begin{cases} 0 & |f| < f_d, \\ 1 & |f| \geq f_d, \end{cases} \quad (2)$$

a odgovarajući impulsni odziv, prikazan na slici 5. ima oblik:

$$h(t) = \delta(t) - 2f_d \cdot \frac{\sin 2\pi f_d t}{2\pi f_d t}. \quad (3)$$

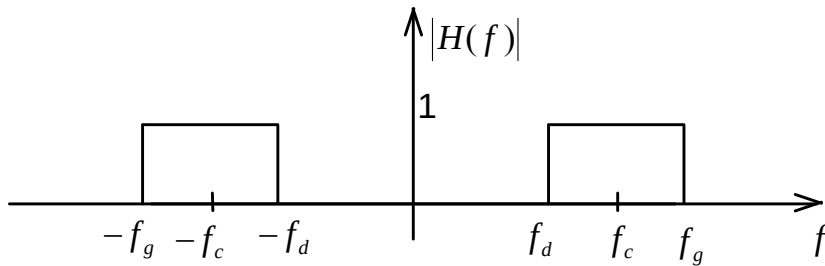
Slika 4. Funkcija prenosa idealnog VF filtraSlika 5. Impulsni odziv VF filtra

Idealni PF filter propušta samo komponente iz opsega $2 \cdot B = f_g - f_d$ oko centralne učestanosti f_c . Njegova funkcija prenosa, data je izrazom (4) (samo za nenegativne učestanosti) i prikazana na slici 6. Odgovarajući impulsni odziv dat je izrazom (5) i prikazan na slici 7.

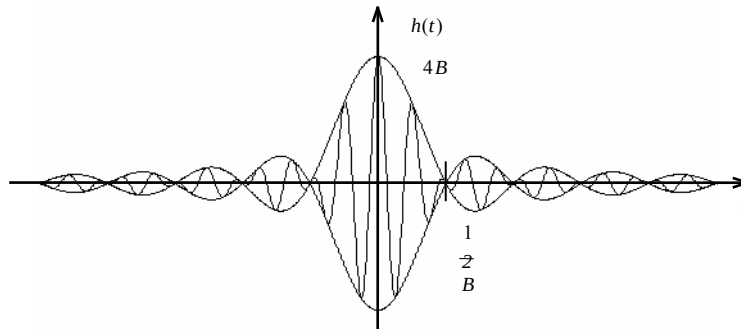
$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_c - B < f < f_c + B, \\ 0 & \text{drugde,} \end{cases} \quad (4)$$

$$h(t) = 4B \frac{\sin 2\pi B t}{2\pi B t} \cos 2\pi f_c t. \quad (5)$$

Za sve tri prenosne karakteristike pretpostavljena je nulta fazna karakteristika.



Slika 6. Funkcija prenosa idealnog pojasnog filtra



Slika 7. Impulsni odziv idealnog pojasnog filtra

b) Ako se signali u tačkama B , C i D označe sa S_B , S_C i S_D , respektivno, odgovarajući spektri ovih signala imaju oblik:

$$S_B(f) = H_{NF}(f) \cdot X(f) = \frac{\tau A}{1 + j2\pi f \tau}, \quad |f| < f_g,$$

$$S_C(f) = H_{VF}(f) \cdot X(f) = \frac{\tau A}{1 + j2\pi f \tau}, \quad |f| \geq f_d = f_g. \quad (6)$$

Energija signala u tački B izračunava se najlakše integracijom u frekvencijskom domenu, pošto vremenski oblik funkcije nije poznat. Dobija se izraz: