

# Diskretna Obrada Signala

*Zbirka zadataka*

Autor  
Minich János  
dipl. Ing Elektrotehnike

Visoka Tehnička Škola Strukovnih Studija  
Subotica  
2007



## Sadržaj

1. Periodični signali	
1.1. Matematički opis osnovnih matematičkih funkcija	5
1.2. Definicija signala	7
1.3. Furierovi redovi periodičnih signala	14
1.4. Spektar periodičnih signala	24
1.5. Spektar snage i širina spektra periodičnih signala	37
1.6. Konvolucija i korelacija periodičnih signala	42
2. Aperiodični signali	
2.1. Matematički opis aperiodičnih signala	45
2.2. Furijerova transformacija i spektar aperiodičnih signala	48
2.3. Energetski spektar i širina spektra aperiodičnih signala	60
2.4. Konvolucija i korelacija aperiodičnih signala	64
3. Diskretni signali i sistemi	73
4. Spektar diskretnih signala	91
5. Diskretni sistemi sa konačnim impulsnim odzivom	119
6. Reference	143



## 1. Periodični signali

### 1.1. Opis osnovnih oblika funkcija i njihov matematički oblik

Prava:

$$y(x) = a \cdot x + b = a \cdot \left( x + \frac{b}{a} \right) = a \cdot (x + c)$$

$a$  – koeficijent nagiba

$a < 0$  – monotono opda

$a > 0$  – monotono raste

$c = \frac{b}{a}$  – koeficijent pomeraja

$c > 0$  – prava pomerene u levo

$c < 0$  – prava pomerene u desno.

Sinusna i kosinusna funkcija

$\omega_0$  – kružna učestanost,

$f_0$  – učestanost,

$T_0$  – perioda

$$y_s(x) = \sin(\omega_0 x - \varphi) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot x - \varphi\right) = \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot x - \varphi),$$

$$y_c(x) = \cos(\omega_0 x - \varphi) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot x - \varphi\right) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot x - \varphi) = \sin\left(\omega_0 x - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Eksponencijalna funkcija

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot e^{a_2 \cdot x}$$

$a_1, a_2 > 0$  – monotono raste

$a_1 > 0, a_2 < 0 \wedge a_1 < 0, a_2 > 0$  – monotono opada

Određeni i neodređeni integrali osnovnih funkcija

$$\int_{x_1}^{x_2} (a \cdot x + b) \cdot dx = \frac{a}{2} \cdot (x_2^2 - x_1^2) + b \cdot (x_2 - x_1),$$

$$\int \sin(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx = -\frac{1}{\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi),$$

$$\int \cos(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx = -\frac{1}{\omega_0} \cdot [\cos(\omega_0 x_2 - \varphi) - \cos(\omega_0 x_1 - \varphi)],$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx = \frac{1}{\omega_0} \cdot [\sin(\omega_0 x_2 - \varphi) - \sin(\omega_0 x_1 - \varphi)],$$

$$\int a_1 \cdot e^{a_2 \cdot x} \cdot dx = \frac{a_1}{a_2} \cdot e^{a_2 x},$$

$$\int_{x_1}^{x_2} a_1 \cdot e^{a_2 \cdot x} \cdot dx = \frac{a_1}{a_2} \cdot [e^{a_2 \cdot x_2} - e^{a_2 \cdot x_1}].$$

Integral proizvoda osnovnih i eksponencijalnih funkcija

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx &= -\frac{1}{\omega_0} \cdot x \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi) + \frac{1}{\omega_0} \cdot \int \cos(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx = \\ &= -\frac{1}{\omega_0} \cdot x \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi) + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx &= \frac{1}{\omega_0} \cdot x \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi) - \frac{1}{\omega_0} \cdot \int \sin(\omega_0 x - \varphi) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{\omega_0} \cdot x \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi) + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi), \end{aligned}$$

$$\int x \cdot e^{a \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot x \cdot e^{a \cdot x} - \frac{1}{a} \cdot \int e^{a \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot x \cdot e^{a \cdot x} - \frac{1}{a^2} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{e^{a \cdot x}}{a^2} \cdot (a \cdot x - 1),$$

$$\int e^{a \cdot x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot x - \varphi) \cdot dx = \frac{e^{a \cdot x}}{a^2 + \omega_0^2} \cdot [a \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi)],$$

$$\int e^{a \cdot x} \cdot \cos(\omega_0 \cdot x - \varphi) \cdot dx = \frac{e^{a \cdot x}}{a^2 + \omega_0^2} \cdot [a \cdot \cos(\omega_0 x - \varphi) + \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 x - \varphi)]$$

Oblici kompleksnih brojeva matematičke operacije definisane nad njima

algebarski oblik:

$$\underline{z} = a + jb$$

trigonometrijski

blik:

$$\underline{z} = r \cdot [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$$

Ojlerov oblik:

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right), a = \operatorname{Re}\{\underline{z}\}, b = \operatorname{Im}\{\underline{z}\}$$

Integrali prostoperiodičnih signala u punoj periodi

$$\begin{aligned} I_{CS} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{T_0} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot m}{T_0} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2 \cdot T_0} \cdot \int_0^{T_0} \left[ \sin\left(\frac{2\pi \cdot (m+n)}{T_0} \cdot t\right) + \sin\left(\frac{2\pi \cdot (m-n)}{T_0} \cdot t\right) \right] \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2 \cdot T_0} \cdot \left[ -\frac{T_0}{2\pi \cdot (m+n)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (m+n)}{T_0} \cdot t\right) \Big|_0^{T_0} - \frac{T_0}{2\pi \cdot (m-n)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (m-n)}{T_0} \cdot t\right) \Big|_0^{T_0} \right] = 0; \forall m, n \end{aligned}$$

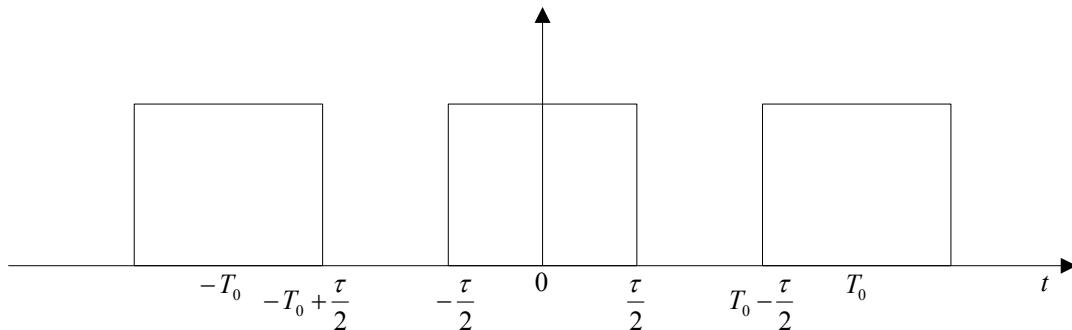
$$\begin{aligned}
I_{CC} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{T_0} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot m}{T_0} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T_0} \cdot \int_0^{T_0} \left[ \cos\left(\frac{2\pi \cdot (m+n)}{T_0} \cdot t\right) + \cos\left(\frac{2\pi \cdot (m-n)}{T_0} \cdot t\right) \right] \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T_0} \cdot \left[ \underbrace{\frac{T_0}{2\pi \cdot (m+n)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (m+n)}{T_0} \cdot t\right)}_{=0} \Big|_0^{T_0} + \frac{T_0}{2\pi \cdot (m-n)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (m-n)}{T_0} \cdot t\right) \Big|_0^{T_0} \right] = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \frac{1}{2}; m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{SS} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{T_0} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot m}{T_0} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T_0} \cdot \int_0^{T_0} \left[ \cos\left(\frac{2\pi \cdot (m+n)}{T_0} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{2\pi \cdot (m-n)}{T_0} \cdot t\right) \right] \cdot dt = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T_0} \cdot \left[ \underbrace{\frac{T_0}{2\pi \cdot (m+n)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (m+n)}{T_0} \cdot t\right)}_{=0} \Big|_0^{T_0} - \frac{T_0}{2\pi \cdot (m-n)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (m-n)}{T_0} \cdot t\right) \Big|_0^{T_0} \right] = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \frac{1}{2}; m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

## 1.2. Definicija i metmatički opis signala.

Signal je funkcija čija je nezavisna promenljiva vreme. Međutim, iz ove jednostavne definicije nesledi, da svaka matematička funkcija može biti signal. U tome nas ograničava činjenica, da signali moraju imati ili konačnu ukupnu snagu ili konačnu ukupnu energiju. Signali se mogu podeliti na više klase po višem broju principa. Naj jednostavnija podela deli signale u klase sa konačnom ukupnom snagom i konačnom ukupnom energijom. Iz ove podele sledi da postoje periodični i aperiodični signali. U ovom poglavlju se analiziraju periodični signali dok u drugom aperiodični.

**Zadatak 1.2.1.** Odrediti osnovnu periodu prikazanog signala kao i odgovarajući matematički opis.



Perioda nekog periodičnog signala predstavlja vremenski interval nakon koj se oblik signala ponavlja. Širina tog vremenskog intervala se obično označava oznakom  $T_0$ . Nepostoji jednoznačna definicija osnovne periode periodičnog signala. Obično se za osnovnu periodu uzima vremenski interval  $t \in [0, T_0]$  ili  $t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$  ako je to matematički opravdani. Bitno je da vremenski interval koji se prihvata kao osnovna perioda, obuhvata celu periodu signala.

Za prikazani signala osnovna perioda

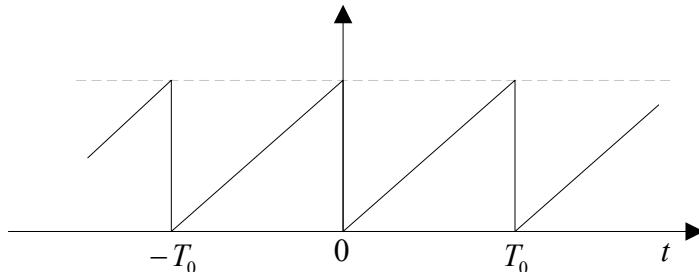
$$s_o(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < \frac{\tau}{2} \\ 0; & \frac{\tau}{2} < t < T_0 - \frac{\tau}{2} \\ 1; & T_0 - \frac{\tau}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

U slučaju da se za osnovnu periodu uzme interval  $t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$ , tada je matematički opis signala jednaka

$$s_o(t) = \begin{cases} 1; & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0; & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

Očigledno da je drugi primer opisa signala matematički zgodniji jer putem funkcije  $|t|$  ona opisuje signala u sažetijem obliku.

**Zadatak 1.2.2.** Odrediti matematički opis periodičnih signala u proizvoljnoj periodi.



Kako je perioda interval nakon kojeg signal ponavlja svoj oblik, na osnovu prikazanog signala lako je videti da je perioda  $T_0$ . Uzmimo za osnovnu periodu vremenski interval  $t \in [0, T_0]$ . U navedenom vremenskom intervalu oblik signala ima oblik prave. Opšti oblik jednačine prave je  $y = ax + b$ . U našem slučaju nezavisna promenljiva je vreme tj.  $x \rightarrow t$ , dok je zavisna promenljiva vrednost signala koju dobijamo u nekom trenutku  $t$  tj.  $y \rightarrow s(t)$ . Za određivanje jednačine prave su potrebne najmanje dve tačke preko kojih prolazi data prava. U datom primeru to su tačke  $t = 0$  i  $t = T_0$  u kojim tačkama vrednost signala ili funkcije su  $s(t = 0) = 0$  i  $s(t = T_0) = 1$  respektivno. Na taj način dobijamo sistem jednačina sa dve jednačine i dve nepoznate

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 + b, \\ 1 &= a \cdot T_0 + b \end{aligned}$$

Iz prve jednačine se dobija da je  $b = 0$  dok iz druge da je  $a = \frac{1}{T_0}$ . Pomoću nađenih koeficijenat matematički opis signala u svojoj osnovnoj periodi će da bude

$$s_o(t) = \frac{1}{T_0} \cdot t; \quad 0 \leq t \leq T_0.$$

Kako je signal periodičan, to će se njegov oblik nepromjenjeno ponoviti i u narednoj periodi kao i u predhodnoj. U narednoj periodi koja obuhvata vremenski interval  $T_0 \leq t \leq 2 \cdot T_0$  matematički opis dobijamo sličnim postupkom kao pre. Vrednost signala na granici datog vremenskog intervala su  $s(t = T_0) = 0$  i  $s(t = 2 \cdot T_0) = 1$ . Sistem jednačina će da bude

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot T_0 + b, \\ 1 &= a \cdot 2 \cdot T_0 + b \end{aligned}$$

Oduzimanjem prve jednačine po redu iz druge, dobijamo da je  $a = \frac{1}{T_0}$ . Uvrštavanjem dobijenog koeficijenta u prvu jednačinu po redu dobijamo drugi nepoznati koeficijent  $b = -1$ . Oblik signala u ovoj periodi opisuje matematički izraz

$$s(t) = \frac{1}{T_0} \cdot t - 1; \quad T_0 \leq t \leq 2 \cdot T_0.$$

Isti opis možemo zadati i u sledećem obliku

$$s(t) = \frac{t - T_0}{T_0}; \quad T_0 \leq t \leq 2 \cdot T_0.$$

Veza između opisa signala u osnovnoj peiodi i u periodi  $T_0 \leq t \leq 2 \cdot T_0$  je data jednačinom

$$s_{T_0 \leq t \leq 2 \cdot T_0}(t) = s_{0 \leq t \leq T_0}(t - T_0).$$

Odredimo sada matematički izraz signala proizvoljne periode koja obuhvata vremenski interval  $n \cdot T_0 \leq t \leq (n+1) \cdot T_0$ . Koristeći se principom nalaženja nepoznatih koeficijenata prave, dobija

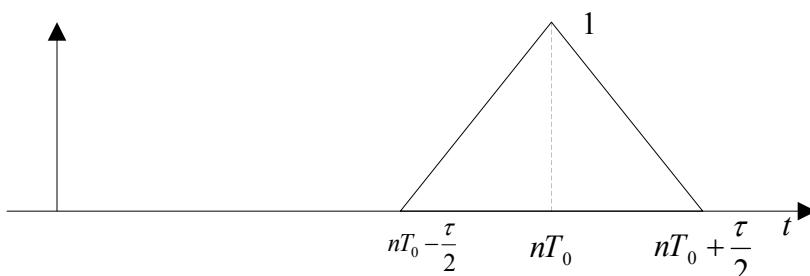
$$\begin{aligned} 0 &= n \cdot a \cdot T_0 + b, \\ 1 &= (n+1) \cdot a \cdot T_0 + b \end{aligned}$$

Nakon rešavanja sistema, tražene nepoznate su  $a = \frac{1}{T_0}$  i  $b = -n$ . Matematički opis signala u n-toj periodi će biti

$$s(t) = \frac{t - n \cdot T_0}{T_0}; \quad n \cdot T_0 \leq t \leq (n+1) \cdot T_0.$$

Za negativne cele brojeve  $n < 0$  dobija se matematički opis signala u periodama koje predhode, dok za pozitivne cele brojeve  $n > 0$  periode koje slede osnovnu periodu.

**Zadatak 1.2.3.** Koji je matematički opis signala u osnovnoj periodi prikazanog signala



Odredimo prvo matematički opis prikazanog signala u datom intervalu. Prateći način rešavanja predhodnog zadatka, odredimo prvo matematički opis signala u intervalu dat izrazom  $nT_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_0 + \frac{\tau}{2}$ . U datom intervalu oblik signala se može opisati putem dve prave. Jedna

prava opisuje oblik signala u vremenskom intervalu  $nT_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_0$ , dok druga u intervalu

$nT_0 \leq t \leq nT_0 + \frac{\tau}{2}$ . Za svaki vremenski interval odredimo matematički izraz traženih prava.

Analogno predhodnim zadacima dobijamo sledeće jednačine

$$\text{u intervalu } nT_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_0,$$

$$0 = a \cdot \left( nT_0 - \frac{\tau}{2} \right) + b,$$

$$1 = a \cdot nT_0 + b,$$

$$\text{u intervalu } nT_0 \leq t \leq nT_0 + \frac{\tau}{2},$$

$$0 = a \cdot \left( nT_0 + \frac{\tau}{2} \right) + b,$$

$$1 = a \cdot nT_0 + b.$$

Rešavanjem pojedinih sistema jednačina dobijaju se sledeći koeficijenti po intervalima

$$\text{u intervalu } nT_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_0,$$

$$a = \frac{2}{\tau},$$

$$b = 1 - 2 \cdot n \cdot \frac{T_0}{\tau},$$

$$\text{u intervalu } nT_0 \leq t \leq nT_0 + \frac{\tau}{2},$$

$$a = -\frac{2}{\tau},$$

$$b = 1 + 2 \cdot n \cdot \frac{T_0}{\tau}.$$

Na osnovu datih rešenja matematički opis signala je

$$s(t) = \begin{cases} 0; & nT_0 - \frac{T_0}{2} \leq t \leq nT_0 - \frac{\tau}{2} \\ \frac{2}{\tau} \cdot \left( t - nT_0 + \frac{\tau}{2} \right); & nT_0 - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_0 \\ -\frac{2}{\tau} \cdot \left( t - nT_0 - \frac{\tau}{2} \right); & nT_0 \leq t \leq nT_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0; & nT_0 + \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_0 + \frac{T_0}{2}. \end{cases}$$

Primenom osobina funkcija  $|t|$  sažetiji opis predhodne jednačine je

$$s(t) = \begin{cases} 0; & \frac{\tau}{2} \leq |t - nT_0| \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{2}{\tau} \cdot \left( \frac{\tau}{2} - |t - nT_0| \right); & |t - nT_0| \leq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

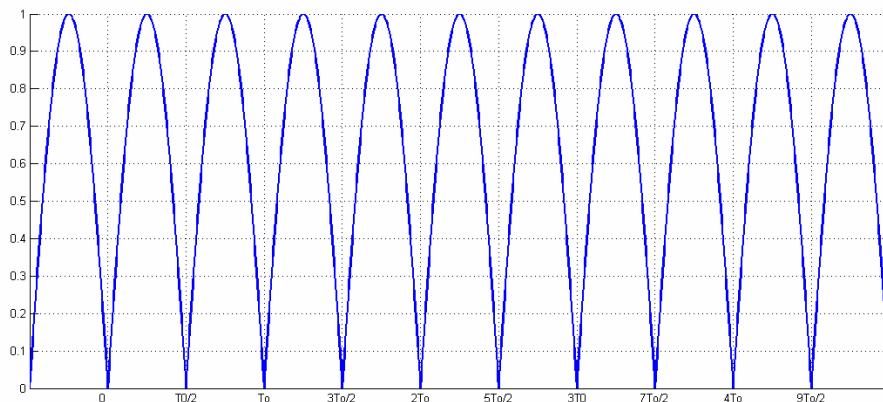
U predhodnom zadatku smo videli da se opis signala u nekoj proizvoljnoj periodi lako dobija ako opis osnovne periode vremenski pomerimo za odgovarajući broj celih perioda  $nT_0$  tj. primenimo smenu  $t \rightarrow t - nT_0$ . Sada je dat izraz u nekoj od perioda, i tražimo izraz osnovne periode odnosno vršimo suprotni proračun predhodnog zadatka. Ako je poznata perioda signala, tada se uvek može odrediti smer i veličina vremenskog pomeraja potrebnog za opis signala u osnovnoj periodi.

U datom primeru to je  $nT_0$ . Smer pomeraja određuje predznak celog broja  $n$ . Ako je  $n > 0$  pomeranje treba vršiti uлево i primeniti smenu  $t \rightarrow t + nT_0$ . Ako je  $n < 0$  pomeranje treba vršiti udesno i primeniti smenu  $t \rightarrow t - nT_0$ . Na osnovu rečeneih, dobijamo da je signal u osnovnoj periodi dat izrazom

$$s_o(t) = s(t + nT_0) = \begin{cases} 0; & \frac{\tau}{2} \leq |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{2}{\tau} \cdot \left( \frac{\tau}{2} - |t| \right); & |t| \leq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

**Zadatak 1.2.4.** Za dati matematički opis signala prikazati oblik signala u dužem vremenskom intervalu.

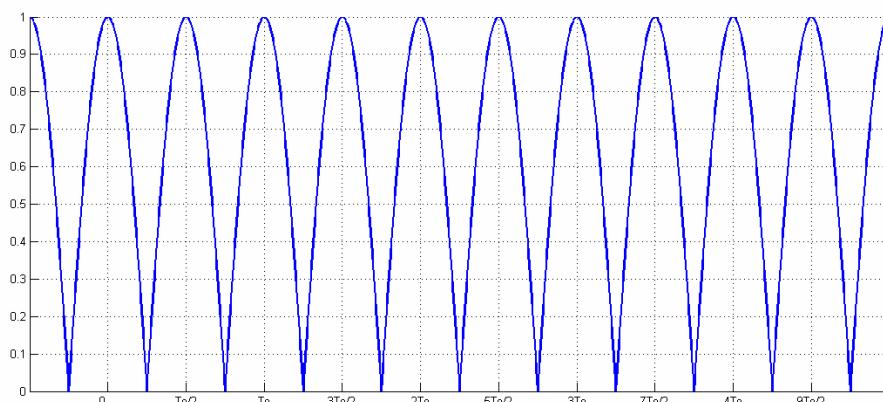
$$s_o(t) = |\sin(\omega_0 t)|; t \in [0, T_0]$$



Veza između kružne učestanosti i periode signala je jednaka  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Signal koji je prikazan na

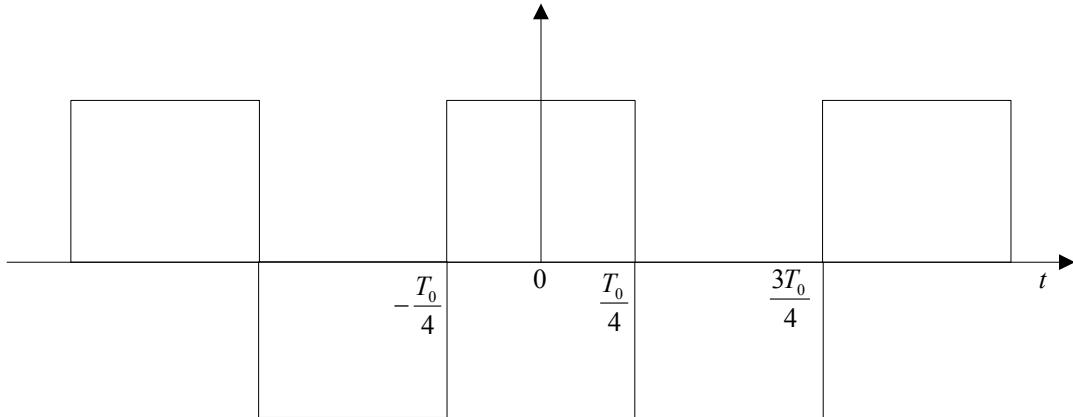
slici se generiše pomoću signala sinusoide kružne učestanosti  $\omega_0$  tako, što se uzima apsolutna vrednost sinusnog signala u svakom trenutku. Dobijeni signal predstavlja sinusoиду čije su poluperiode sa negativnim vrednostima preslikane u opseg pozitivnih vrednosti. Detaljnijem posmatranjem signala može se zapaziti, da je perioda ovako dobijenog signala različita od periode sinusoide. Sa slike se vidi da je vreme ponavljanja oblika signala tj. perioda jednaka  $T_{s_o(t)} = \frac{T_0}{2}$ .

$$s_o(t) = |\cos(\omega_0 t)|; t \in [0, T_0]$$



Isti zaključak se može izvesti i u ovom primeru kao u predhodnom. Za razliku od predhodnog signala, dobijeni signal kasni u odnosu na predhodni primer za polovinu periode signala predhodnog primera. To zakašnjenje potiče iz vremenskog odnosa sinusnog i kosinusnog signala.

$$s_o(t) = \begin{cases} 1; & -\frac{T_0}{4} < t < \frac{T_0}{4} \\ -1; & \frac{T_0}{4} < t < \frac{3T_0}{4}. \end{cases}$$

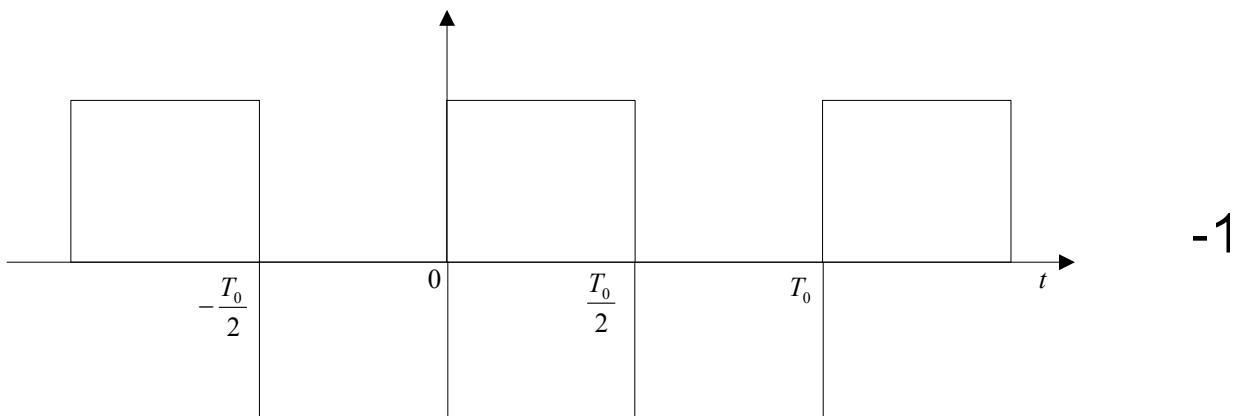


Dobijeni signal nazivamo bipolarnim pravougaonim signalom, jer signal u određenim trenutcima menja svoj polaritet odnosno predznak. Kod ovog tipa signala se često umesto trenutaka promene polariteta signala definiše takozvani faktor ispune signala što predstavlja odnos vremenskog intervala sa pozitivnim polaritetom u odnosu na punu periodu, tj.  $D = \frac{T_+}{T_0} = \frac{1}{2}$ .

Signal oblika

$$s_o(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -1; & \frac{T_0}{2} < t < T_0. \end{cases}$$

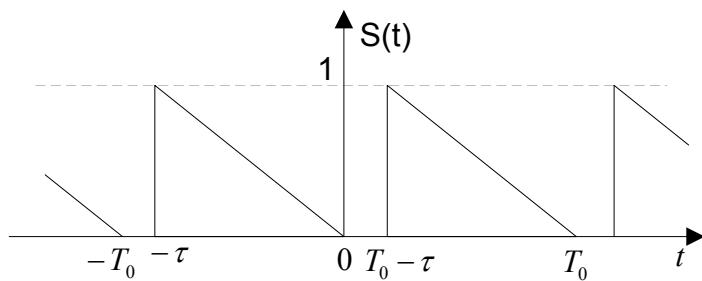
predstavlja vremenski pomereni signal predhodnog primera. Sobzirom da periodični signali traju od  $-\infty$  do  $+\infty$ , i vrše beskonačno ponavljanje oblika osnovne periode, teško da je moguće odrediti šta kasni a šta prednjači u odnosu na neki referentni trenutak ili periodičan signal. Ako se uzme u obzir osobine tehničkih sistema, da odziv nemože da se pojavi pre pobude sistema, tada je razumno govoriti uvek o međusobnom kašnjenju pojedinih signala.



**Zadatak 1.2.5.** Prikazati oblik signala u osnovnoj periodi ako je dat matematički opis signala.

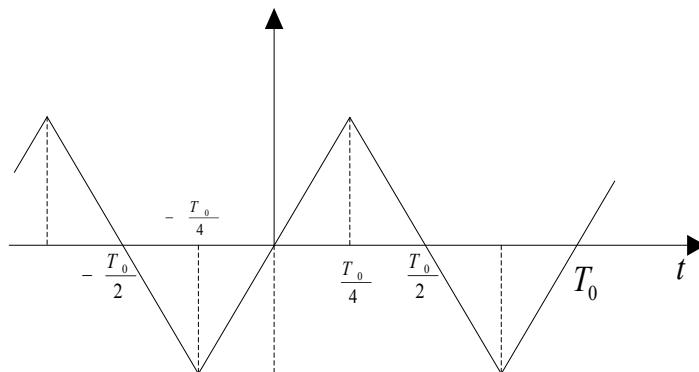
$$s_o(t) = \begin{cases} 0; & 0 < t < T_0 - \tau \\ \frac{T_0 - t}{\tau}; & T_0 - \tau < t < T_0. \end{cases}$$

Upoređujući date izraze u vitičastoj zagradi, da se osnovna perioda sastoji od dva intervala. U vremenskom intervalu  $0 < t < T_0 - \tau$  signal je jednak nuli. U vremenskom intervalu  $T_0 - \tau < t < T_0$  opis signala je dat linearom jednačinom, tj. pravom. Za određivanje položaja prave u nekom koordinatnom sistemu dovoljne su dve tačke, koje se nalaze na pravoj. Obično se biraju tačke na unutrašnjim granicama intervala u kome je prava definisana. U našem primeru to bi bile tačke u trenutcima  $t = T_0 - \tau$  i  $t = T_0$  sa vrednostima  $s(t = T_0 - \tau) = 1$  i  $s(t = T_0) = 0$  respektivno. Na osnovu rečenih dati signal će imati oblik prikazan na slici



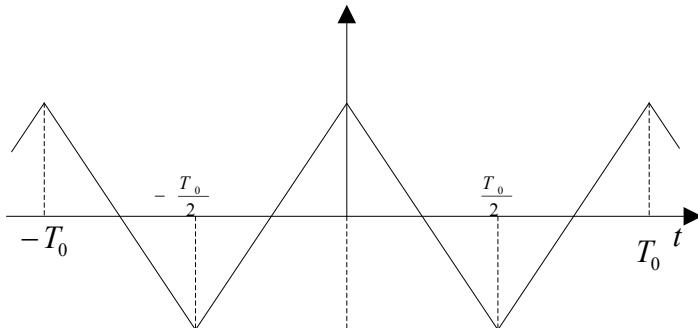
$$s_o(t) = \begin{cases} \frac{4}{T_0} \cdot t; & -\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4} \\ -\frac{4}{T_0} \cdot \left(t - \frac{T_0}{2}\right); & \frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{3T_0}{4}. \end{cases}$$

Kao i pre, i u ovom primeru zapažamo, da je signal definisan putem dve prave u vremenskim intervalima  $-\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4}$  i  $\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{3T_0}{4}$ . U prvom navedenom intervalu jednačina linearne krive, opisuje pravu koja prolazi preko koordinatnog početka i ima nagib od  $\frac{4}{T_0}$ . Kako je nagib pozitivan to prava monotono raste. U drugom intervalu, izraz određuje pravu sa suprotnim nagibom u odnosu na predhodni interval ali ova prava sada seče vremensku osu u trenutku  $t = \frac{T_0}{2}$ . Data prava ima isti nagib kao i prva ali suprotnog predznaka, tj. ona je monotono opadajuća i pomerena je udesno u odnosu na prvu pravu za polovinu periode. Grafički prikaz navedenog signala je



$$s_o(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T_0} \cdot \left( t - \frac{T_0}{4} \right); & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{4}{T_0} \cdot \left( t - \frac{3T_0}{4} \right); & \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0. \end{cases}$$

Analogno tumačenjem izraza predhodnog zadatka, zapažamo da se ovaj signal sastoji od segmenta. Svaka od segmenata je definisana putem jedne prave. Obe prave imaju isti nagib ali sa suprotnim predznakom, što nas navodi na zaključak da u prvom segmentu signal opada zatim u narednom raste. U odnosu na pravu koja prolazi koordinatnim početkom, date prave su pomerene za  $t = \frac{T_0}{4}$  i  $t = \frac{3T_0}{4}$  respektivno. Dati signal ima oblik



### 1.3. Razvoj periodičnih signala u Furierove redove

Svaki periodičan signal se može razviti u takozvani Furierov red. Svaki član ovog reda se naziva komponenta ili harmonik. Po obliku, pve komponente možemo podeliti u dve grupe: jednu čini jednosmerna komponenta koja ima konstantnu vrednost po celom vremenskom intervalu, dok u drugu grupu spadaju sve prostoperiodične komponente sinusnog ili kosinusnog oblika, koje možemo nazvati i naizmeničnim komponentama. Razlikujemo tri oblika Furierovog reda. To su

- matematički oblik

$$s(t) = \underbrace{a_0}_{\text{jednosmerna komponenta}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)}_{\text{parne komponente}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)}_{\text{neparne komponente}}$$

gde se pojedini koeficijenti reda računaju po izrazima

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot dt, \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt. \end{aligned}$$

Kako sistemi za obradu signala ne raspolažu osbinom razlaganja signala u parne i neparne komponente, ovaj oblik se jako retko primenuje u praksi. On ima samo matematički značaj.

- kompleksni oblik

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}, \quad \underline{S}_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

U ovoj obliku periodičan signal se izražava sumom kompleksnih eksponencijalnih komponenata tj. signala, pomnoženim odgovarajućim kompleksnim koeficijentima. Sobzirom da rezultat datog zbiru mora biti realna funkcija, kompleksni koeficijenti moraju imati osobinu  $\underline{S}_{-n} = \underline{S}_n^*$ , gde zvezdica označava konjugovano-kompleksnu operaciju. Ovaj oblik razvoja se često primenjuje u analizi signala, zbog jednostavnijeg proračuna koeficijenata reda.

- fizički oblik

$$s(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi)$$

U inžinjerskim primenama ovaj oblik Furierovog reda je dobio najveći značaj. U ovom obliku se jako lepo vidi, da se signal razlaže u niz prostoperiodičnih kosinusnih signala ili komponenata, koje imaju kružnu učestanost koja je  $n$ -puta veća od kružne učestanosti signala, sa odgovarajućim amplitudama i fazama pojedinih komponenata. Prednost ovog oblika se ogleda u tome, što ona opisuje signal sa aspekta sistema koji vrši obradu signala. Kako se u toku obrade signala, izuzev nekih specifičnih slučajeva, deluje na amplitudu i fazu pojedinih komponenata, pomoću ovog opisa brzo se može proceniti rezultat obrade nad signalom.

Odredimo veze između pojedinih koeficijenata navedenih oblika redova.

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot [\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)] \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \cdot dt - j \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) \cdot dt = \frac{a_n}{2} - j \cdot \frac{b_n}{2}. \end{aligned}$$

Ako su poznati kompleksni koeficijenti tada se koeficijenti matematičkog oblika dobijaju po izrazu

$$a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{S}_n\}, \quad b_n = 2 \cdot \operatorname{Im}\{\underline{S}_n\}, \quad a_0 = \underline{S}_0$$

Ojlerov oblik kompleksno koeficijenta je  $\underline{S}_n = |\underline{S}_n| \cdot e^{-j\varphi_n}$ . Sobzirom da važi da je  $\underline{S}_{-n} = |\underline{S}_{-n}| \cdot e^{-j\varphi_{-n}} = \underline{S}_n^* = |\underline{S}_n| \cdot e^{j\varphi_n}$ , zaključujemo da važi  $|\underline{S}_{-n}| = |\underline{S}_n|$  i  $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ .

Kompleksni red sada možemo razviti na sledeći način

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{S}_n| \cdot e^{-j\varphi_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{S}_n| \cdot e^{j[n\omega_0 t - \varphi_n]}.$$

Zapazimo da za  $n < 0$  i navedenih osobina kompleksnog koeficijenta važi

$$|\underline{S}_n| \cdot e^{j[n\omega_0 t - \varphi_n]} = |\underline{S}_n| \cdot e^{-j[n\omega_0 t - \varphi_n]}, \quad \forall n < 0.$$

Tada gornju sumu možemo napisati i u obliku

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \underline{S}_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\underline{S}_n| \cdot e^{j[n\omega_0 t - \varphi_n]}}_{\forall n > 0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\underline{S}_n| \cdot e^{-j[n\omega_0 t - \varphi_n]}}_{\forall n < 0} = \\ &= \underline{S}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\underline{S}_n| \cdot [e^{j[n\omega_0 t - \varphi_n]} + e^{-j[n\omega_0 t - \varphi_n]}] = \underline{S}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\underline{S}_n| \cdot \cos(n\omega_0 t - \varphi_n). \end{aligned}$$

Upoređujući dobijeni izraz sa oblikom fizičkog reda, nalazimo sledeće veze

$$F_0 = \underline{S}_0 \in R, \quad F_n = 2 \cdot |\underline{S}_n|, \quad \forall n > 0$$

$$F_n = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

**Zadatak 1.3.1.** Za dati signal odrediti koeficijente sva tri oblika Furierovog reda.

$$s_o(t) = \begin{cases} 1; & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0; & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

Odredimo prvo kompleksne koeficijente.

$$\underline{S}_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s_o(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{-jn\omega_0}.$$

Kako je  $\omega_0 \cdot T_0 = \frac{2\pi}{T_0} T_0 = 2\pi$  i  $e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j \sin(\varphi)$ , dobijamo

$$\underline{S}_n = \frac{2j \sin\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)}{2j \cdot n\pi} = \frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)}{n\pi} = \frac{\tau}{T_0} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T_0}}.$$

Koeficijenti fizičkog oblika reda su

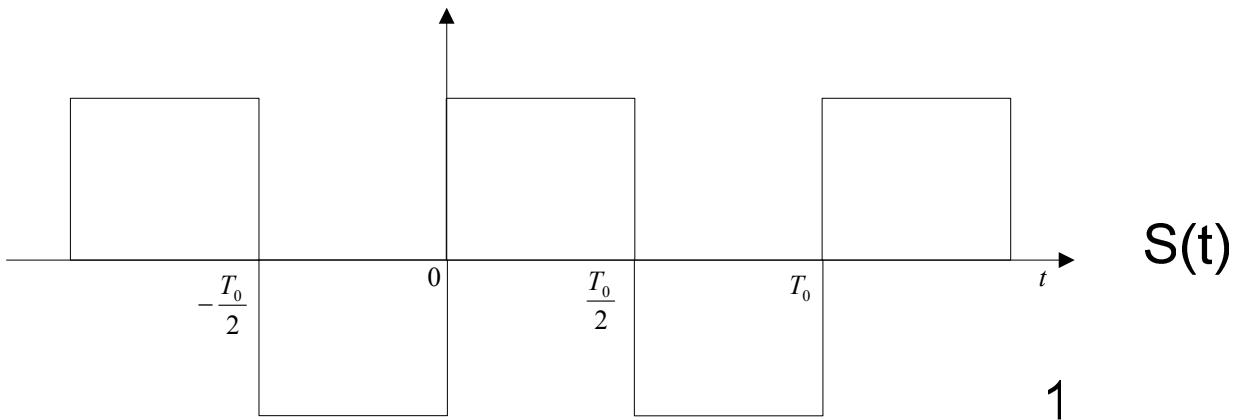
$$F_n = |\underline{S}_n| = \begin{cases} \frac{\tau}{T_0}; & n = 0 \\ 2 \frac{\tau}{T_0} \cdot \frac{|\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)|}{n\pi \frac{\tau}{T_0}}; & n > 0. \end{cases}$$

$$\varphi_n = \text{sign}\left(\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)\right) \cdot \pi = \begin{cases} -\pi; & \text{ako je predznak sin usa negativan} \\ 0; & \text{ako je predznak sin usa pozitivan} \end{cases}$$

Kako kompleksni koeficijenti nemaju imaginarni deo to važi  $b_n = 0; \forall n$ , dok je

$$a_n = \begin{cases} \frac{\tau}{T_0}; & n = 0 \\ 2 \frac{\tau}{T_0} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T_0}}; & n > 0. \end{cases}$$

**Zadatak 1.3.2.** Odrediti koeficijente Furierovog reda prikazanog signala.



Uzmimo sada za osnovnu periodu interval  $-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ . U datom vremenskom intervalu opis signala je

$$s_o(t) = \begin{cases} -1; & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \\ +1; & 0 < t < \frac{T_0}{2}. \end{cases}$$

Koristimo se uobičajenim postupkom nalaženja Furierovih koeficijenata. Odredimo prvo kompleksne koeficijente.

$$\underline{S}_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s_o(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-1) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt + \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{\frac{T_0}{2}} (+1) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt.$$

Kako važi da je  $\omega_0 \cdot \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{2} = \pi$ , daje se dobija

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= -\frac{1}{T_0} \cdot \frac{1 - e^{jn\pi}}{-jn\omega_0} + \frac{1}{T_0} \cdot \frac{e^{-jn\pi} - 1}{-jn\omega_0} = \frac{2 - (e^{jn\pi} + e^{-jn\pi})}{2j \cdot n\pi} = \frac{2 - 2\cos(n\pi)}{2j \cdot n\pi} = \\ &= \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

U toku izvođenja, primenili smo Ojlerov prikaz broja  $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , i adiciju formulu  $\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\varphi))$ .

Iz dobijenog izraza vidimo, da sadrži samo imaginarni deo iz čega sledi da je  $a_n = 0; \forall n$ , dok je

$$b_n = 2 \operatorname{Im}\{\underline{S}_n\} = \frac{4}{n\pi} \cdot \sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right); \forall n.$$

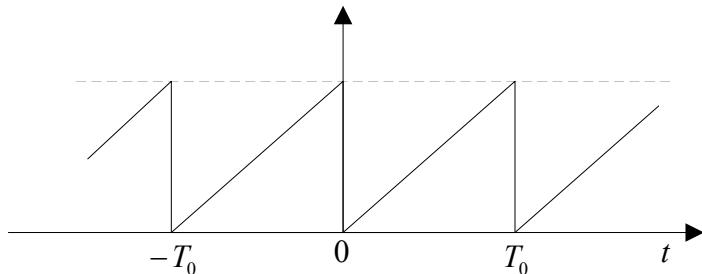
Za koeficijente fizičkog reda dobijamo sledeće izraze

$$F_n = 2|\underline{S}_n| = |b_n| = \frac{4}{n\pi} \cdot \sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right); \forall n,$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2}; \forall n.$$

Obratimo pažnju na to, da fizički red, zbog faznog pomeraja, sadrži isključivo sinusne prostoperiodične komponente. Šta više, prisutne su samo komponente sa neparnim indeksom, dok se parne anuliraju. Posmatranjem oblika signala i dobijenih rezultata možemo da zaključimo, da Furierov red signala koji raspolaže osobinom parnošću u odnosu na vremensku osu sadrže samo parne komponente, dok signali sa neparnom osobinom sadrže samo neparne komponente. Kod signala sa neparnom osobinom jednosmerna komponente je uvek jednaka nuli.

**Zadatak 1.3.3.** Odrediti Furierov koeficijent proizvoljne komponente signala.



Matematički opis prikazanog signala je

$$s_o(t) = \frac{t}{T_0}; 0 \leq t \leq T_0 .$$

Odredimo amplitudu i fazu komponente sa rednim brojem  $n = 12$ .

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s_o(t) \cdot e^{-j12\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \left( \frac{t}{T_0} \right) \cdot e^{-j12\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0^2} \cdot \int_0^{T_0} \left( \frac{t}{T_0} \right) \cdot e^{-j12\omega_0 t} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T_0^2} \cdot \left[ \frac{T_0 \cdot e^{-j24\pi}}{-j12\omega_0} - \frac{e^{-j24\pi} - 1}{(j12\omega_0)^2} \right] = \frac{j}{24\pi} = 0.0416 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} . \end{aligned}$$

Na osnovu rezultata imamo  $F_{12} = 0.0416$ ,  $\varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$ . Tražena komponenta je signal sinusoidalnog oblika.

**Zadatak 1.3.4.** Odrediti Furierov red datog signala.

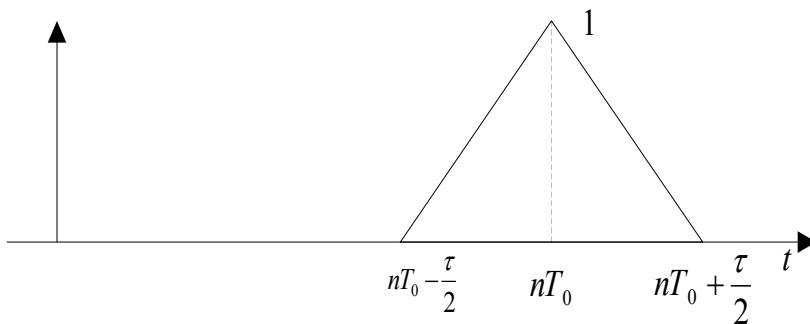
$$s(t) = \frac{t - T_0}{T_0}; T_0 \leq t \leq 2 \cdot T_0 .$$

Obratimo pažnju na to, da je signal definisan van vremenskog intervala osnovne periode.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{2T_0} s_o(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{2T_0} \left( \frac{t - T_0}{T_0} \right) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0^2} \int_{T_0}^{2T_0} (t - T_0) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T_0^2} \int_{T_0}^{2T_0} (t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{2T_0} e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0^2} \cdot \left[ \frac{T_0}{-jn\omega_0} + \frac{1-1}{(jn\omega_0)^2} \right] - \frac{1-1}{jn\omega_0 T_0} = \\ &= \frac{1}{-j2n\pi} = \frac{1}{2n\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} . \end{aligned}$$

Za komponentu sa rednim brojem  $n = 12$  dobijamo rezultat predhodnog primera, što pokazuje, da proračun koeficijenata ne zavisi od izabranog intervala u kome se opisuje signal sve dotle dok taj vremenski interval obuhvata jednu celu periodu.

**Zadatak 1.3.5.** Odrediti Furierov red prikazanog signala.



Signal u datom vremenskom intervalu opisuje izraz

$$s(t) = \begin{cases} 0; & \frac{\tau}{2} \leq |t - nT_0| \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{2}{\tau} \cdot \left( \frac{\tau}{2} - |t - nT_0| \right); & |t - nT_0| \leq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Izveli smo vezu između opisa u osnovnoj periodi i datog intervala,

$$s_o(t) = s(t + nT_0) = \begin{cases} 0; & \frac{\tau}{2} \leq |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{2}{\tau} \cdot \left( \frac{\tau}{2} - |t| \right); & |t| \leq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

U predhodnom primeru smo videli, da je rezultat proračuna koeficijenata nezavisan od izbora vremenskog intervala u kome se opisuje signal sve dok taj interval obuhvata celu periodu. Izvedimo dokaz ove tvrđnje u opštem slučaju.

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{nT_0 - \frac{T_0}{2}}^{nT_0 + \frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \quad \left| \begin{array}{l} \tau = t - nT_0 \\ t = \tau + nT_0 \\ dt = d\tau \end{array} \right. = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(\tau + nT_0) \cdot e^{-jn\omega_0 (\tau + nT_0)} \cdot d\tau = \\ &= \underbrace{e^{-jn\omega_0 nT_0}}_{=1} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s_o(\tau) \cdot e^{-jn\omega_0 \tau} \cdot d\tau = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s_o(\tau) \cdot e^{-jn\omega_0 \tau} \cdot d\tau. \end{aligned}$$

Kao što vidimo, bilo koju punu periodu mi izabrali za opis signala, kod proračuna koeficijenata Furierovog reda uvek se vraćamo na osnovnu periodu.

Izračunajmo kompleksne koeficijente datog signala.

$$\underline{S}_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s_o(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 2 \left( \frac{\tau}{2} + t \right) e^{-jn\omega_0 \tau} \cdot d\tau + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{\tau}{2}} 2 \left( \frac{\tau}{2} - t \right) e^{-jn\omega_0 \tau} \cdot d\tau$$

Primenimo parcijalno integriranje.

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \frac{1}{T_0} \frac{1 - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{-jn\omega_0} + \frac{1}{T_0} \frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{-jn\omega_0} - \frac{2}{T_0 \tau} \frac{1 - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{(-jn\omega_0)^2} + \\ &+ \frac{1}{T_0} \frac{e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - 1}{-jn\omega_0} - \frac{1}{T_0} \frac{e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{-jn\omega_0} + \frac{2}{T_0 \tau} \frac{e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - 1}{(-jn\omega_0)^2}. \end{aligned}$$

Nakon sređivanja i skraćivanja jednačine, dobijamo

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \frac{2}{T_0 \tau} \frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} + e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - 2}{(-jn\omega_0)^2} = \frac{2}{T_0 \tau} \frac{2 - 2 \cos\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right)}{(n\omega_0)^2} = \frac{4}{T_0 \tau} \frac{1 - \cos\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}{(n\omega_0)^2} = \\ &= \frac{\tau}{2T_0} \frac{\sin^2\left(n\pi \frac{\tau}{2T_0}\right)}{\left(n\pi \frac{\tau}{2T_0}\right)^2} = \frac{\tau}{2T_0} \left[ \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{2T_0}\right)}{n\pi \frac{\tau}{2T_0}} \right]^2. \end{aligned}$$

Signal je parna funkcija vremena, pa su i kompleksni koeficijenti čisto realni. Zbog osobine parnosti, koeficijenti  $b_n$  se anuliraju. Fizički oblik Furierovog reda sadrži prostoperiodične komponente kosinusnog oblika jer je  $\varphi_n = 0; \forall n$ .

**Zadatak 1.3.6.** Odrediti Furierov red datog signala.

$$s(t) = 1 + 3 \sin(\omega_0 t) - 6 \cos^2(2 \cdot \omega_0 t) + 10 \sin^3(3 \cdot \omega_0 t).$$

Pre nego što primenimo izraz za proračun kompleksnih koeficijenata Furierovog reda, iskoristimo adicione i trigonometrijske formule za pojednostavljanje izraza signala.

$$\begin{aligned} s(t) &= 1 + 3 \sin(\omega_0 t) - 3(1 + \cos(4 \cdot \omega_0 t)) + 5 \sin(3 \cdot \omega_0 t) \cdot (1 - \cos(6 \cdot \omega_0 t)) = \\ &= -2 + 3 \sin(\omega_0 t) - 3 \cos(4 \cdot \omega_0 t) + 5 \sin(3 \cdot \omega_0 t) - 5 \sin(3 \cdot \omega_0 t) \cdot \cos(6 \cdot \omega_0 t) = \\ &= -2 + 3 \sin(\omega_0 t) - 3 \cos(4 \cdot \omega_0 t) + 5 \sin(3 \cdot \omega_0 t) - \frac{5}{2}(\sin(9 \cdot \omega_0 t) - \sin(3 \cdot \omega_0 t)) = \\ &= -2 + 3 \sin(\omega_0 t) + \frac{15}{2} \sin(3 \cdot \omega_0 t) - 3 \cos(4 \cdot \omega_0 t) - \frac{5}{2} \sin(9 \cdot \omega_0 t). \end{aligned}$$

Pretvorimo sinusne članove u kosinusni oblik.

$$\begin{aligned} s(t) &= -2 + 3 \sin(\omega_0 t) + \frac{15}{2} \sin(3 \cdot \omega_0 t) - 3 \cos(4 \cdot \omega_0 t) - \frac{5}{2} \sin(9 \cdot \omega_0 t) = \\ &= -2 + 3 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{15}{2} \cos\left(3 \cdot \omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(4 \cdot \omega_0 t - \pi) + \frac{5}{2} \cos\left(9 \cdot \omega_0 t - \frac{3\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Ako bolje pogledamo, dobili smo fizički oblik Furierovog reda. Sobzirom da iz ovog oblika neposredno možemo očitati vrednosti traženih koeficijenata, daljnji proračuni nisu ni potrebni. Signal ima jedosmernu i 4 naizmeničnih komponenata. Znači ukupno ih ima pet. Redni brojevi postojećih komponenta su  $n = 0, 1, 3, 4, 9$ . Ostale komponente se anuliraju. Kružne učestanostih tih komponenata su  $0, 1\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, 9\omega_0$ . Koeficijenti tagog reda su

$$F_0 = -2, \quad F_1 = 3, \quad F_3 = \frac{15}{2}, \quad F_4 = 3, \quad F_9 = \frac{5}{2},$$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_4 = -\pi, \quad \varphi_9 = -\frac{3\pi}{2}.$$

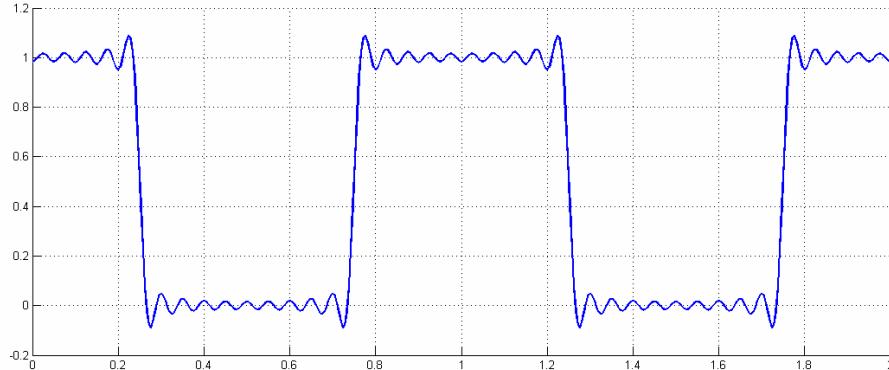
**Zadatak 1.3.7.** Dat je matematički oblik Furierovih koeficijenata nekog signala. Prikazati oblik signala u osnovnoj periodi u trajanju od  $T_0 = 1$ .

Slučaj 1.3.7.1.

$$F_n = \begin{cases} \frac{1}{2}; & n = 0 \\ \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}; & n > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n = 0; \forall n$$

n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	0.5	0
1	0.6366	0
2	0	0
3	-0.2122	0
4	0	0
5	0.1273	0

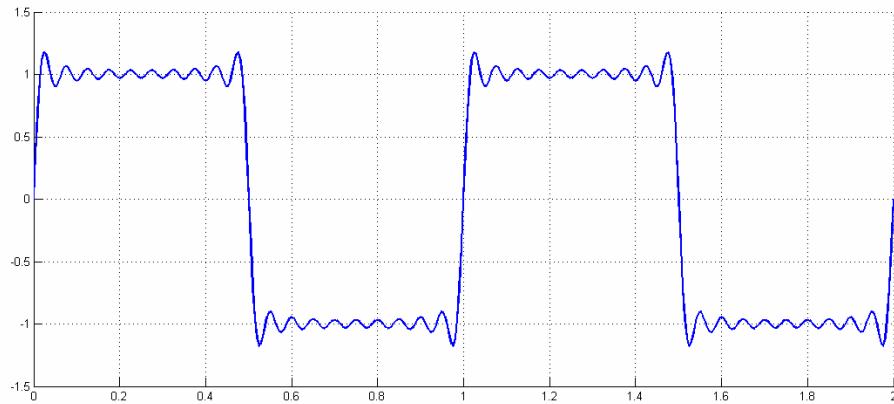


Slučaj 1.3.7.2.

$$F_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}; & n > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2}; \forall n$$

n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	0	0
1	1.2732	1.5708
2	0	1.5708
3	0.4244	1.5708
4	0	1.5708
5	0.2546	1.5708

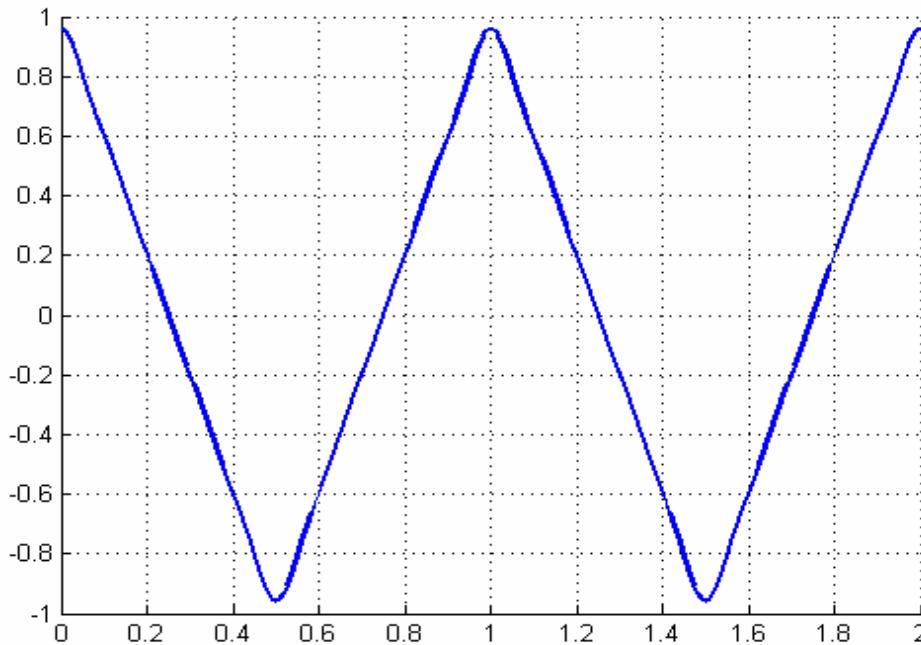


Slučaj 1.3.7.3.

$$F_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ 8 \cdot \frac{\sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n = 0; \forall n$$

n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	0	0
1	0.8106	0
2	0	0
3	0.0901	0
4	0	0
5	0.0324	0



Slučaj 1.3.7.4.

$$F_n = \begin{cases} 0.5; & n = 0 \\ \frac{1}{n\pi}; & n > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}; & n > 0 \end{cases}$$

n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	0.5	0
1	0.3183	1.5708
2	0.1592	1.5708
3	0.1061	1.5708
4	0.0796	1.5708
5	0.0637	1.5708

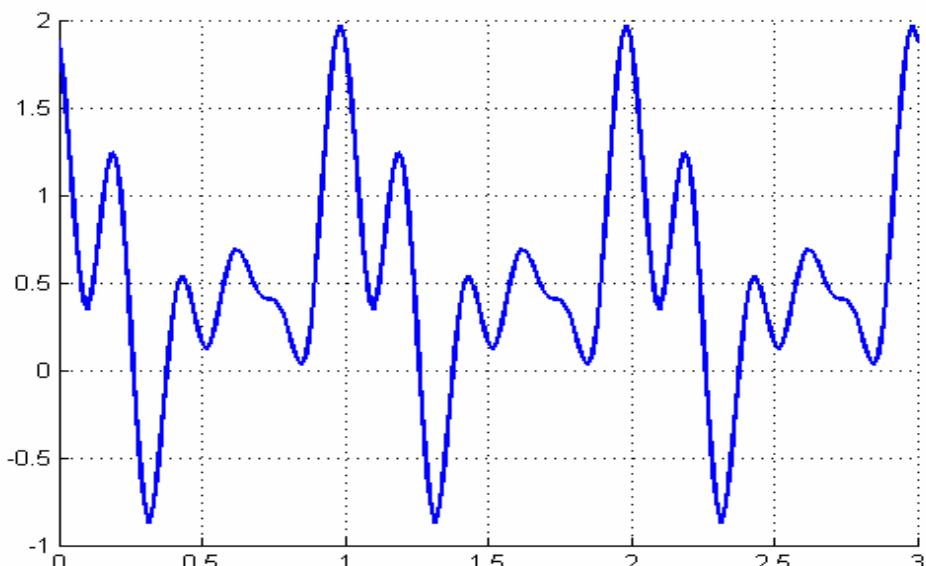


Slučaj 1.3.7.5.

Izaberimo koeficijente reda na slučajan način

n	$F_n$	$\Phi_n$
0	0.5	0
1	0.4608	-0.2463
2	0.4453	0.663
3	0.0877	-0.8542
4	0.4435	-1.2013
5	0.3663	-0.1199

Oblisk signala je sada

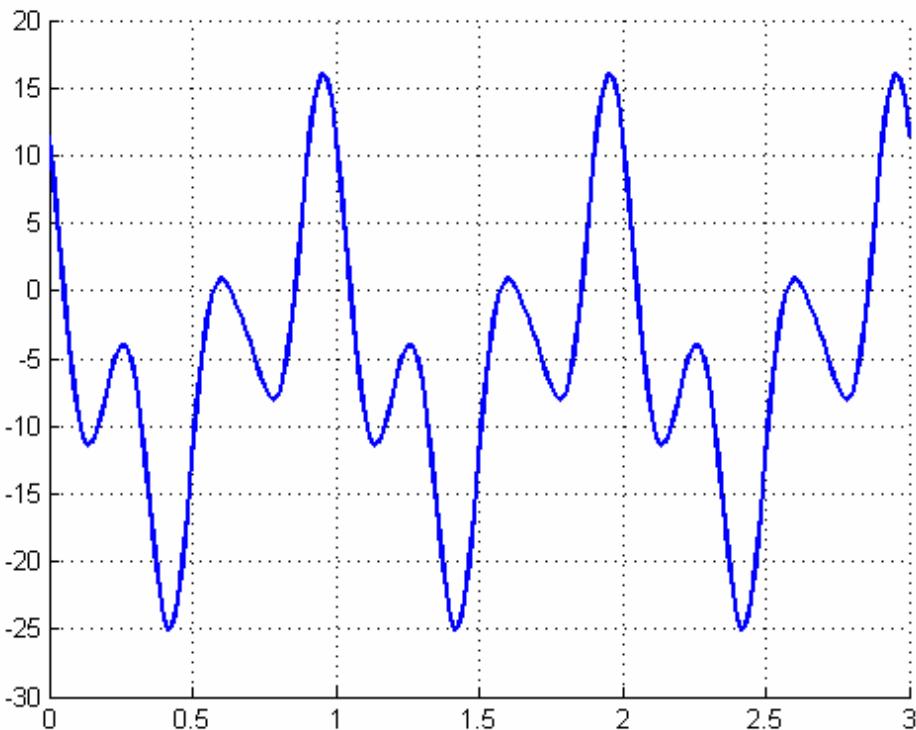


## Slučaj 1.3.7.6.

Ponovimo izbor sa drugim slučajnim vrednostima

n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	-5	0
1	10	-0.6014
2	3	0.5512
3	9	-1.0998
4	2	0.086
5	1	-2.0096

Za ove koeficijente dobijamo oblik



#### 1.4. Spektar periodičnih signala. Amplitudski i fazni spektar signala

Skup uređenih trojki oblika  $(n\omega_0, |S_n|, \varphi_n)$  nazivamo spektar signala. U nekim literaturama se ona još naziva i matematičkim spektrom signala. Promenljiva  $n$  celih brojeva obuhvata vrednosti indeksa od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Drugi oblika definicije spektra je fizički spektar signala tj.  $(n\omega_0, F_n, \varphi_n)$ . U ovom slučaju promenljiva  $n$  uzima vrednosti iz skupa celih brojeva  $[0, +\infty)$ . Umesto matematičke definicije spektra, mnogo je jednostavnije grafički prikazati spektar signala. Grafički prikaz obuhvata grafik amplitudskog i faznog spektra, oba u zavisnosti od preomenljive  $n$ . Amplitudski spektar je uvek nenegativna parna funkcija od  $n$ , dok je fazni spektar neparna funkcija od  $n$ . Grafički prikaz spektra signala predstavlja prikaz njenih Furierovih koeficijenata. Sobzirom da je periodičan signal sastavljen od prostoperiodičnih signala sa kružnim učestanostima jednakim celobrojnom umnošku osnovne kružne učestanoti, spektar periodičnih signala mora biti diskretan odnosno linijski. U njoj se pojavljuju samo odgovarajuće učestanosti.

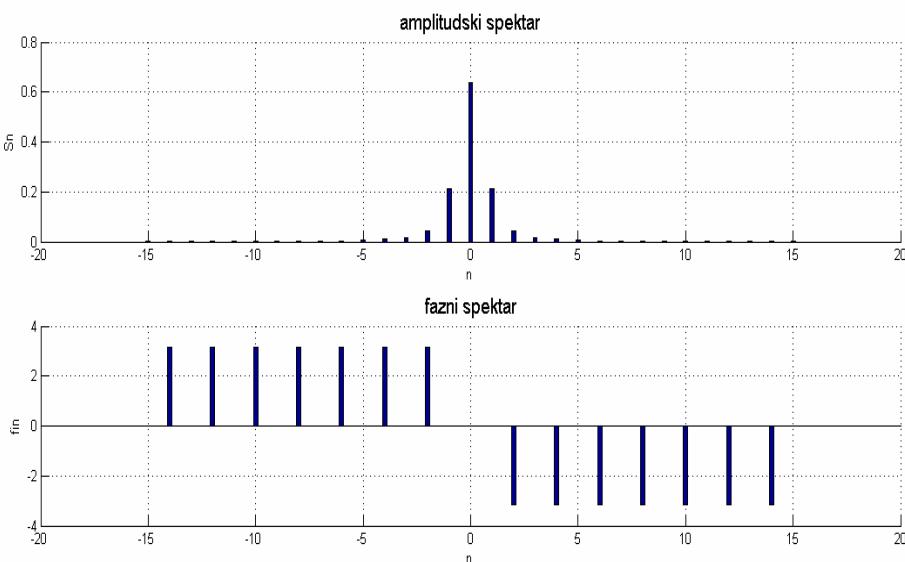
**Zadatak 1.4.1.** Prikazati matematički amplitudski i fazni spektar datog periodičnog signala.

$$s(t) = |\cos(\omega_s t)|; \forall t$$

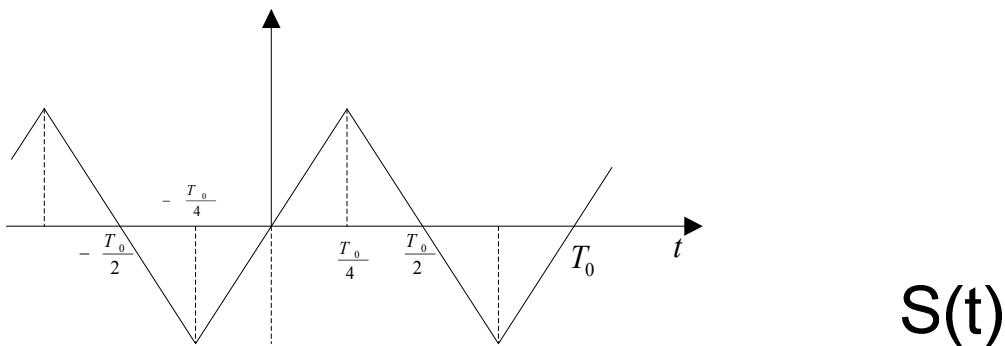
Odredimo najpre koeficijente Furierovog reda. Zapazimo da je perioda signala  $T_0 = \frac{T_s}{2}$  i da osnovnu periodu možemo definisati u intervalu  $-\frac{T_s}{4} \leq t \leq \frac{T_s}{4}$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(\omega_s t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_s} \int_{\frac{-T_s}{4}}^{\frac{T_s}{4}} e^{-j(2n-1)\omega_s t} \cdot dt + \frac{1}{T_s} \int_{\frac{-T_s}{4}}^{\frac{T_s}{4}} e^{-j(2n+1)\omega_s t} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T_s} \frac{e^{-j(2n-1)\frac{\pi}{2}} - e^{j(2n-1)\frac{\pi}{2}}}{-j(2n-1)\omega_s} + \frac{1}{T_s} \frac{e^{-j(2n+1)\frac{\pi}{2}} - e^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}}}{-j(2n+1)\omega_s} = \\ &= \frac{e^{j(2n-1)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(2n-1)\frac{\pi}{2}}}{2j \cdot (2n-1)\pi} + \frac{e^{j(2n+1)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(2n+1)\frac{\pi}{2}}}{2j \cdot (2n+1)\pi} = \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{(2n-1)\pi} + \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)\pi}. \end{aligned}$$

n	S <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>	n	S <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	0.6366	0	±8	0.0025	-(-3.1416)
±1	0.2122	0	±9	0.002	0
±2	0.0424	-(-3.1416)	±10	0.0016	-(-3.1416)
±3	0.0182	0	±11	0.0013	0
±4	0.0101	-(-3.1416)	±12	0.0011	-(-3.1416)
±5	0.0064	0	±13	0.0009	0
±6	0.0045	-(-3.1416)	±14	0.0008	-(-3.1416)
±7	0.0033	0	±15	0.0007	0



**Zadatak 1.4.2.** Prikazati fizički amplitudski i fazni spektar signala prikazanog na slici.



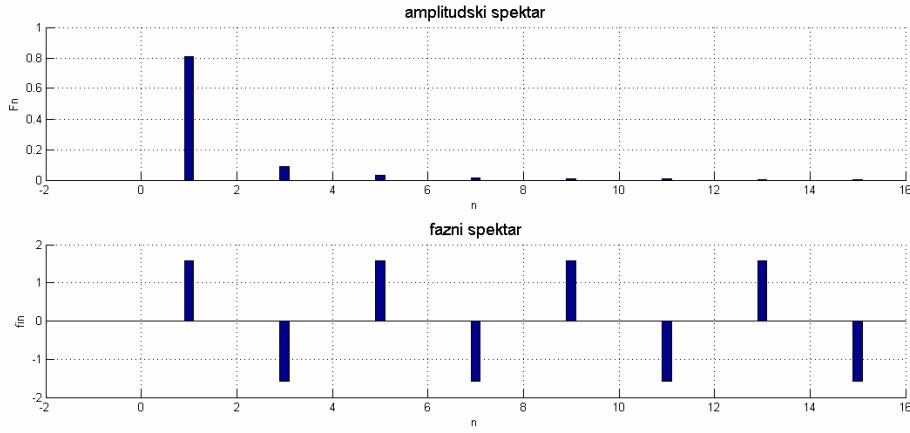
Izraz kompleksnih koeficijenata Furierovog reda je jednaka 1

$$\begin{aligned}
 \underline{s}_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \frac{4}{T_0} t \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt + \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} \frac{4}{T_0} \left( \frac{T_0}{2} - t \right) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \\
 &= \frac{4}{T_0^2} \left[ \frac{T_0}{4} \frac{e^{-jn\frac{\pi}{2}} + e^{jn\frac{\pi}{2}}}{-jn\omega_0} - \frac{e^{-jn\frac{\pi}{2}} - e^{jn\frac{\pi}{2}}}{(-jn\omega_0)^2} + \frac{T_0}{2} \frac{e^{-jn\frac{3\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{-jn\omega_0} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{T_0}{4} \frac{3e^{-jn\frac{3\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{-jn\omega_0} + \frac{e^{-jn\frac{3\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{(-jn\omega_0)^2} \right] = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ -\frac{1}{4} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{(n\pi)^2} \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}}; & n \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

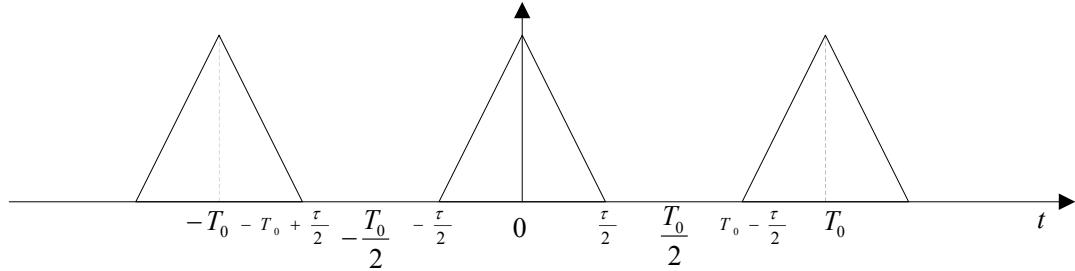
Koeficijenti fizičkog oblika Furierovog reda su

$$F_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ 8 \cdot \left| \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right|; & n > 0. \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}; & n > 0 \end{cases}$$

n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>	n	F <sub>n</sub>	Φ <sub>n</sub>
0	0	0	8	0	0
1	0.8106	1.5708	9	0.01	1.5708
2	0	0	10	0	0
3	0.0901	-1.5708	11	0.0067	-1.5708
4	0	0	12	0	0
5	0.0324	1.5708	13	0.0048	1.5708
6	0	0	14	0	0
7	0.0165	-1.5708	15	0.0036	-1.5708



**Zadatak 1.4.3.** Odrediti one komponente periodičnog signala čije su amplitude jednake nuli.



Kompleksne koeficijente Furierivog reda prikazanog signala smo ranije odredili.

$$\underline{S}_n = \frac{\tau}{2T_0} \left[ \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{2T_0}\right)}{n\pi \frac{\tau}{2T_0}} \right]^2; \quad \forall n.$$

Koeficijenti fizičkog oblika Furierovog reda su tada

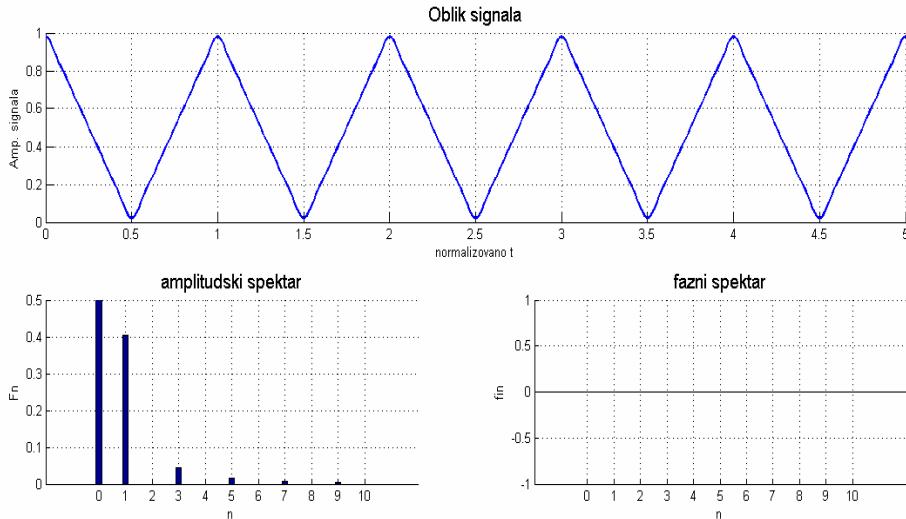
$$F_n = \frac{\tau}{T_0} \left[ \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{2T_0}\right)}{n\pi \frac{\tau}{2T_0}} \right]^2; \quad n \geq 0.$$

$$\varphi_n = 0; \quad n \geq 0$$

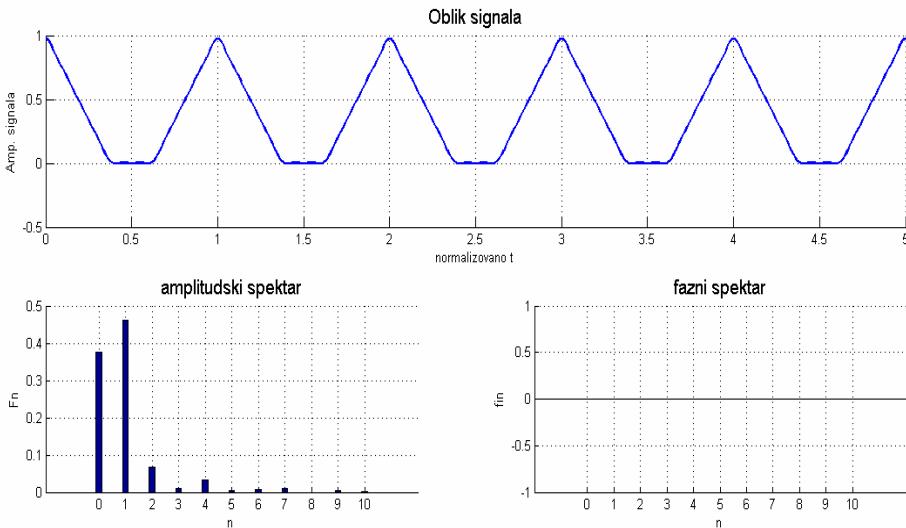
Prikažimo nekoliko signala i njihovih spektara zavisno od vrednosti odnosa  $\frac{\tau}{T_0}$ .

Za odnos  $\frac{\tau}{T_0} = 1$  koeficijenti se anuliraju kada je funkcija sinusa jednaka nuli tj. kada joj je

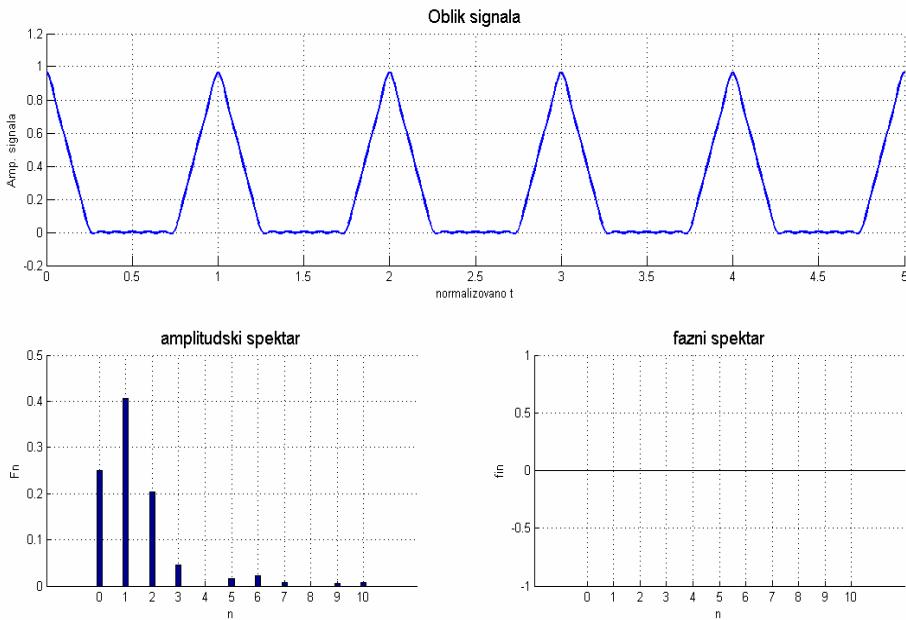
argument  $n\frac{\pi}{2} = k\pi$ . Iz ovog uslova se dobija, da koeficijenti sa rednim brojem  $n = 2k$  (svi parni) se anuliraju.



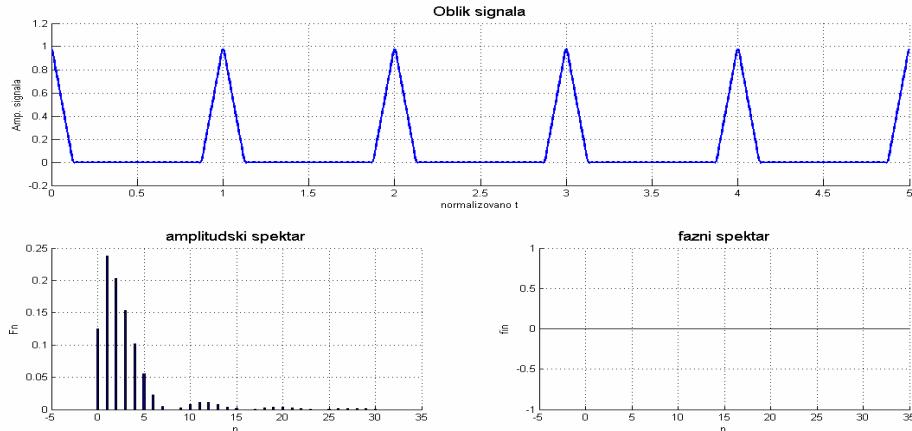
Za odnos  $\frac{\tau}{T_0} = 0.75$  anuliraju se komponente sa rednim brojem  $n = 8k; k = 3, 6, 9, 12, \dots$



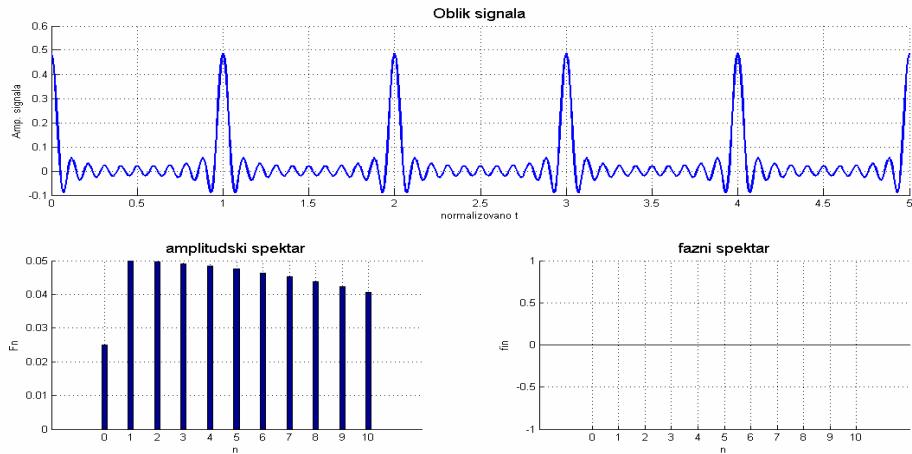
Za odnos  $\frac{\tau}{T_0} = 0.5$  dobijamo redne brojeve nultih amplituda  $n = 4k; k = 1, 2, \dots$



Za odnos  $\frac{\tau}{T_0} = 0.25$  redni brojevi reda su  $n = 8k; k = 1,2,3,\dots$

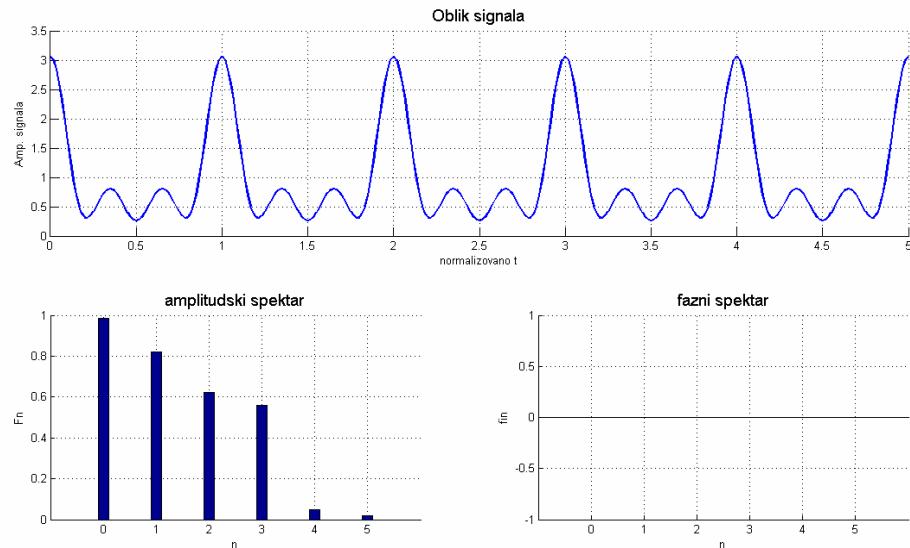


Za odnos  $\frac{\tau}{T_0} = 0.05$  iz reda ispada svaka četrdeseta komponente tj.  $n = 40k; k = 1,2,3,\dots$



#### Zadatak 1.4.4.

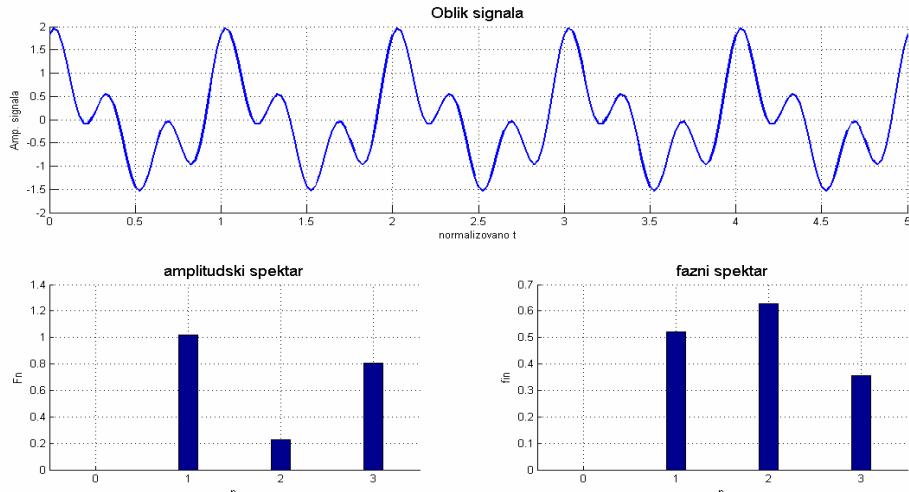
Dat je sledeći, proizvoljno odabran, niz opadajućih brojeva  $R = \{0.9855, 0.8194, 0.6211, 0.5602, 0.0500, 0.0174\}$ . Pridružimo svaki element datog niza odgovarajućim koeficijentima Furierovog reda  $F_n; n = 0,1,2,3,4,5$ . Prikazati fizički spektar i oblik dobijenog signala.



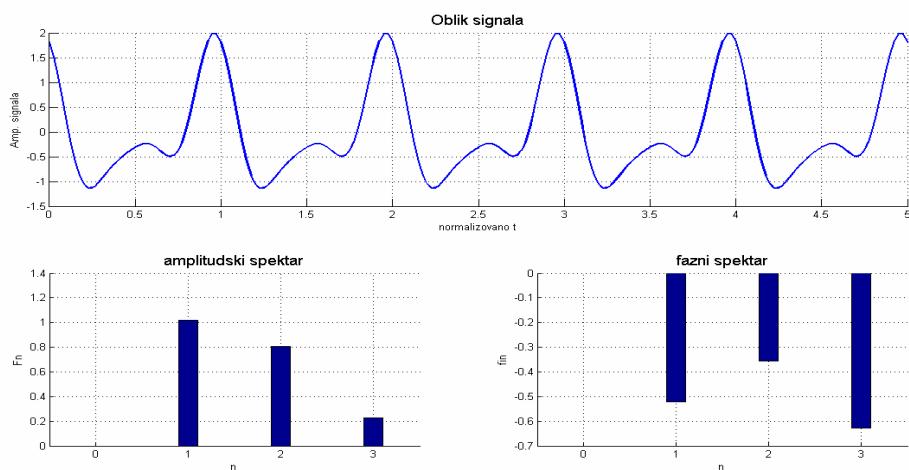
**Zadatak 1.4.5.** Dat je sledeći niz kompleksnih brojeva

$C = \{0, 0.8822 - j0.5080, 0.1823 - j0.1319, 0.7553 - j0.2801\}$ . Navesti sve permutacije datog brojnog niza, dodeliti ih kompleksnim koeficijentima rednih brojeva  $n = 0, 1, 2, 3$  i prikazati dobijene spektre i signale.

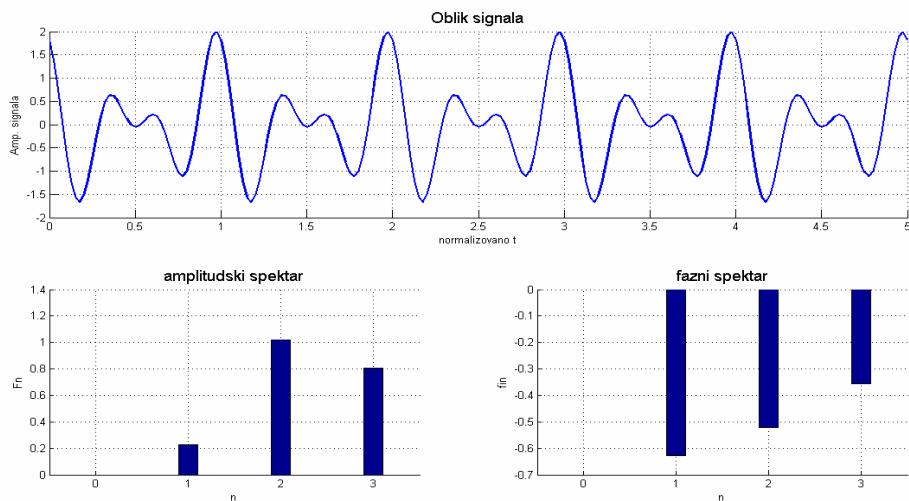
Za osnovnu niz dobija se sledeći signal



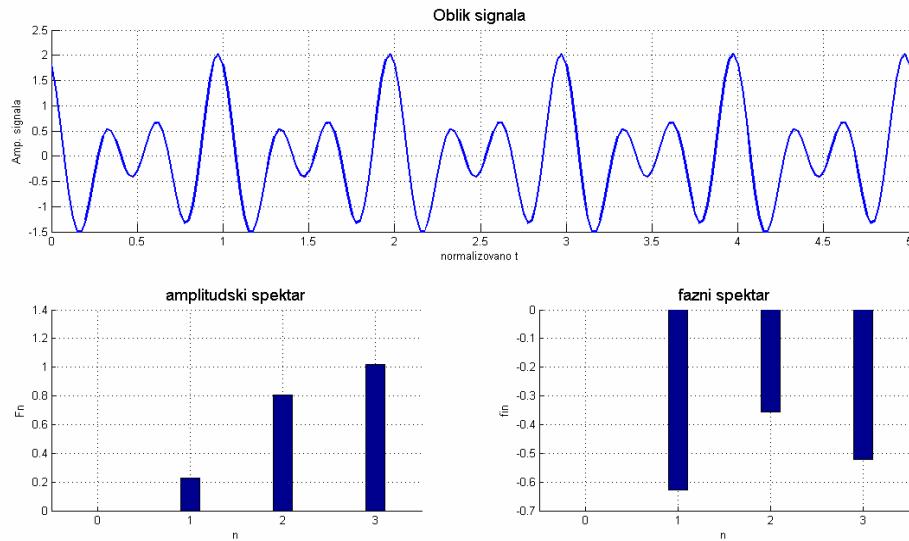
$$C = \{0, 0.8822 - j0.5080, 0.7553 - j0.2801, 0.1823 - j0.1319\}.$$



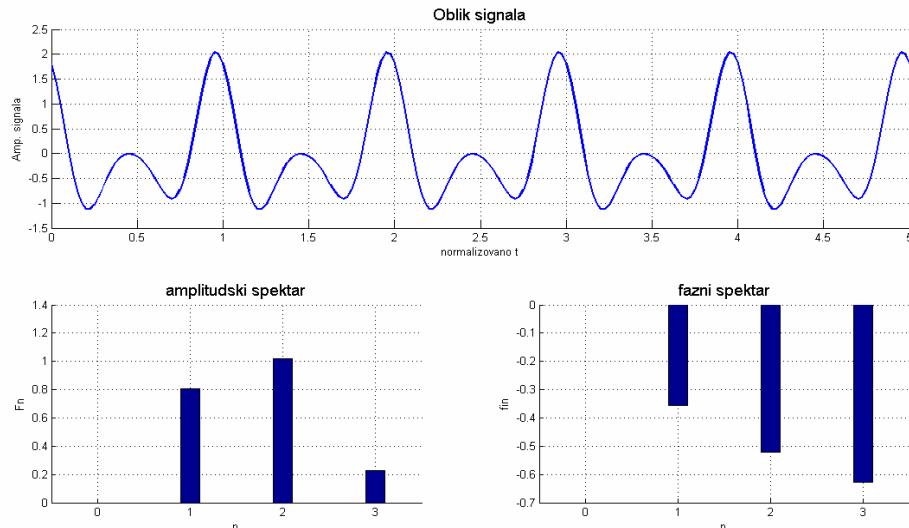
$$C = \{0, 0.1823 - j0.1319, 0.8822 - j0.5080, 0.7553 - j0.2801\}.$$



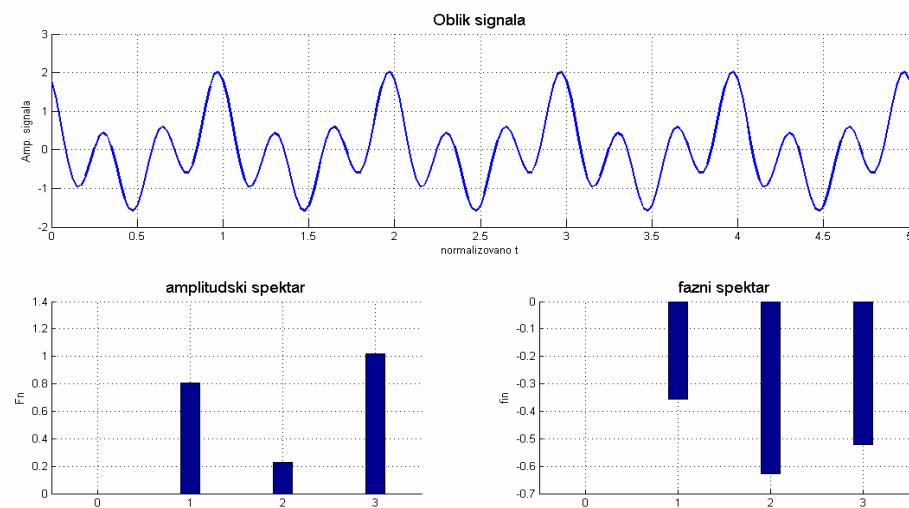
$$C = \{0, 0.1823 - j0.1319, 0.7553 - j0.2801, 0.8822 - j0.5080, \}$$



$$C = \{0, 0.7553 - j0.2801, 0.8822 - j0.5080, 0.1823 - j0.1319\}.$$

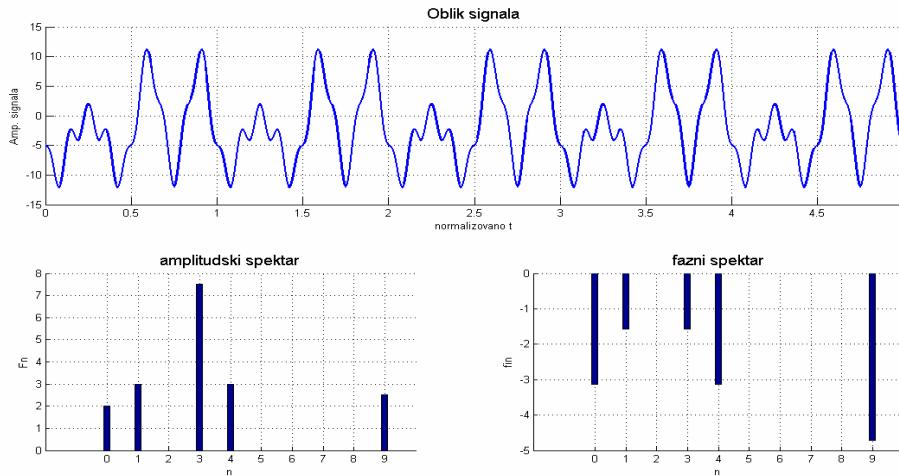


$$C = \{0, 0.7553 - j0.2801, 0.1823 - j0.1319, 0.8822 - j0.5080\}.$$

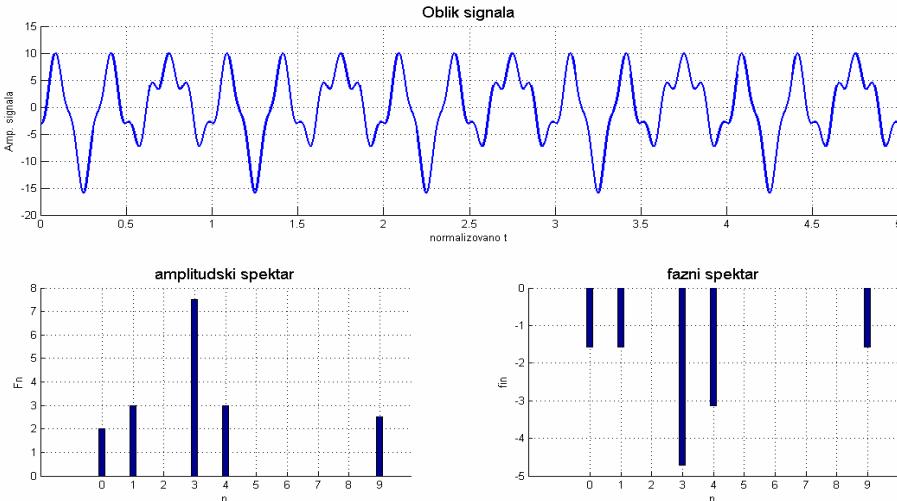


**Zadatak 1.4.6.** Odrediti i nacrtati fizički spektar datog signala. Preuređiti proizvoljno fazni spektar signala i prikazati tako dobijeni signal.

$$s(t) = -2 + 3 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{15}{2} \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(4\omega_0 t - \pi) + \frac{5}{2} \cos\left(9\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}\right).$$



Proizvoljnim preuređivanjem faznog spektra, dobija se signal prikazan na slici.



**Zadatak 1.4.7.** Kružnu učestanost komponenata signala prethodnog primera povećati dva puta. Prikazati spektar i oblik ovako dobijenog signala. Koja je perioda novog signala?

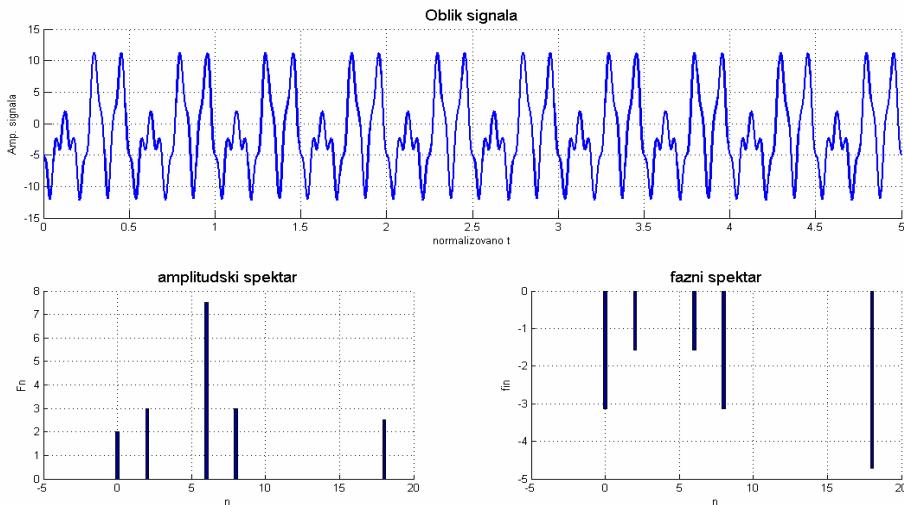
Nakon naveden transformacije učestanosti, dobija se sledeći opis signala

$$s(t) = -2 + 3 \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{15}{2} \cos\left(6\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(8\omega_0 t - \pi) + \frac{5}{2} \cos\left(18\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}\right).$$

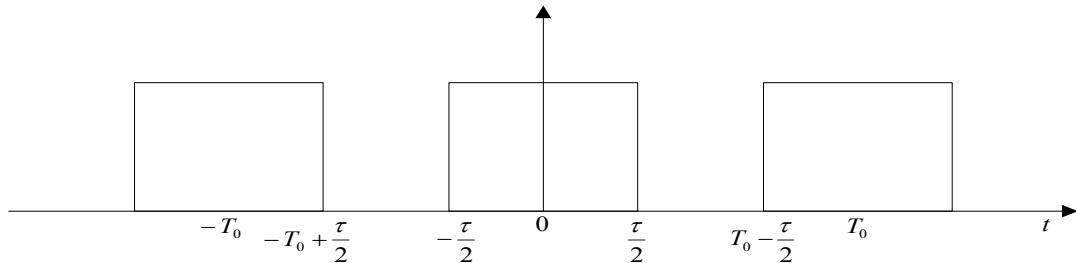
Koeficijenti Furierovog reda su

$$\begin{aligned} F_0 &= -2, & F_2 &= 3, & F_6 &= \frac{15}{2}, & F_8 &= 3, & F_{18} &= \frac{5}{2}, \\ \varphi_2 &= -\frac{\pi}{2}, & \varphi_6 &= -\frac{\pi}{2}, & \varphi_8 &= -\pi, & \varphi_{18} &= -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Oblak signala i njegov fizički spektar je prikazan na slici.



**Zadatak 1.4.8.** Na slici je prikazan periodična povorka jediničnog pravougaonog signala. Odaberimo amplitudu pravougaonog signala tako, da za bilo koju promenu širine pravougaonika, površina pravougaonika uvek bude jednaka jedinici. Smanjujući širinu pravougaonika (faktor ispune signala) prikazati promenu spektra i oblika signala na nekoliko primera. Čemu teži oblik signala i njegov spektar za slučaj  $\tau \rightarrow 0$ ?



Signal pod navedenim uslovima može da se opiše izrazom

$$s(t) = \begin{cases} 0; & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T_0}{2} \\ \frac{1}{\tau}; & |t| < \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Kompleksni koefficijenti Furierovog reda će biti

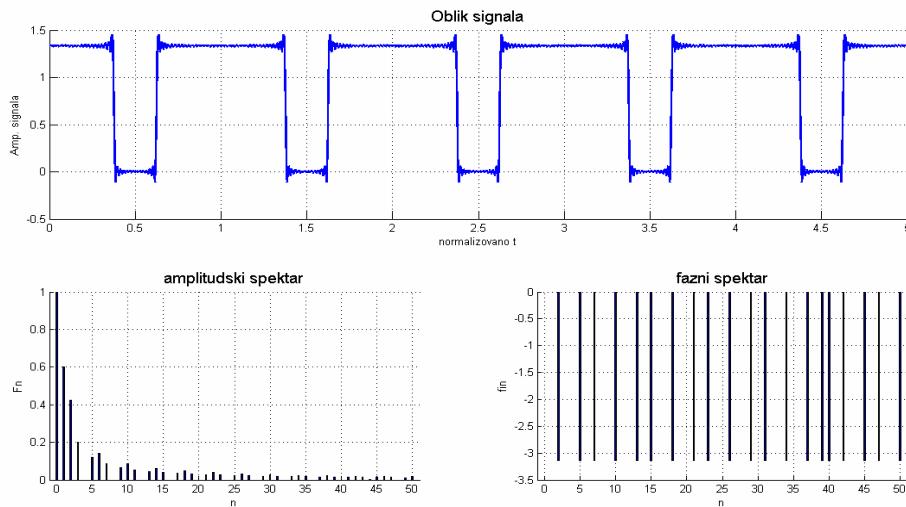
$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{\tau} \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T_0})}{n\pi} = \frac{1}{T_0} \frac{\sin(n\pi \frac{\tau}{T_0})}{\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}.$$

Označimo faktor ispune signala sa oznakom  $D = \frac{\tau}{T_0}$ . Tada dobijamo

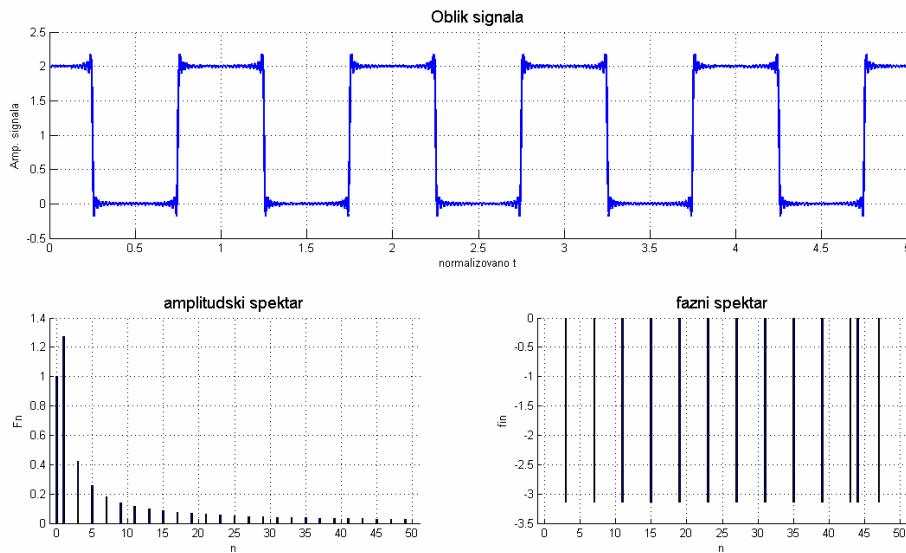
$$S_n = \frac{1}{T_0} \frac{\sin(n\pi \cdot D)}{(n\pi \cdot D)}, \quad F_n = \begin{cases} \frac{1}{T_0}; & n = 0 \\ \frac{2}{T_0} \frac{|\sin(n\pi \cdot D)|}{(n\pi \cdot D)}; & n \geq 0 \end{cases}; \quad \varphi_n = \text{sign}\{\sin(n\pi \cdot D)\}.$$

Za pojedine vrednosti faktora ispune dobijamo sledeće spekture i oblike signala.

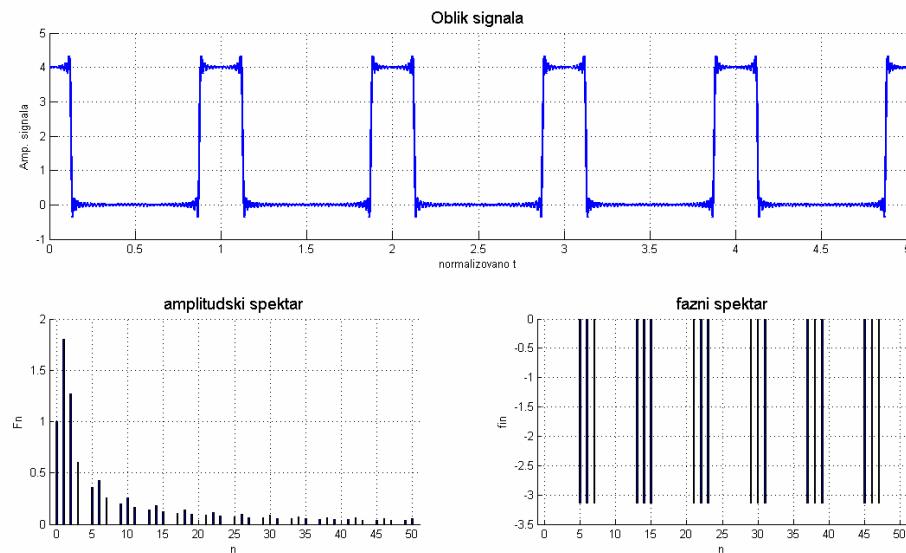
$D = 0.75$



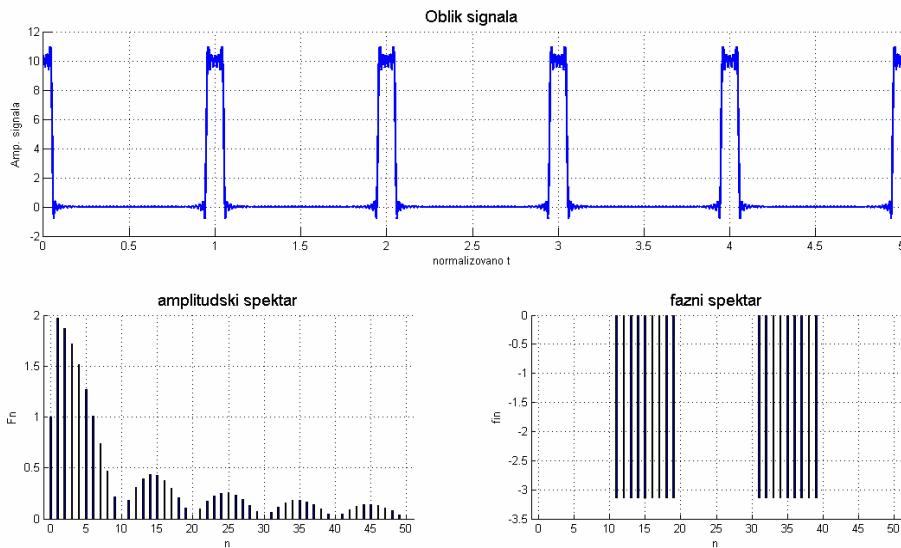
$D = 0.5$



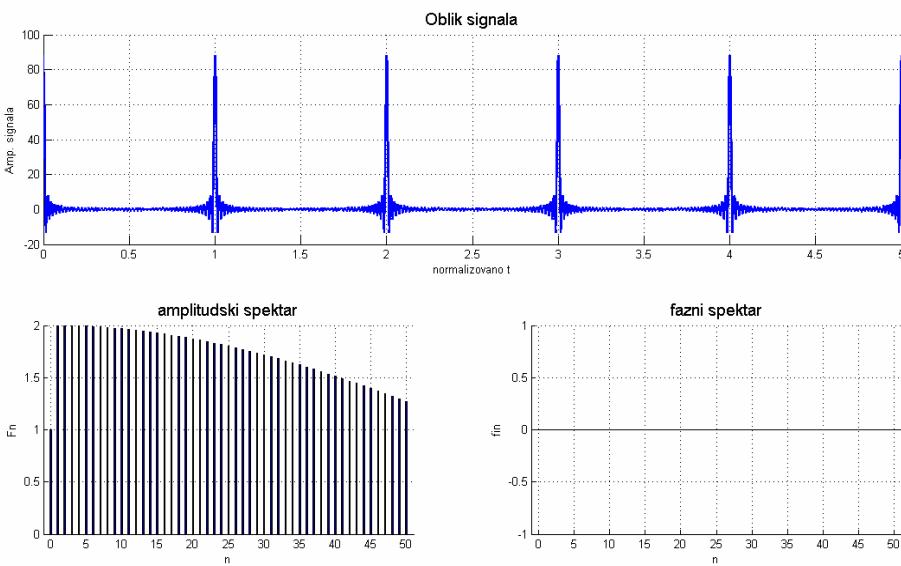
$D = 0.25$



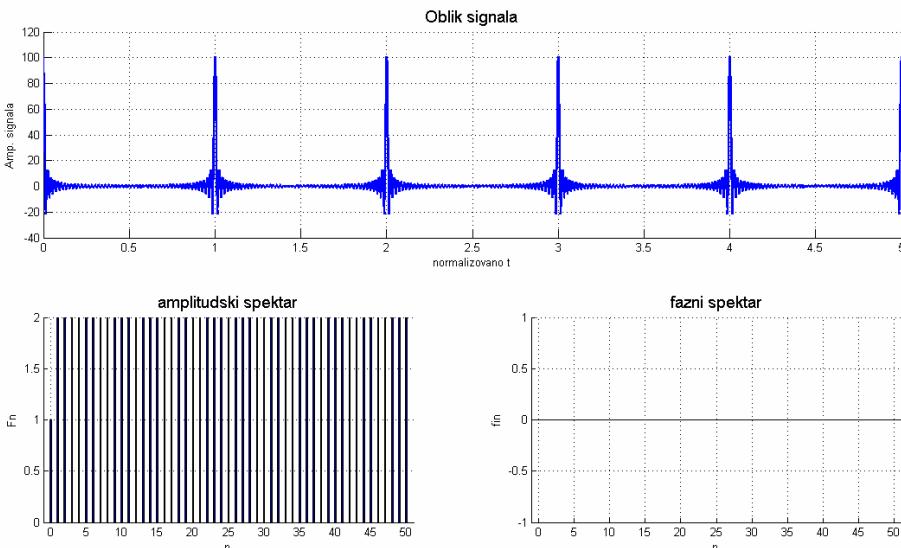
$D = 0.1$



$D = 0.01$



$D = 0.001$



**Zadatak 1.4.9.** Odrediti izraz za koeficijent Furierovog reda signala koji je pomeren po vremenskoj osi za  $\tau$ .

Pomereni signala  $s(t)$  po vremenskoj osi za pomeraj  $\tau$  će biti  $s_\tau(t) = s(t - \tau)$ .

Koeficijente Furierovog reda dobijamo kao

$$\underline{S}_{\tau_n} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_\tau(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t - \tau) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \underbrace{\begin{array}{l} \lambda = t - \tau \\ t = \lambda + \tau \\ d\lambda = dt \end{array}}_{\lambda \in [-\tau, T_0 - \tau]} = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau}^{T_0 - \tau} s(\lambda) \cdot e^{-jn\omega_0(\lambda + \tau)} d\lambda.$$

Zapazimo da granice dobijenog integrala obuhvataju jednu celu periodu. Koristeći se činjenicom, da koeficijenti reda nezavis od odabranog intervala opisa signala, dobijamo

$$\underline{S}_{\tau_n} = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau}^{T_0 - \tau} s(\lambda) \cdot e^{-jn\omega_0(\lambda + \tau)} d\lambda = e^{-jn\omega_0\tau} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(\lambda) \cdot e^{-jn\omega_0\lambda} d\lambda = e^{-jn\omega_0\tau} \cdot \underline{S}_n.$$

Primenimo Ojlerov oblik kompleksnih brojeva na dobijenoj jednačini.

$$\underline{S}_{\tau_n} = |\underline{S}_n| \cdot e^{j\varphi_m} = e^{-jn\omega_0\tau} \cdot \underline{S}_n = |\underline{S}_n| \cdot e^{j\varphi_n} \cdot e^{-jn\omega_0\tau} = |\underline{S}_n| \cdot e^{j(\varphi_n - n\omega_0\tau)}.$$

Kao što se vidi, vremensko pomeranje signala isključivo utiče na fazni spektar, dok amplitudski spektar ostaje nepromjenjen tj. važi

$$|\underline{S}_{\tau_n}| = |\underline{S}_n|, \quad \varphi_m = \varphi_n - jn\omega_0\tau.$$

**Zadatak 1.4.10.** Odrediti koeficijente Furierovog reda signala koji je pomeren duž naviše ili naniže duž amplitudsko ose.

Pomeranje signala  $s(t)$  duž amplitudske ose možemo da izvedemo dodavanjem konstantne veličine signalu tj.  $s'(t) = F + s(t)$  gde  $F$  predstavlja tu konstantnu veličinu. Spektar ovako dobijenog signala će biti

$$\underline{S}'_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s'(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [F + s(t)] \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{F}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Drugi član daje koeficijente Furierovog reda signala  $s(t)$ .

$$\underline{S}'_n = \frac{F}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-jn\omega_0 t} dt + \underline{S}_n = F \cdot e^{-jn\pi} \frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{2j \cdot n\pi} + \underline{S}_n = F \cdot e^{-jn\pi} \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} + \underline{S}_n.$$

Kako je prvi član ovog zbiru različito od nule samo za vrednost  $n = 0$ , za traženi spektar se dobija izraz

$$\underline{S}'_n = \begin{cases} F + \underline{S}_0 = F + F_0; & n = 0 \\ \underline{S}_n; & n \neq 0 \end{cases}$$

Kao što se vidi, pomeranje signala po amplitudskoj osi, ili dodavanje konstantne vrednosti signalu menja samo jenosmernu komponentu u spektru signala.

## 1.5. Spektar snage i spektralna širina signala

Spektar snage signala pokazuje raspodelu raspoložive ukupne srednje snage signala po svojim komponentama. Ona predstavlja kvadrat amplitudskog spektra tj.

$$P_n = \begin{cases} F_0^2; & n = 0 \\ \frac{1}{2} F_n^2; & n > 0. \end{cases}$$

Na osnovu spektra snage signala se može odrediti ona širina spektra signala, koja definiše širinu opsega učestanosti onog dela spektra u kome se nalaze značajne komponente signala. Šta su značajne komponente signala zavisi od slučaja do slučaja kao i od oblika spektra snage signala. Kriteriumi po kome se određuje širina spektra, mogu biti:

- opseg u kome se nalazi 90% ukupne srednje snage signala,
- apsolutna širina – opseg izvan koje je spektar snage jednak nuli,
- širina opsega u okolini maksimalne vrednosti spektra snage, sa graničnim tačkama u kojima je spektar snage prvi put jednak nuli (first lobe),
- širina opsega u okolini maksimalne vrednosti spektra snage, sa graničnim tačkama u kojima spektar snage opadne na polovinu svoje maksimalne vrednosti,
- širina opsega ekvivalentnog pravougaonik sa visinom jednakom maksimalne vrednosti spektra snage i površinom jednakom ukupnoj srednjoj snazi signala
- širina opsega izvan kojeg vrednost spektra snage ne nadmašuje unapred definisanu vrednost ili nivo.

Naravno osim navedenih kriterijuma može da se definišu kriterijumi i po nekim drugim principima.

**Zadatak 1.5.1.** Izvesti Parsevalov zakon.

Srednja snaga periodičnog signala se računa po izrazu  $P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) \cdot dt$ .

Kako se svaki periodičan signal može razviti u Furierov red oblika

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t - \varphi_n),$$

Uvrštavanjem ovog izraza u formulu ukupne srednje snage, dobijamo

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n \omega_0 t - \varphi_n) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_n F_m \cos(n \omega_0 t - \varphi_n) \cos(m \omega_0 t - \varphi_m) \right] dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 \cos^2(n \omega_0 t - \varphi_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0, m \neq n}^{\infty} F_n F_m \cos(n \omega_0 t - \varphi_n) \cos(m \omega_0 t - \varphi_m) \right] dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(n \omega_0 t - \varphi_n) \cdot dt + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0, m \neq n}^{\infty} F_n F_m \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(n \omega_0 t - \varphi_n) \cos(m \omega_0 t - \varphi_m) \cdot dt}_{I_{CC}=0}. \end{aligned}$$

Po adpcionim formulama imamo  $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2 \cdot \varphi))$ . Na osnovu toga gornji izraz će da bude

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(n\omega_0 t - \varphi_n) \cdot dt = F_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2 \frac{1}{2T_0} \int_0^{T_0} [1 + \cos(2 \cdot n\omega_0 t - 2 \cdot \varphi_n)] \cdot dt.$$

Integral drugog člana podintegralne funkcije je jednaka nuli, jer je integral trigonometrijske funkcije u punoj periodi, nezavisno od faze funkcije, uvek jednaka nuli. Tada se dobija

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) \cdot dt = F_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2.$$

Kako vidimo, za izračunavanje ukupne srednje snage periodičnog signala možemo primeniti dva obrasca. U jednom figuriše vremenski oblik signala preko podintegralne funkcije  $s^2(t)$ . Kako  $s(t)$  definiše signal u vremensko domenu to se za ovaj izraz kaže da određuje ukupnu srednju snagu u vremenskom domenu. U drugom se računa sa koeficijentima Furierovog reda. Na osnovu koeficijenti Furierovog reda uvek se može definisati signal u spektralnom domenu putem amplitudskog i faznog spektra. Za izraz, u kome se za proračun ukupne srednje snage primenjuju koeficijenti Furierovog reda, se kaže da određuju ukupnu srednju snagu u spektralnom domenu. Parsevalova teorema kaže, da ukupne srednje snage periodičnog signala računate u vremenskom i spektralnom domenu uvek moraju da budu jednake ili formalno

$$\underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) \cdot dt}_{\text{vremenski domen}} = F_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2}_{\text{spektralni domen}}.$$

**Zadatak 1.5.2.** Prikazati spektar snage datog signala. Odrediti širinu spektra datog signala.

$$s_o(t) = \begin{cases} -1; & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \\ +1; & 0 < t < \frac{T_0}{2}. \end{cases}$$

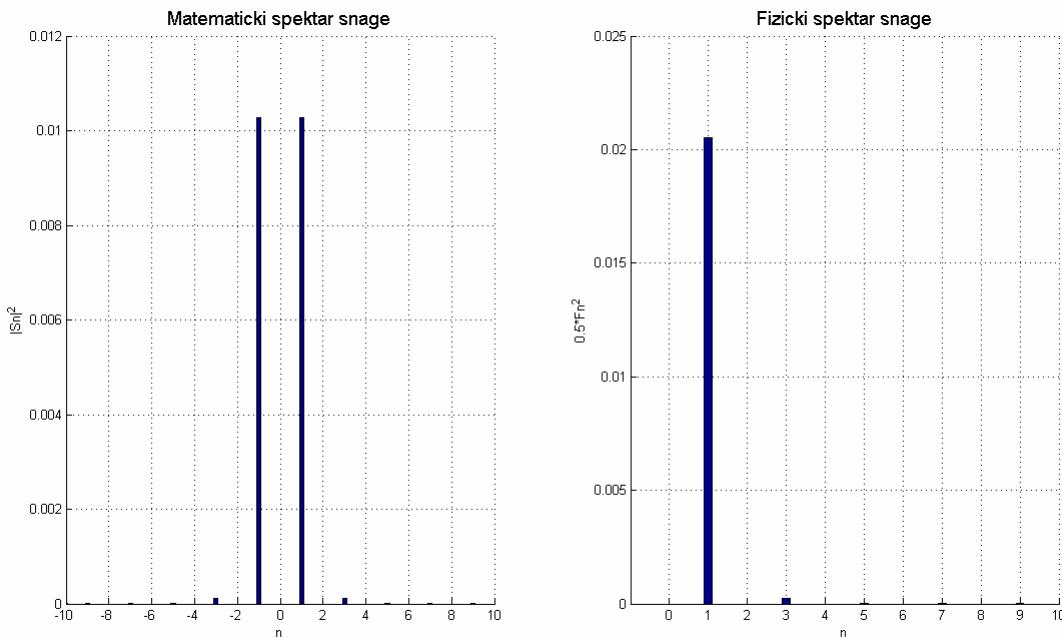
Spektar snage određuje kvadrat amplitudskog spektra signala tj.

$$P_n = \begin{cases} F_0^2; & n = 0 \\ \frac{1}{2} F_n^2; & n > 0. \end{cases}$$

Konkretno za naš primer dobijamo

$$P_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ 2 \frac{\sin^4\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{\left(n \frac{\pi}{2}\right)^2}; & n \geq 0. \end{cases}$$

Matematički i fizički spektar snage je prikazan na slici



Za ukupnu srednju snagu signala dobijamo

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^0 (-1)^2 dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} (+1)^2 dt = 1.$$

Očigledno apsolutnu širinu spektra signala nije moguće definisati sobzirom da spektar nije ograničen na neku konačnu oblast učestanosti.

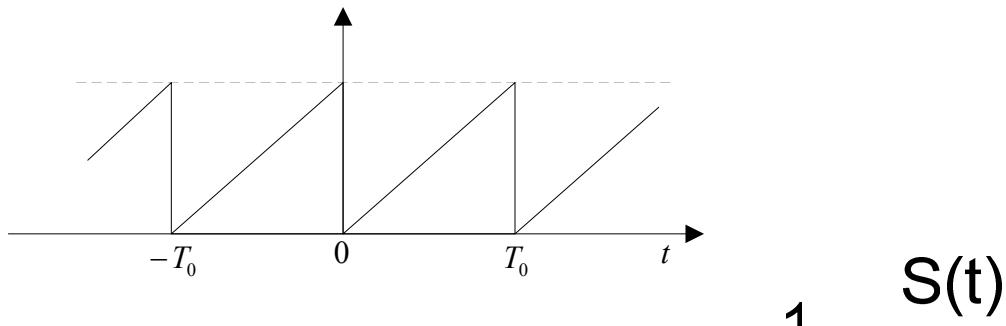
Iz spektra snage signala vidimo da komponenta sa rednim brojem  $n = 1$  ima najveću snagu  $P_n = 0.8106$ . Polovina ove snage je jednaka 0.4053. Prva komponenta po redu koja sa manjom snagom od polovine najveće ima redni broj  $n = 3$ . Odavde se zaključuje da po ovom kriterijumu šrina spektra signala je  $BW = 2\omega_0$  i obuhvata komponente sa rednim brojevima  $n = 0,1,2$ .

Ako se za kriterijum uzme, da akumulisana snag komponenata do granične komponente nemože niti manja od 90% ukupne srednje snage, tj.

$$\sum_{n=0}^N P_n = F_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N F_n^2 \geq 0.99 \cdot P$$

Tada za graničnu komponentu dobijamo redni broj  $n = 3$ . Šrina spektra signala je sada  $BW = 2\omega_0$  i obuhvata komponente sa rednim brojevima  $n = 0,1,2,3$ .

**Zadatak 1.5.3.** Prikazati spektar snage datog signala. Odrediti širinu spektra signala.



Matematički opis prikazanog signala je

$$s_o(t) = \frac{t}{T_0}; 0 \leq t \leq T_0 .$$

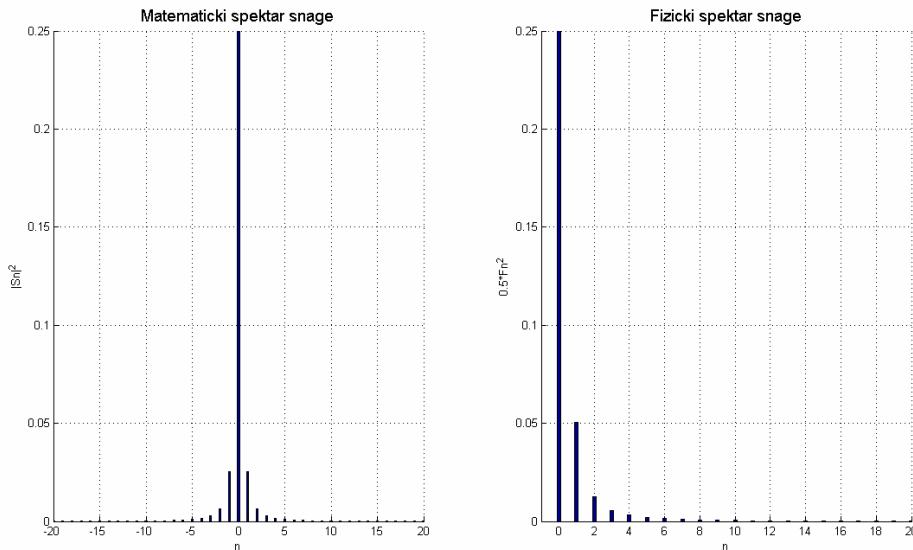
Kompleksni koeficijenti Furierovog reda su

$$F_n = \begin{cases} 0.5; & n = 0 \\ \frac{1}{n\pi}; & n > 0 \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & n > 0. \end{cases}$$

Spektar snage dobijamo nakon što odredimo snage pojedinih komponenata signala po izrazu

$$P_n = \begin{cases} 0.25; & n = 0 \\ \frac{0.5}{(n\pi)^2}; & n > 0. \end{cases}$$

Spektar snage ima oblik prikazan na slici.



Ukupna srednja snaga signala je jednaka

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{t}{T_0}\right)^2 dt = \frac{1}{3} = 0.33.$$

Po kriterijumu od 90% ukupne srednje snage širina spektra signala mora da obuhvata komponente sa rednim brojevima  $n = 0, \dots, 16$ . Širina spektra signala, koja obuhvata značajne komponente po navedenom kriterijumu, je  $BW = 16\omega_0$ .

**Zadatak 1.5.4.** Odredit širinu spektra datog signala.

$$s(t) = -2 + 3 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{15}{2} \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(4\omega_0 t - \pi) + \frac{5}{2} \cos\left(9\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Koeficijenti Furierovog reda i odgovarajuće snage su

$$\begin{aligned} F_0 &= -2, & P_0 &= 4, \\ F_1 &= 3, & P_1 &= 4.5, \\ F_3 &= 7.5, & P_3 &= 28.125, \\ F_4 &= 3, & P_4 &= 4.5, \\ F_9 &= 2.5, & P_9 &= 3.125. \end{aligned}$$

Ukupna snaga signala je

$$P = \sum_{n=0}^9 P_n = 4 + 4.5 + 28.125 + 4.5 + 3.125 = 44.25 \quad P_{90\%} = 39.825.$$

Komponenta sa najvećom snagom svakako mora pripadati opsegu značajnih komponenti. Zbir najveće komponente i najbližih okolnih komponenata iznosi

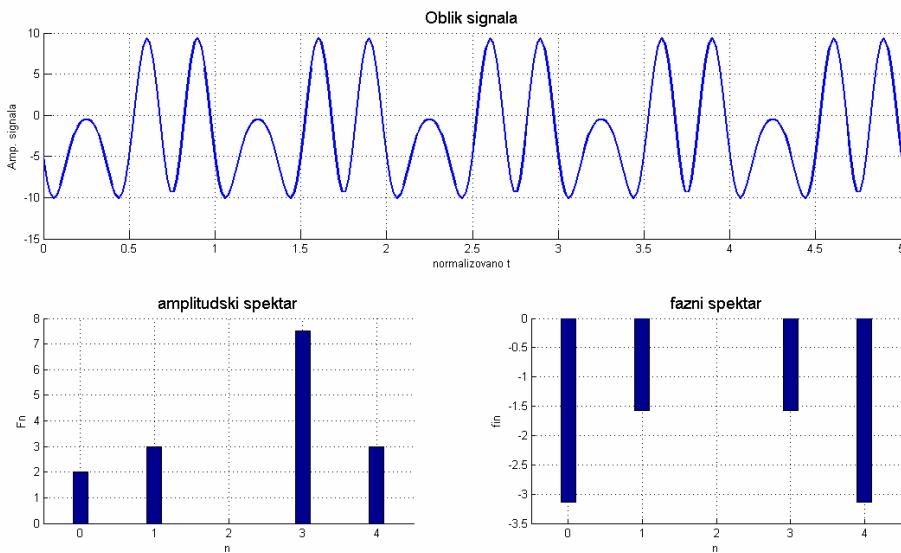
$$P_1 + P_3 + P_4 = 37.125 < 39.825.$$

Da bi zadovoljili uslov 90% ukupne srednje snage, uzmimo sledeću veću komponentu tj. jednosmernu komponentu

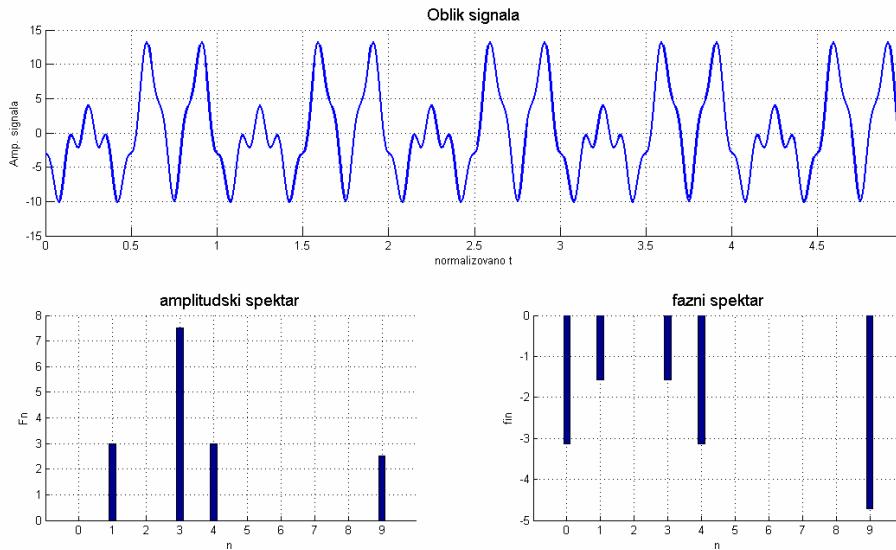
$$P_0 + P_1 + P_3 + P_4 = 41.125 > 39.825.$$

Ove tri komponente zadovoljavaju postavljeni kriterijum. Širina spektra signala je  $BW = 4\omega_0$ .

Oblik signala, na ovaj način ograničavanja spektra je prikazan na slici



Postavljeni kriterijum možemo da zadovljimo i na taj način, ako se umesto jednosmerne komponente uzima deveta komponenta. Tada se dobija oblik signala sličniji osnovnom signalu ali pomerenu naniže po amplitudskoj osi, zbog nedostatka jednosmerne komponente, kao što je to prikazano na slici.



## 1.6. Konvolucija i korelacija periodičnih signala

Konvolucija i korelacija su matematičke operacije koje se izvode nad signalima.

Konvolucija je definisana izrazom

$$k_v(t) = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = s_1(t) * s_2(t) = s_2(t) * s_1(t) = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s_2(\tau) s_1(t - \tau) d\tau .$$

Među korelaciju je određene integralom

$$k_r(t) = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s_1(\tau) s_2(\tau + t) d\tau = s_1(t) * s_2(t) \neq s_2(t) * s_1(t) = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s_2(\tau) s_1(\tau + t) d\tau .$$

Zapazimo da je u slučaju međukorelacija bitan redosled podintegralnih funkcija. Specijalan slučaj korelacije predstavlja autokorelaciona funkcija

$$k_r(t) = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s(\tau) s(\tau + t) d\tau ,$$

koja za u tački \$t = 0\$

$$k_r(t = 0) = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s(\tau) s(\tau) d\tau = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} s^2(\tau) d\tau = P$$

daje ukupnu srednju snagu periodičnog signala.

**Zadatak 1.6.1.** Odrediti konvoluciju sinusnog i kosinusnog signala sa proizvoljnim fazama.  
 $s_C(t) = F_C \cos(\omega_0 t - \varphi_C)$ ,

$$s_S(t) = F_S \sin(\omega_0 t - \varphi_S)$$

$$\begin{aligned} k_v(t) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_C(\tau) \cdot s_S(t-\tau) \cdot d\tau = \frac{F_C F_S}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 \tau - \varphi_C) \cdot \sin(\omega_0(t-\tau) - \varphi_S) \cdot d\tau = \\ &= \frac{F_C F_S}{2T_0} \int_0^{T_0} \sin(\omega_0 t - (\varphi_C + \varphi_S)) \cdot d\tau - \frac{F_C F_S}{2T_0} \int_0^{T_0} \sin(2\omega_0 \tau - \omega_0 t - (\varphi_C - \varphi_S)) \cdot d\tau = \\ &= \frac{F_C F_S}{2} \cdot \sin(\omega_0 t - (\varphi_C + \varphi_S)) \end{aligned}$$

**Zadatak 1.6.2.** Odrediti međukorelaciju sinusnog i kosinusnog signala sa proizvoljnim fazama po izrazu

$$\begin{aligned} k_r(t) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_C(\tau) \cdot s_S(\tau+t) \cdot d\tau \\ k_r(t) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_C(\tau) \cdot s_S(\tau+t) \cdot d\tau = \frac{F_C F_S}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 \tau - \varphi_C) \cdot \sin(\omega_0(\tau+t) - \varphi_S) \cdot d\tau = \\ &= \frac{F_C F_S}{2T_0} \int_0^{T_0} \sin(2\omega_0 \tau + \omega_0 t - (\varphi_C + \varphi_S)) \cdot d\tau - \frac{F_C F_S}{2T_0} \int_0^{T_0} \sin(-\omega_0 t - (\varphi_C - \varphi_S)) \cdot d\tau = \\ &= \frac{F_C F_S}{2} \cdot \sin(\omega_0 t + (\varphi_C - \varphi_S)). \end{aligned}$$

**Zadatak 1.6.3.** Odrediti autokonvoluciju i autokorelaciju periodičnog signala.

U toku izvođenja primenićemo kompleksni oblik Furierovog reda periodičnog signala.

$$\begin{aligned} k_v(t) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(\tau) \cdot s(t-\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{jn\omega_0 \tau} \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{jn\omega_0(t-\tau)} \right) \cdot d\tau = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_n S_m e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0(n-m)\tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_n S_m e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-jn\omega_0(n-m)\tau} \cdot d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_n S_m e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{\sin((n-m)\pi)}{(n-m)\pi} \cdot e^{-jn\pi(n-m)} = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^2 e^{jn\omega_0 t}; & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Izraz koji smo dobili pokzuje, da autokonvolucija signala takođe daje periodičan signal. Perioda dobijenog signala i osnovnog signala su identične. Na osnovu izraza lako je proračunati koeficijente Furierovog reda autokonvolucionog signala,

$$k_v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^2 e^{jn\omega_0 t} = S_0^2 + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |S_n|^2 \cos(n\omega_0 t - 2\varphi_n) = F_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2 \cos(n\omega_0 t - 2\varphi_n)$$

Odredimo sada autokorelacionu funkciju proizvoljnog periodičnog signala.

$$\begin{aligned}
 k_r(t) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(\tau) \cdot s(\tau + t) \cdot d\tau = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n e^{jn\omega_0 \tau} \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n e^{jn\omega_0 (\tau+t)} \right) \cdot d\tau = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \underline{S}_m e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 (n+m)\tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \underline{S}_m e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j\omega_0 (n+m)\tau} \cdot d\tau = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \underline{S}_m e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{\sin((n+m)\pi)}{(n+m)\pi} \cdot e^{j\pi(n+m)} = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \underline{S}_{-n} e^{jn\omega_0 t}; & m = -n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kako je signal realna funkcija, to mora da važi  $\underline{S}_{-n} = \underline{S}_n^*$ , iz čega sledi

$$k_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \underline{S}_{-n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S}_n \underline{S}_n^* e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{S}_n|^2 e^{jn\omega_0 t} = F_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2 \cos(n\omega_0 t).$$

Kao što vidimo ova funkcija je takođe periodična sa istom periodom kao signal i sadrži samo parne sačinioce, bez obzira na fazni spektar signala. Osobina ove funkcije je između ostalog ta, da za vrednos  $t = 0$  daje ukupnu srednju snagu periodičnog signala.

## 2. Aperiodični signali

### 2.1. Matematički opis aperiodičnih signala

**Zadatak 2.1.1.** Dati matematičku definiciju delta impulsa,  $\delta(t)$ .

Analogni ili kontinualni delta impuls se definiše pomoću četiri jednačina.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = \delta(-t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0), \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty; t = 0 \\ 0; t \neq 0 \end{cases}.$$

Kao što se iz datih jednačina vidi, delta impuls ima skok beskonačne amplituda i nultog vremenskog trajanja. Površina koja je obuhvaćena signalom i vremenskom osom je jedinične vrednosti. Delta impuls ima osobinu parnosti. Integral proizvoda proizvoljne funkcije i delta impulsa, pomerenog po vremenskoj osi za  $t_0$  vreme, je jednaka vrednosti funkcije u tački u koju je pomeren delta impuls. Kako se delta impuls, zbog svojih navedenih osobina, nemože ostvariti, najčešće se koristi u teoriji kao koristan alat za analizu signala i spektara.

**Zadatak 2.1.2.** Odrediti spektar periodične povorke delta impulsa.

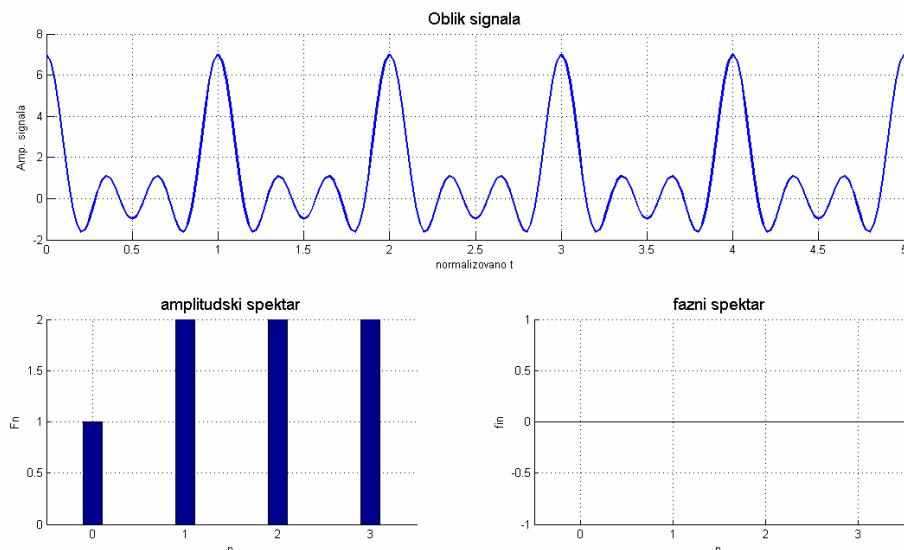
Znamo da se svaki periodičan signal može razviti u Fourierov red. Kompleksni koeficijenti Fourierovog reda će biti

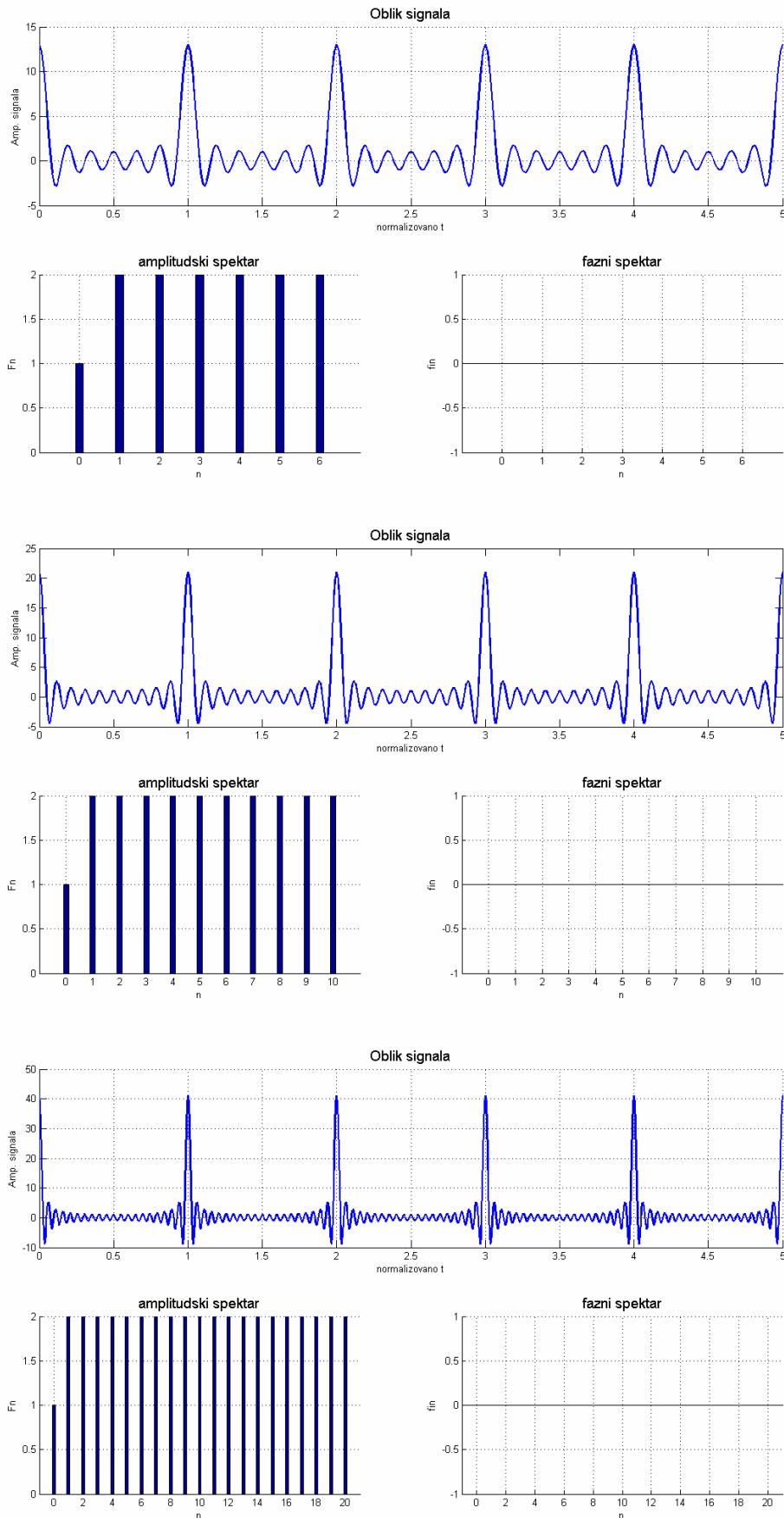
$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_o(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \delta(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}; \forall n.$$

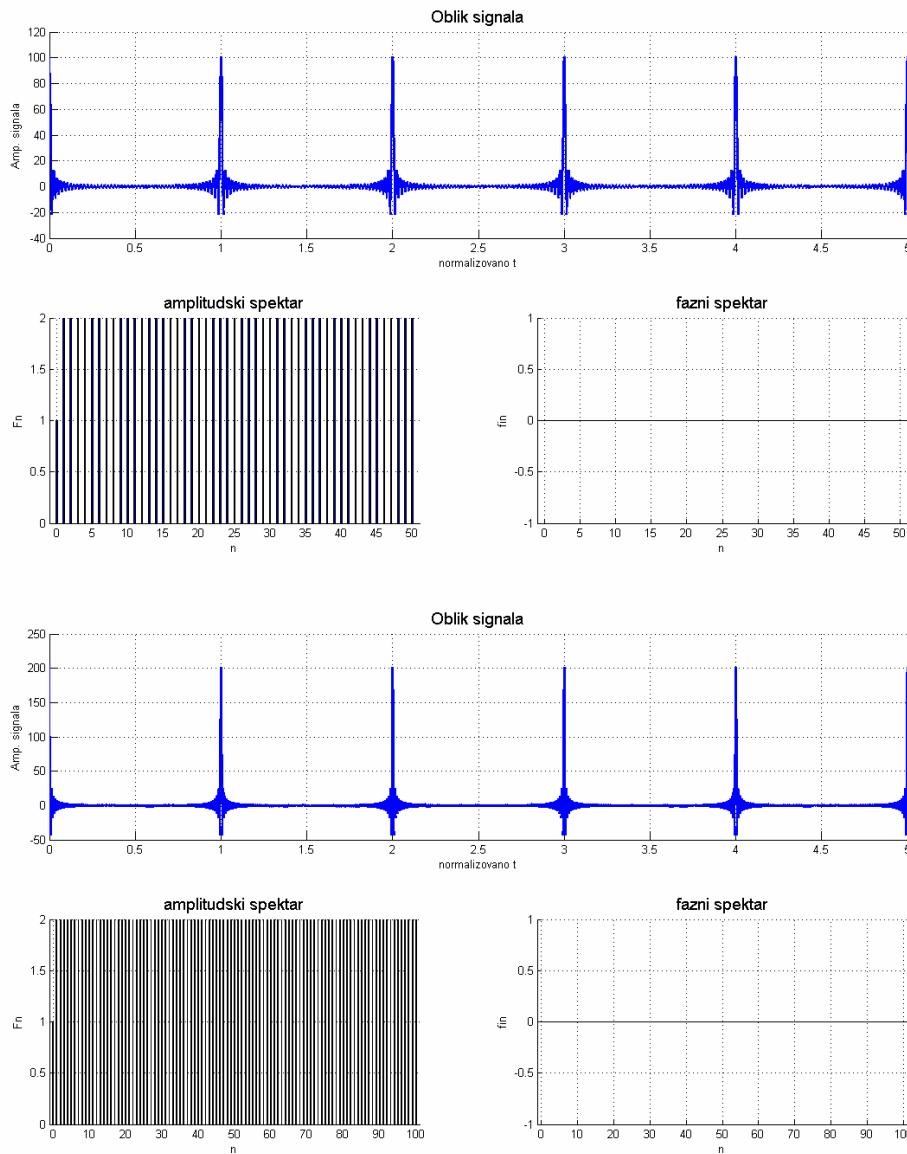
Na osnovu dobijenog rezultata se vidi da su Fourierov red sadrži beskonačno puno koeficijenata identičnih amplituda. Fizički oblik Fourierovog reda će biti

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t).$$

U kojoj meri se približava dati red teorijskom delta impulsu, pokazuju sledeći grafikoni za  $N = 3, 6, 10, 20, 50, 100$  komponenata respektivno.

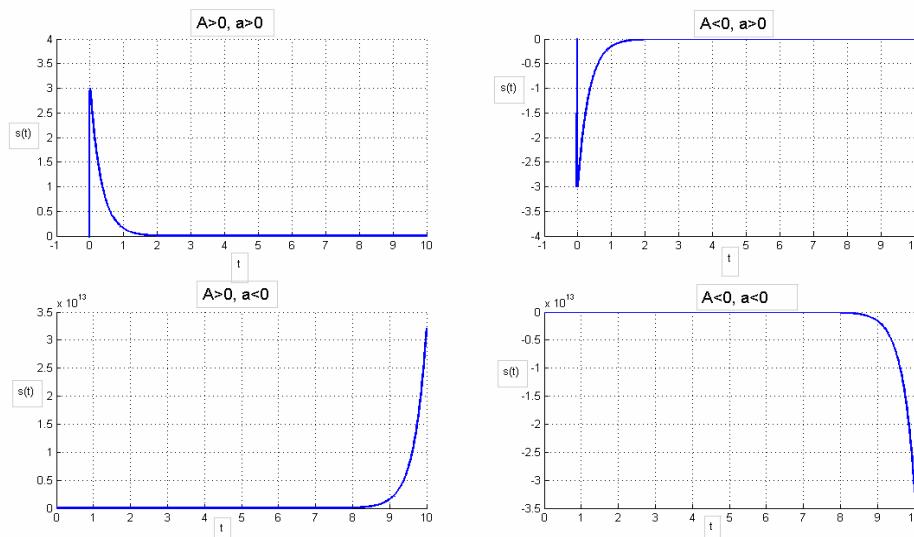






**Zadatak 2.1.3.** Nacrtati dati aperiodični signal i izračunati ukupnu energiju signala.

$$s(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ A \cdot e^{-at}; & t \geq 0. \end{cases}$$



Ukupna energija signala je data izrazom

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

Za nevedene slučajeve samo prva dva imaju konačnu energiju,

$$E = \int_0^{\infty} A^2 e^{-2at} dt = \frac{A^2}{2a}.$$

**Zadatak 2.1.4.** Odrediti ukupnu energiju periodičnog signala konačnog trajanja

$$s(t) = \begin{cases} F \cdot \cos(\omega_0 t); & t \in [T_0, 100 \cdot T_0] \\ 0; & t \notin [T_0, 100 \cdot T_0] \end{cases}$$

Ukupna energija signala će biti

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt = \int_{T_0}^{100T_0} F^2 \cos^2(\omega_0 t) \cdot dt = \frac{F^2}{2} \int_{T_0}^{100T_0} [1 + \cos(2\omega_0 t)] \cdot dt = 49.5 \cdot F^2 T_0$$

Zapazimo da ukupna energija ne zavisi od dužine trajanja periodičnog signala, ali zato zavisi od periode signala. Što je perioda signala duža to je i ukupna energija veća.

## 2.2. Furierova transformacija signala i spektar signala

Spektar aperiodičnih signala se analizira Furierovom transformacijom koja ima oblik

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Spektar signala predstavlja kompleksnu funkciju sa nezavisnom promenljivom  $\omega$  koja predstavlja kružnu učestanost. Spektar aperiodičnog signala je kontinualna funkcija promenjuće  $\omega$ . Ona nam daje informaciju o prisutnosti kosinusnih komponenata određene amplitude i faze odnosno, razlaže signal na komponente sa kružnom učestanošću  $\omega$ . Primenom Ojlerovog oblika kompleksnih brojeva, kompleksni spektar se može prikazati i u obliku

$$S(j\omega) = |S(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}.$$

Amplitudski spektar signala je modu kompleksnog spektra signala, dok je fazni spektar argument ove kompleksne funkcije, tj. formalno

$$A(\omega) = |S(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg\{S(j\omega)\}.$$

Inverzna Furieova transformacija određuje vremenski oblik signala kada je poznat spektar tog signala. Ona ima oblik

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega.$$

Za aperiodične signale važi, da ako je signal u vremenom domenu ograničen na nekom intervalu i van toga je jednaka nuli, tada amplitudski spektar takvog signala se prostire od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Isto to važi i u suprotom smjeru. Ako je spektar ograničen na neki interval kružne učestanosti, tada vremenski oblik signala se prostire  $-\infty$  do  $+\infty$ .

**Zadatak 2.2.1.** Odrediti Furierovu transformaciju delta impulsa  $\delta(t)$ .

Primenom osobine delta impulsa i izraza za Furierovu transformaciju

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$

dobijamo

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \cdot 1 = 1; \forall \omega .$$

Dobijeni izraz predstavlja konstantu za svaku vrednost  $\omega$ . Ona je realna, što znači da spektar signala čini amplitudski spektar u kome svaka komponenta doprinosi istom vrednošću amplitude, i fazni spektar koji je identičan nuli. Spektar delta signala (impulsa) je konstantan i sadrži beskonačno mnogo harmonika. Signali koji imaju nagle promene u vremenskom domenu, uvek imaju spektar koji sadrži relativno veliki broj visokofrekvencijskih komponenata. Delta impuls je signal koji u jednom trenutku naglo odskače sa nulte vrednosti do beskonačnosti, i odmah se vraća na nultu vrednost. Cela ova pojava se dešava u trenutku  $t = 0$ . Zbog ovih naglih promena u signalu, logično je očekivati visokofrekvencijske komponente u spektru. Spektar signala sadrži beskonačno puno komponenata, pa zato njegova spektralna širina teži ka beskonačnosti.

**Zadatak 2.2.2.** Odrediti Furierovu transformaciju signala  $s(t) = 1; \forall t$ .

Furierova transformacija signala  $s(t)$  je

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt .$$

Na osnovu izraza inverzne Furierove transformacije imamo da je

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega \rightarrow 2\pi \cdot \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega .$$

Uvođenjem formalnih smena  $t \rightarrow \omega$  i  $\omega \rightarrow t$  dobijamo da je  $2\pi \cdot \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\omega} dt$ . Odavde se onda lako uočava da je

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Amplitudski spektar jednosmernog signala je jednaka delta impulsu koji je smešten u tačku  $\omega = 0$ . Fazni spektar signala je jednaka nuli. Jednosmerni signal je signal čija je kružna učestanost  $\omega$  jednaka nuli. Znamo da se komponente, koje sadrži signal, raspoređuju po frekvencijskoj osi na osnovu vrednosti svojih učestanosti. Na osnovu rečenog zaključujemo da spektar signala sa jednosmernom komponentom mora biti lociran u koordinatnom početku amplitudskog spektra jer ne sadrži nijednu komponentu čija učestanost je različita od nule.

**Zadatak 2.2.3.** Odrediti spektar sinusnog i kosinusnog signala.

Utoku izvođenja koristićemo se Ojlerovim izrazom.

$$s(t) = \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} 2\pi\delta(\omega + \omega_0) = \pi\delta(\omega - \omega_0)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \pi\delta(\omega + \omega_0)e^{j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Amplitudski spektar signala sadrži dve komponente koje su locirane na  $\omega = \pm\omega_0$ . Njihova amplituda je jednaka  $\pi$ . Treba zapaziti da je fazni spektar različit od nule. Na kružnoj učestanosti  $\omega = -\omega_0$  faza iznosi  $\frac{\pi}{2}$  dok na kružnoj učestanosti  $\omega = \omega_0$  faza iznosi  $-\frac{\pi}{2}$ .

$$s(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega + \omega_0) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Amplitudski spektar signala sadrži dve komponente koje su locirane na  $\omega = \pm\omega_0$ . Njihova amplituda je jednaka  $\pi$ . Za razliku od predhodnog slučja, fazni spektar je jednak nule.

**Zadatak 2.2.4.** Odrediti Furierovu transformaciju periodičnog signala.

Primenimo Furierovu transformaciju nad fizičkom obliku Furierovog reda periodičnog signala.

$$s(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n).$$

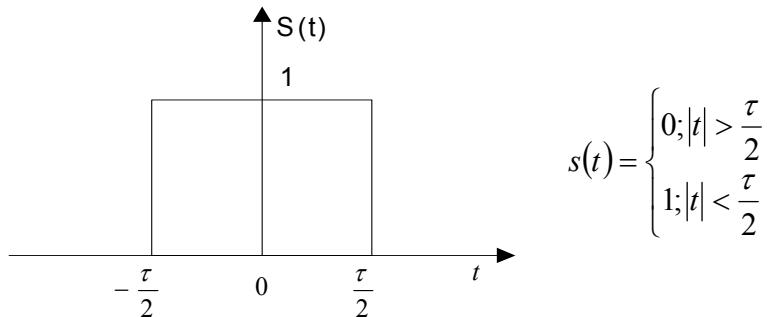
$$S(j\omega) = FT\{s(t)\} = FT(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot FT\{\cos(n\omega_0 t - \varphi_n)\}.$$

Primenjujući izraze prethodnih primera, dobijamo sledeći izraz

$$S(j\omega) = F_0 \cdot 2\pi\delta(\omega) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot [\delta(\omega - n\omega_0) \cdot e^{-j\varphi_n} + \delta(\omega + n\omega_0) \cdot e^{j\varphi_n}].$$

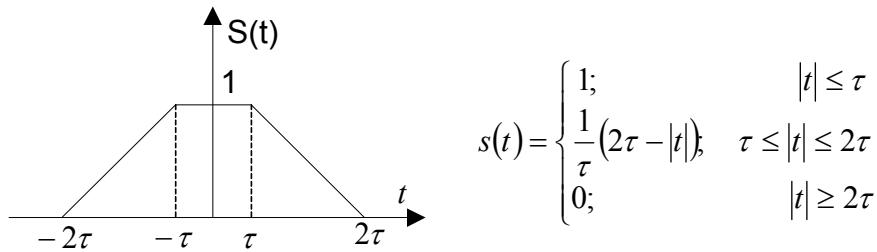
Dobijeni spektar periodičnog signala se sastoji od beskonačno mnogo delta imulsa smeštenih na celobrojne umnoške osnovne kružne učestanosti periodičnog signala.

**Zadatak 2.2.5.** Odrediti Furierovu transformaciju usamljenog pravougaonog impulsa.



$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right).$$

**Zadatak 2.2.6.** Odrediti Furierovu transformaciju prikazanaog signala i nacrtati amplitudski i fazni spektar.



$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-2\tau}^{-\tau} \frac{1}{\tau}(2\tau + t) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt + \int_{\tau}^{2\tau} \frac{1}{\tau}(2\tau - t) \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= 2 \frac{e^{-j\omega t} \Big|_{-2\tau}^{-\tau}}{-j\omega} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{te^{-j\omega t} \Big|_{-2\tau}^{-\tau}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega t} \Big|_{-2\tau}^{-\tau}}{(-j\omega)^2} \right) + \frac{e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau}^{\tau}}{-j\omega} + 2 \frac{e^{-j\omega t} \Big|_{\tau}^{2\tau}}{-j\omega} - \frac{1}{\tau} \left( \frac{te^{-j\omega t} \Big|_{\tau}^{2\tau}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega t} \Big|_{\tau}^{2\tau}}{(-j\omega)^2} \right) =$$

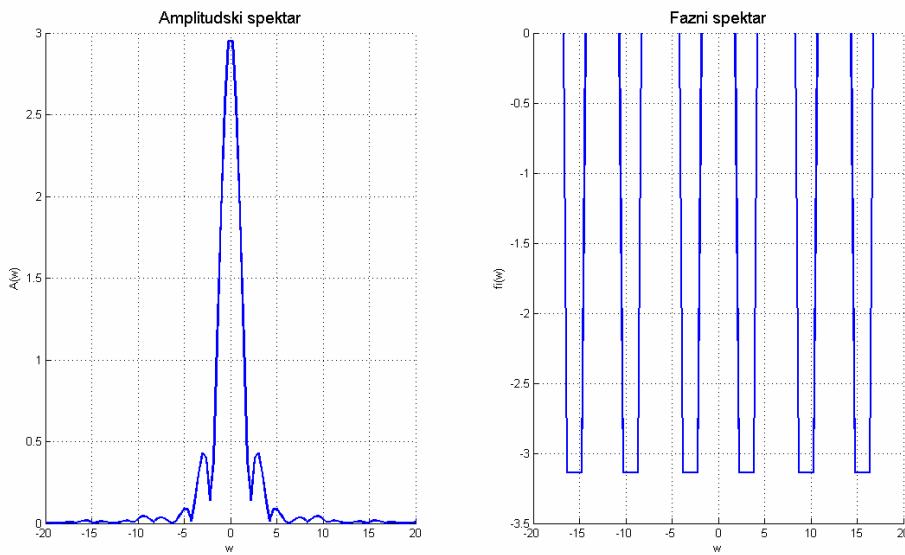
$$= \frac{2}{\tau} \cdot \frac{\cos(\tau\omega) - \cos(2\tau\omega)}{\omega^2}.$$

Za kompleksni spektar signala smo dobili čistu realnu funkciju. Amplitudski i fazni spektar će biti

$$A(\omega) = \frac{2}{\tau} \cdot \frac{|\cos(\tau\omega) - \cos(2\tau\omega)|}{\omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = -\pi \cdot \text{sign}\{\cos(\tau\omega) - \cos(2\tau\omega)\}.$$

Oblik amplitudskog i faznog spektra je prikazan na slici.



**Zadatak 2.2.7.** Odrediti Furierovu transformaciju kvazi periodičnog kosinusnog signala i prikazati spektar signala za tri različite dužine trajanja signala. Čemu teži spektar ako trajanje signala teži ka beskonačnosti?

$$s(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t); & t \in [-T, T] \\ 0; & t \notin [T, T] \end{cases}$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

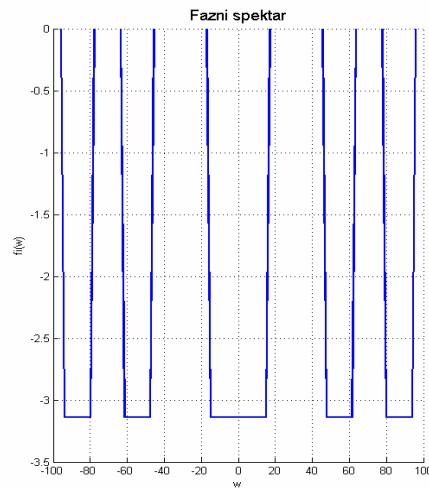
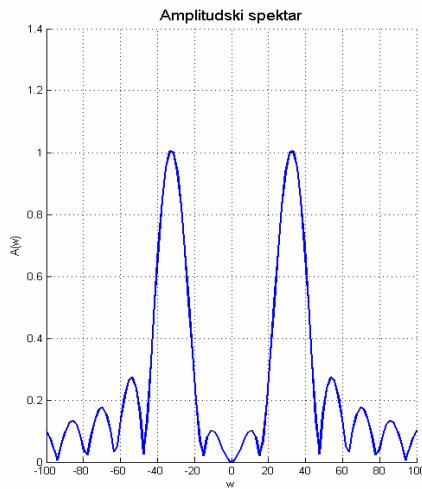
$$= \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = T \cdot \frac{\sin((\omega - \omega_0)T)}{(\omega - \omega_0)T} + T \cdot \frac{\sin((\omega + \omega_0)T)}{(\omega + \omega_0)T}$$

$$A(\omega) = \left| T \cdot \frac{\sin((\omega - \omega_0)T)}{(\omega - \omega_0)T} + T \cdot \frac{\sin((\omega + \omega_0)T)}{(\omega + \omega_0)T} \right|,$$

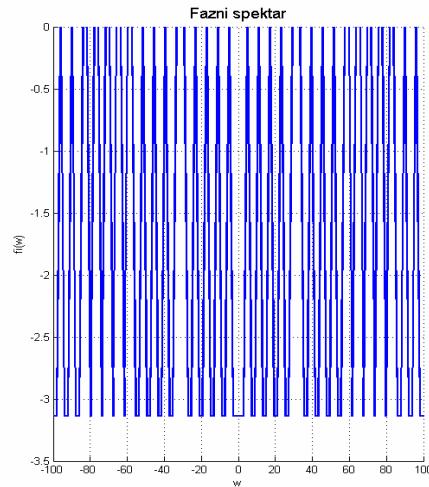
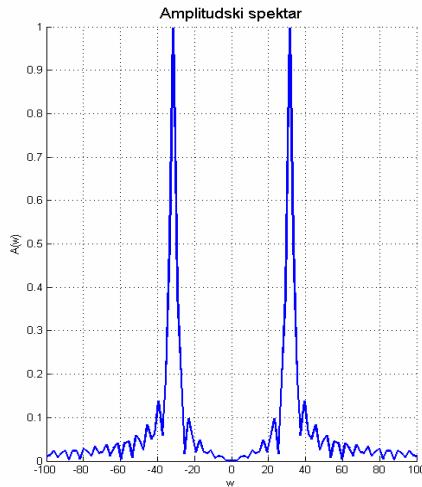
$$\varphi(\omega) = -\pi \cdot \text{sign}\{A(\omega)\}.$$

Oblik spektra signala za slučajeve  $\frac{T}{T_0} = 1$ ,  $\frac{T}{T_0} = 5$ ,  $\frac{T}{T_0} = 10$ ,  $\frac{T}{T_0} = 100$  su prikazane na sledećim slikama .

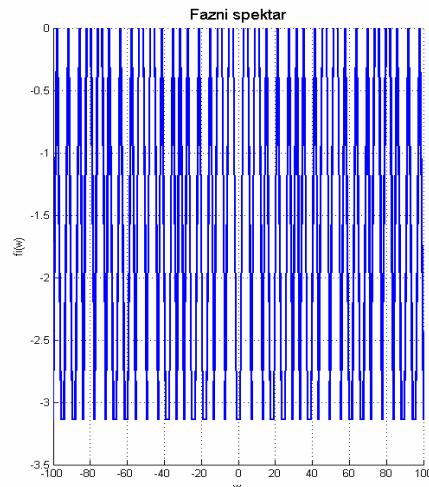
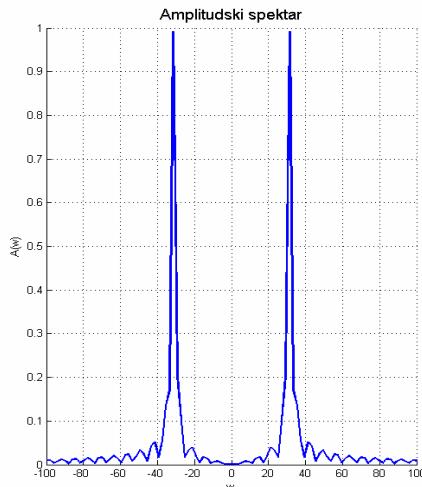
Slučaj kada je odnos  $\frac{T}{T_0} = 1$ .



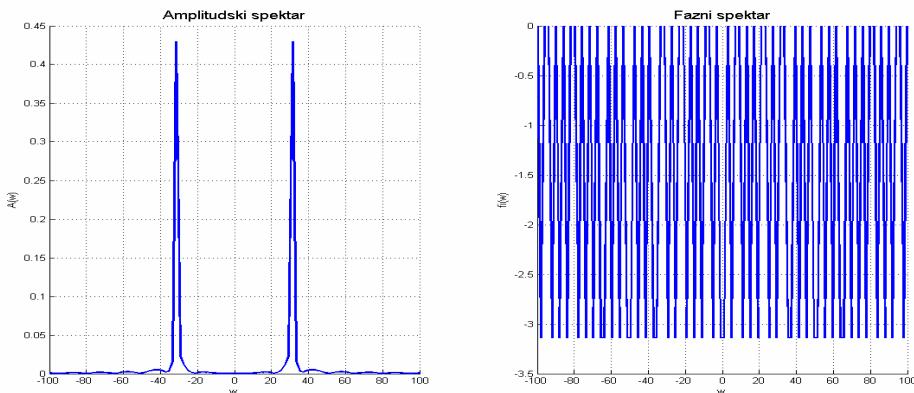
Slučaj kada je odnos  $\frac{T}{T_0} = 5$ .



Slučaj kada je odnos  $\frac{T}{T_0} = 10$ .



Slučaj kada je odnos  $\frac{T}{T_0} = 100$ .



**Zadatak 2.2.8.** Nacrtati oblik signala ako je spektar signala jenak

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0}(\omega_0 - |\omega|), & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0; & |\omega| \geq \omega_0. \end{cases}$$

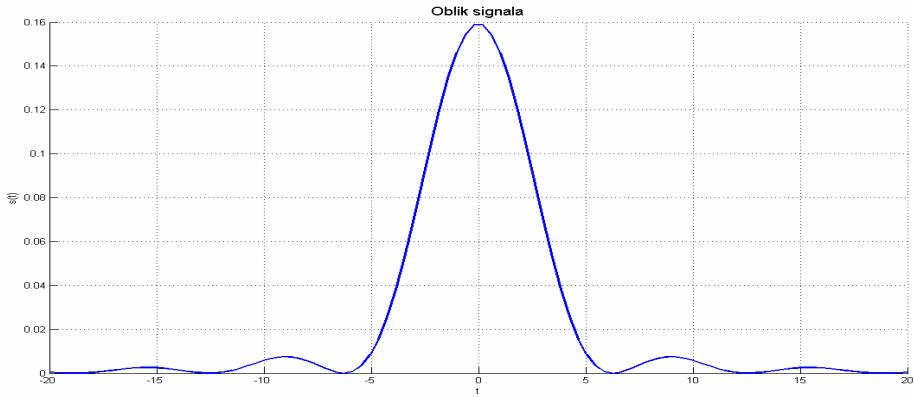
Signal nalazimo primenom inverzne Furierove transformacije, koja glasi

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^0 \frac{\omega_0 + \omega}{\omega_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

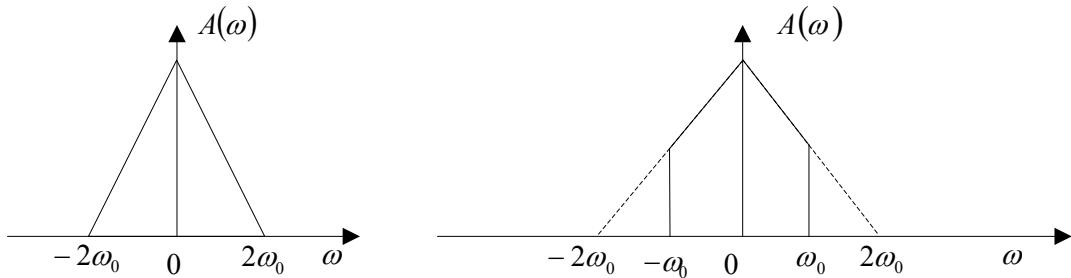
Ovaj oblik integrala smo već rešavali. Rešenje će biti

$$s(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)^2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)} \right]^2.$$

Oblik signala je prikazan na slici.



**Zadatak 2.2.9.** Skratimo spektar prikazanog na slici. Prikažimo oblik signala originalnog i krnjeg spektra.



Matematički opis spektra oblika signala je

1

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_0}(2\omega_0 - |\omega|), & |\omega| \leq 2\omega_0 \\ 0; & |\omega| \geq 2\omega_0. \end{cases}$$

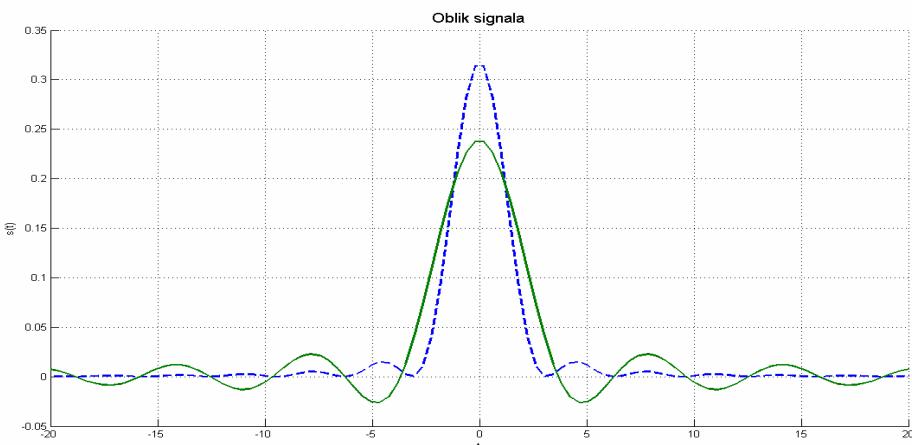
$$s(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin(\omega_0 t)}{(\omega_0 t)} \right]^2.$$

Za okrnjeni spektar i njegov signal se dobija

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_0}(2\omega_0 - |\omega|), & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0; & |\omega| \geq \omega_0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^0 \frac{2\omega_0 + \omega}{2\omega_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\omega_0} \frac{2\omega_0 - \omega}{2\omega_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_0 t)}{(\omega_0 t)} + \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)} \right]^2. \end{aligned}$$

Oblici signala su prikazani na slici.



**Zadatak 2.2.10.** Odrediti i nacrtati spektar signala

$$s(t) = \delta(t+T) + \delta(t-T)$$

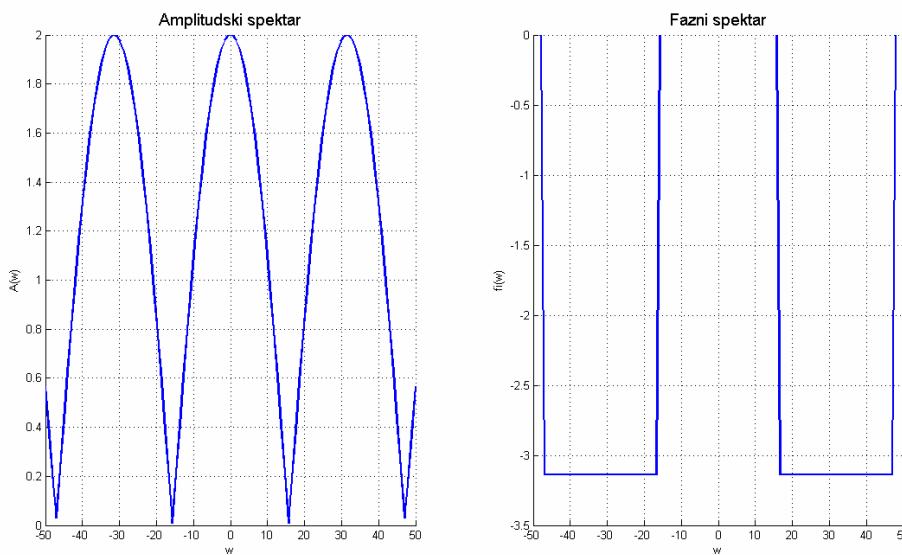
Primenom Furierove transformacije dobiamo sledeći izraz

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+T) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} = 2 \cos(\omega T).$$

Kompleksni spektar signala je čisto realna funkcija. Amplitudski i fazni spektar signala je

$$A(\omega) = 2 \cdot |\cos(\omega T)|; \quad \varphi(\omega) = -\pi \cdot \text{sign}(\cos(\omega T)).$$

Oblik spktara su prikazani na slici.



**Zadatak 2.2.11.** Odrediti i nacrtati spektar signala

$$s(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Analogno prethodnom zadatku, rimenom Furierove transformacije dobiamo sledeći izraz

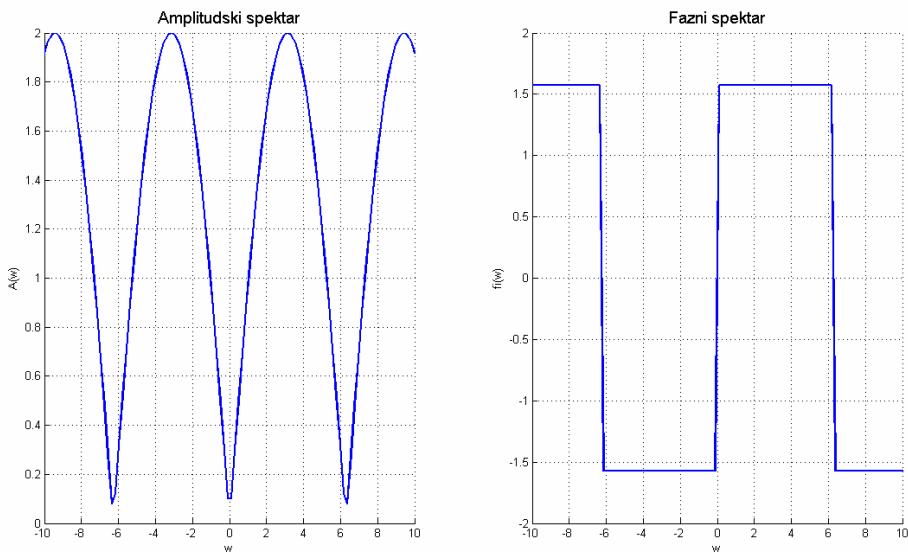
$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} = 2j \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right).$$

Kompleksni spektar signala je čisto imaginarna funkcija. Amplitudski i fazni spektar signala je

$$A(\omega) = 2 \cdot \left| \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) \right|;$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \text{sign}\left(\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)\right).$$

Oblici pojedinih spektara su prikazana na slici



**Zadatak 2.2.12.** Odrediti i nacrtati spektar signala dat izrazom

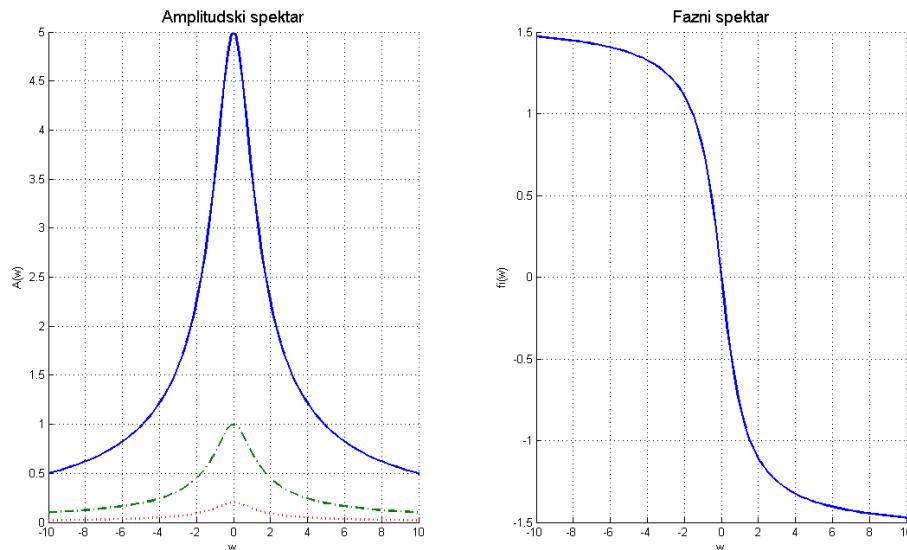
$$s(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ A \cdot e^{-at}; & t \geq 0; A, a > 0 \end{cases}$$

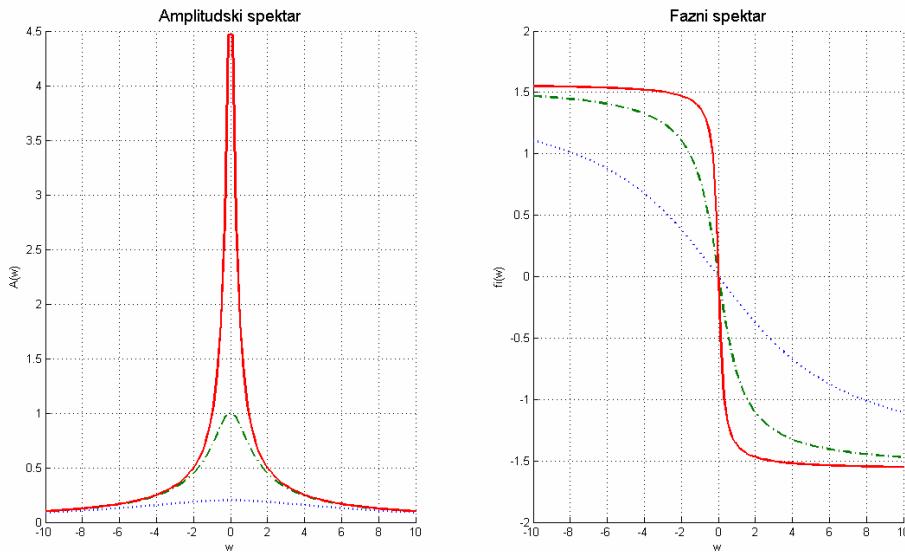
Primenimo Furierovu transformaciju za nalaženje kompleksnog spektra signala.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{A}{a + j\omega}.$$

Amplitudski i fazni spektar je jednako

$$A(\omega) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$





**Zadatak 2.2.13.** Odrediti i prikazati spektar signala dat jednačinom

$$s(t) = A \cdot e^{-a|t|}; \forall t.$$

Kompleksni spektar je jednak

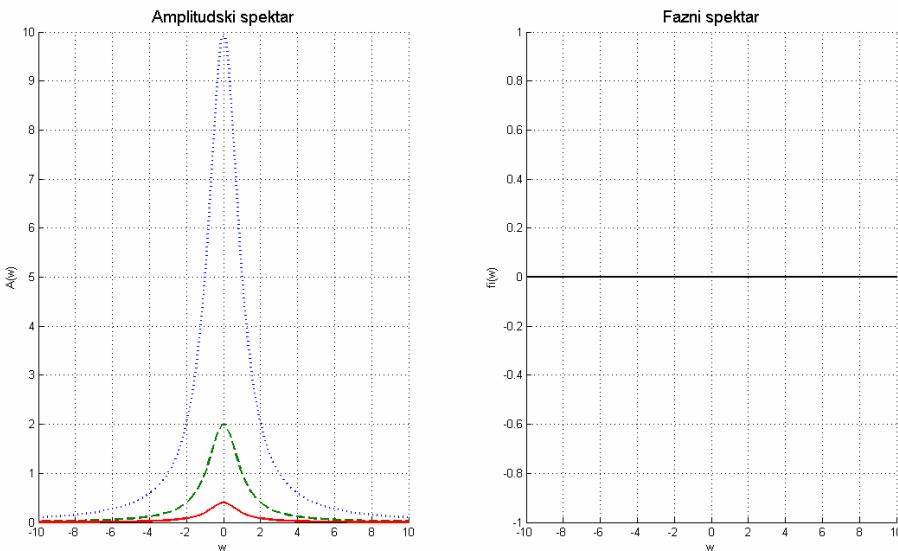
$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 A \cdot e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

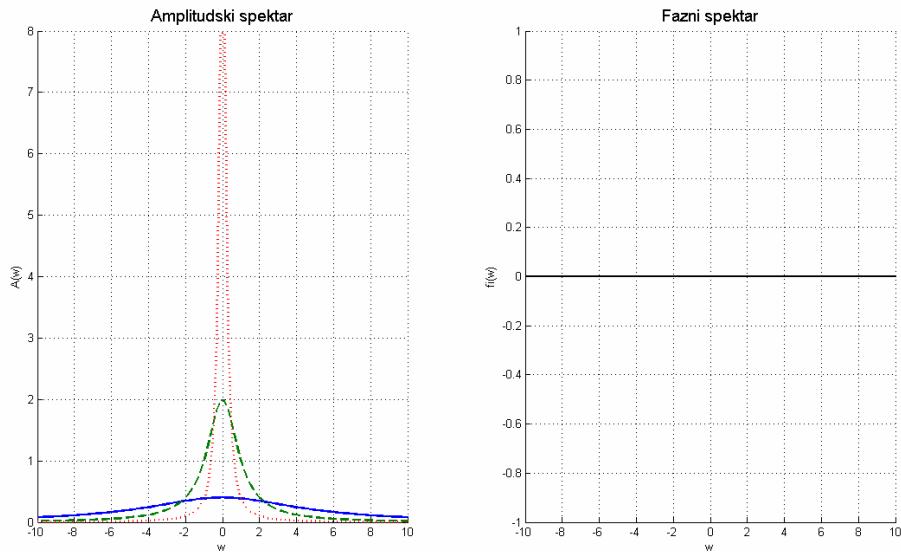
Amplitudski i fazni spektar je

$$A(\omega) = A \frac{2a}{a^2 + \omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = 0.$$

Spektri su prikazani na slici.





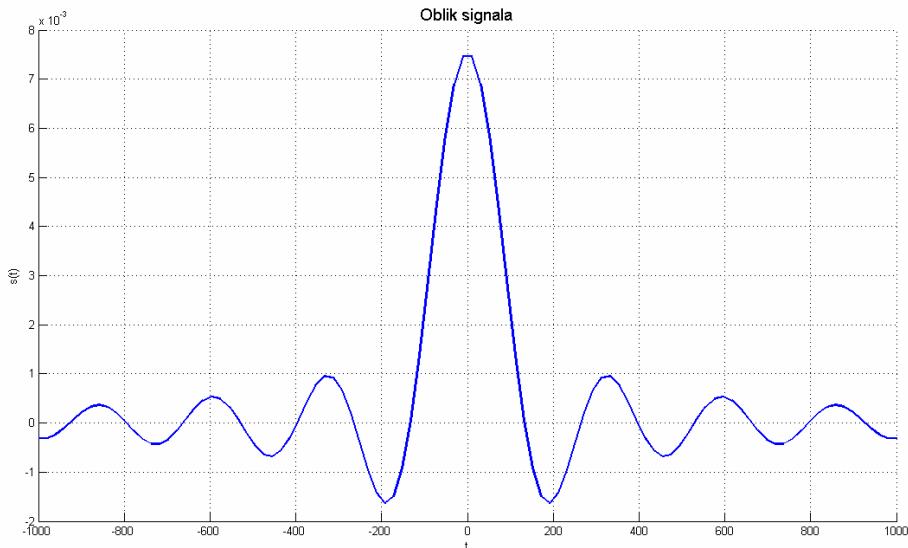
**Zadatak 2.2.14.** Odrediti i nacrtati oblik signala koji raspolaže spektrom dat izrazom

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{|\omega|}{\omega_0}; & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0; & |\omega| > \omega_0. \end{cases}$$

Izraz koji opisuje signal, će biti

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^0 \frac{\omega}{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)}{\frac{\omega_0}{2} t} \right]^2. \end{aligned}$$

Oblik signala je pikazan na slici.



### 2.3. Energetski spektar i spektralna širina signala

Energetski spektar signala pokazuje raspodelu raspoložive ukupne energije signala po svojim komponentama. Ona predstavlja kvadrat amplitudskog spektra tj.

$$E(\omega) = A(\omega) = |S(j\omega)|^2.$$

Na osnovu energetskog spektra signala se može odrediti ona širina spektra signala, koja definiše širinu opsega učestanosti onog dela spektra u kome se nalaze značajne komponente signala. Šta su značajne komponente signala zavisi od slučaja do slučaja kao i od oblika energetskog spektra signala. Kriteriumi po kome se određuju mogu biti:

- opseg u kome se nalazi 90% ukupne energije signala,
- apsolutna širina – opseg izvan koje je energetski spektar jednak nuli,
- širina opsega u okolini maksimalne vrednosti energetskog spektra, sa graničnim tačkama u kojima je energetski spektar prvi put jednak nuli (first lobe),
- širina opsega u okolini maksimalne vrednosti energetskog spektra, sa graničnim tačkama u kojima energetski spektar opadne na polovinu svoje maksimalne vrednosti,
- širina opsega ekvivalentnog pravougaonik sa visinom jednakom maksimalne vrednosti energetskog spektra i površinom jednakom ukupnoj energiji signala
- širina opsega izvan kojeg vrednost energetskog spektra ne nadmašuje unapred definisanu vrednost ili nivo.

Naravno osim navedenih kriterijuma može da se definišu kriterijumi i po nekim drugim principima.

**Zadatak 2.3.1.** Izvesti izraz Parsevalove teoreme za slučaj aperiodičnih signala.

Ukupna energija signala je

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Uvrstimo inverznu transformaciju na mesto signala

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^2 dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} S(j\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega+\Omega)t} dt \cdot d\Omega \cdot d\omega.$$

Integral po vremenu je jednako

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega+\Omega)t} dt = 2\pi \cdot \delta(\omega + \Omega).$$

Primenom osobina delta impulsa, dobijamo

$$2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j\Omega) \cdot \delta(\omega + \Omega) \cdot d\Omega = 2\pi \cdot S(-j\omega) = 2\pi \cdot S^*(j\omega),$$

gde zvezdica označava konjugovanu kompleksnu operaciju.

Za ukupnu energiju dobijamo

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot S^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega.$$

Dobijeni rezultat pokazuje da se ukupna energija može izračunati kao u vremenskom tako i u spektralnom domenu. Bez obzira koji račun primenili uvek se dobija ista vrednost. Parsevalova teorema u formalnom obliku glasi

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega.$$

**Zadatak 2.3.2.** Odrediti energiju signala  $s(t) = \begin{cases} 0; t < 0 \\ e^{-5t}; t \geq 0 \end{cases}$  u frekvenčijskom opsegu  $f \in (500Hz, 3600Hz)$ .

Spektar je dat putem Furierove transformacije.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-5t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(5+j\omega)t} dt = \frac{1}{5+j\omega} = \frac{e^{-j\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{5}\right)}}{\sqrt{25+\omega^2}}.$$

Amplitudski i fazni spektar su

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{25+\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{5}\right).$$

Energetski spektar signala u zavisnosti od kružne učestanosti je funkcija

$$E(\omega) = A^2(\omega) = \frac{1}{25+\omega^2}.$$

Ona pokazuje energetski sadržaj pojedinih harmonika u analiziranom signalu. Energija sadržana u frekvenčijskom opsegu je  $f \in (500Hz, 3600Hz)$  je

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3600}^{-\pi/500} \frac{d\omega}{25+\omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/500}^{\pi/3600} \frac{d\omega}{25+\omega^2}.$$

Kako je spektar parna funkcija dobija se

$$E = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/500}^{\pi/3600} \frac{d\omega}{25+\omega^2} = \frac{1}{25\pi} \int_{\pi/500}^{\pi/3600} \frac{d\omega}{1+\left(\frac{\omega}{5}\right)^2} = \frac{1}{5\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{5}\right) \Big|_{\pi/500}^{\pi/3600}.$$

Uvrštavanjem granica dobijamo

$$E = \frac{1}{5\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi/3600}{5}\right) - \frac{1}{5\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi/500}{5}\right) = 8.72 \cdot 10^{-5}.$$

Ukupna energija signala je

$$E_{s(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-10t} dt = 0.1.$$

Procentualni udeo energije u proračunatom opsegu, u odsnu na ukupnu energiju je tada

$$\frac{E}{E_{s(t)}} = \frac{8.72 \cdot 10^{-5}}{0.1} \cdot 100\% = 0.0872\%.$$

**Zadatak 2.3.3.** Odrediti širinu spektra značajnih komponenata signala iz prethodnog primera, po svim mogućim kriterijumima.

Kriterijum polovine maksimalne vrednosti.

Maksimalna vrednost energetskog spektra iznosi  $0.04$ . Tačka u kome energetski spektar opadne ispod polovine ove maksimalne vrednosti je

$$\frac{1}{25 + \omega^2} \leq 0.02 \Rightarrow \omega_c = \pm 5$$

Širina spektra je jednaka  $BW = 10$ .

Po kriterijum ekvivalentnog pravougaonika granična kružna učestanost i širina spektra je jednaka  $\omega_c = 2.5\pi$ ,  $BW = 5\pi$ .

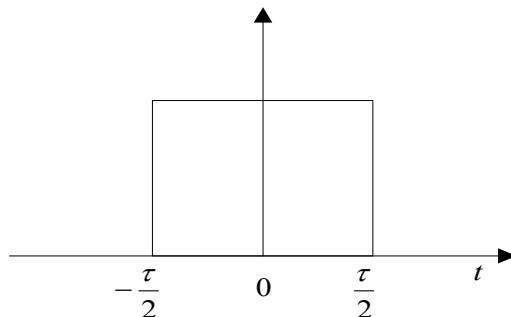
Kriterijum 90% ukupne energije.

$$\frac{2}{2\pi} \int_0^{\omega_c} E(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{1}{25 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{5\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09.$$

Iz ove jednačine dobijamo

$$\omega_c = 5 \cdot \operatorname{tg}(0.45 \cdot \pi) = 31.568; \quad BW = 63.136.$$

**Zadatak 2.3.4.** Odrediti širinu značajnih komponenata signala prikazanog na slici, za slučaj  $\tau = 4$ .

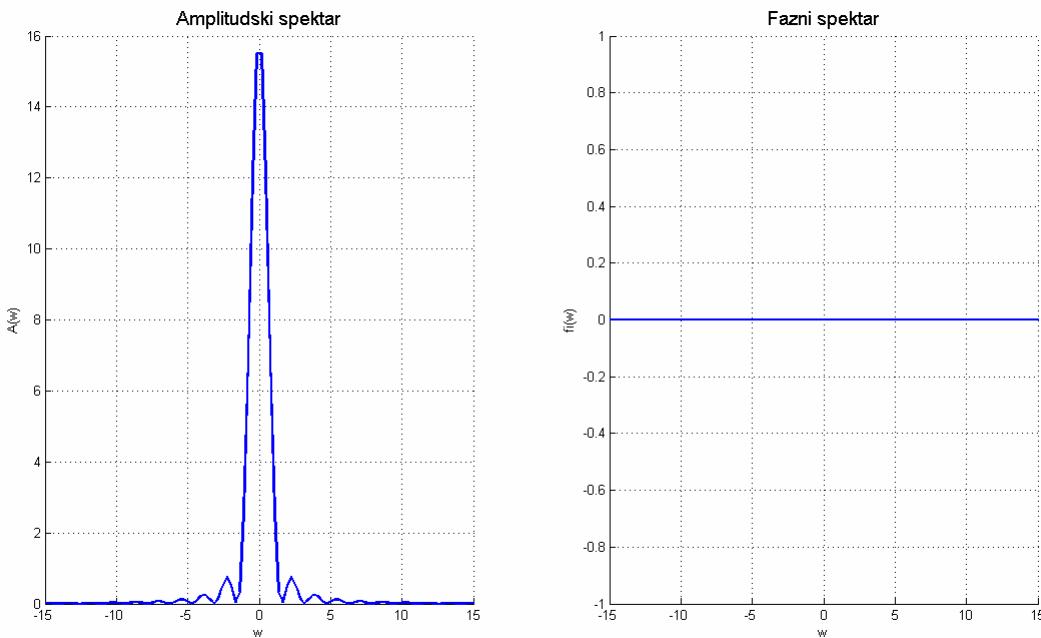


Amplitidski i energetski spektar signala je

$$A(\omega) = 4 \cdot \left| \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} \right|,$$

$$E(\omega) = A^2(\omega) = 16 \cdot \left[ \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} \right]^2.$$

Energetski spektar je prikazan na slici



Odredimo širinu spektra značajnih komponenata po kriterijumu ekvivalentnog pravougaonika. Visina pravougaonika je maksimalna vrednost energetskog spektra. Širinu ekvivalentnog pravougaonika određujemo tako, da površina ispod nje bude jednaka ukupnoj energiji signala, tj.

$$\frac{2}{2\pi} \int_0^{\omega_c} E_{\max} d\omega = \frac{1}{\pi} E_{\max} \cdot \omega_c = \frac{16}{\pi} \cdot \omega_c \equiv 4 = E = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (1)^2 dt.$$

Iz jednačine  $\frac{16}{\pi} \cdot \omega_c = 4$  sledi da je granična učestanost  $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ , tj. širina spektra koja obuhvata značajne komponente iznosi  $BW = \frac{\pi}{2}$ .

Po kriterijumu prve nule (first lobe), graničnu kružnu učestanost dobijamo u tački u kome energetski spektar prvi put preseca osu kružne učestanosti tj.  $E(\omega = \omega_c) = 0$ . U našem primeru

$$E(\omega = \omega_c) = 16 \cdot \left[ \frac{\sin(2\omega_c)}{2\omega_c} \right]^2 = 0 \Rightarrow \sin(2\omega_c) = 0 \Rightarrow 2\omega_c = \pi \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2}.$$

Širina spektra signala u ovom slučaju je  $BW = \pi$ .

## 2.4. Konvolucija i međukorelacija aperiodičnih signala.

Konvolucija i korelacija su matematičke operacije koje se izvode nad signalima.

Konvolucija je definisana izrazom

$$k_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = s_1(t) * s_2(t) = s_2(t) * s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) s_1(t - \tau) d\tau .$$

Među korelacijama je određene integralom

$$k_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(\tau + t) d\tau = s_1(t) * s_2(t) \neq s_2(t) * s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) s_1(\tau + t) d\tau .$$

Zapazimo da je u slučaju međukorelacija bitan redosled podintegralnih funkcija. Specijalan slučaj korelacije predstavlja autokorelaciona funkcija

$$k_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(\tau + t) d\tau ,$$

koja za u tački  $t = 0$

$$k_r(t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(\tau) d\tau = E$$

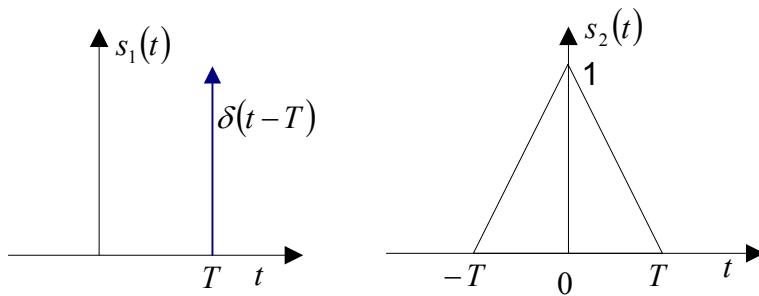
daje ukupnu energiju aperiodičnog signala.

**Zadatak 2.4.1.** Odrediti konvoluciju signala  $s_1(t) = \delta(t)$  i  $s_2(t) = \delta(t - T)$ .

Primenjujući osobine delta impulsa, dobija se sledeće rešenje.

$$k_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \delta(t - \tau - T) d\tau = \delta(t - T) = s_2(t) .$$

**Zadatak 2.4.2.** Odrediti konvoluciju prikazanih signala.



Na osnovu osobina delta impulsa dobija se

$$k_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - T) s_2(t - \tau) d\tau = s_2(t - T) .$$

Rezultat konvolucije je signal  $k_v(t) = s_2(t - T)$  što predstavlja pomerni signal udesno za vreme  $T$ .

**Zadatak 2.4.3.** Odrediti autokonvoluciju pravougaonog impulsa smešten u tačku  $t = 0$  širine  $2T$

Izraz za proračun konvolucije za ovaj primer će biti

$$k_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(t-\tau)d\tau .$$

Obratimo pažnju na sledeće detalje:

- Konvolucionna funkcija je zavisna od promenljive  $t$ . Kako  $t$  označava vreme, to znači da je konvolucionna funkcija signal.
- Promenljiva  $t$  u toku operacije integriranja predstavlja parametar jer se operacija integriranja vrši po promenljivoj  $\tau$ . Nakon što se izračuna integral rešenje će biti zavisna od promenljive  $t$ .
- Podintegralnu funkciju čine proizvod dva signala. Jedna od njih se dobija formalnom smenom  $t \equiv \tau$  koja ne menja osobine signala (visinu i širinu pravougaonog signala). Druga je signal koji se dobija na sledeći način. Prvo se nađe lik u ogledalu osnovnog signala u odnosu na tačku  $t = 0$ . To se izražava formalnom smenom  $t \equiv -\tau$ . Time se dobija signal  $s(-\tau)$ . Nakon toga se signal pomeri krajnje ulevo, tj. formalno se dobija izraz  $s(t-\tau)$ .
- Kako vreme  $t$  „prolazi“, to se lik u ogledalu pomera od krajnje levog ka krajnje desnog položaju.
- Rezultat integrala će biti različito od nule za one položaje lika u ogledalu, za koje se dobija preklapanje dva signala. Za one tačke, u kojima nema preklapanja signala, podintegralna funkcija, pa time i rezultat, će biti jednaka nuli.
- Rezultat integrala će biti srazmerna površini ispod funkcije koju daju proizvod spomenutih signala.

Odredimo prvo intervale u kojima je konvolucioni signal jednak nuli. To su intervali koji obuhvataju takve tačke položaja lika u ogledalu, u kojima ona nema intervala preklapanja sa osnovnim signalom na  $\tau$  osi. Kada je lik u krajnje levom položaju, formalni oblik navedenog uslova je

$$t + T < -T \quad \Rightarrow \quad t < -2T .$$

U slučaju krajnje desnog položaja se dobija

$$T < t - T \quad \Rightarrow \quad t > 2T .$$

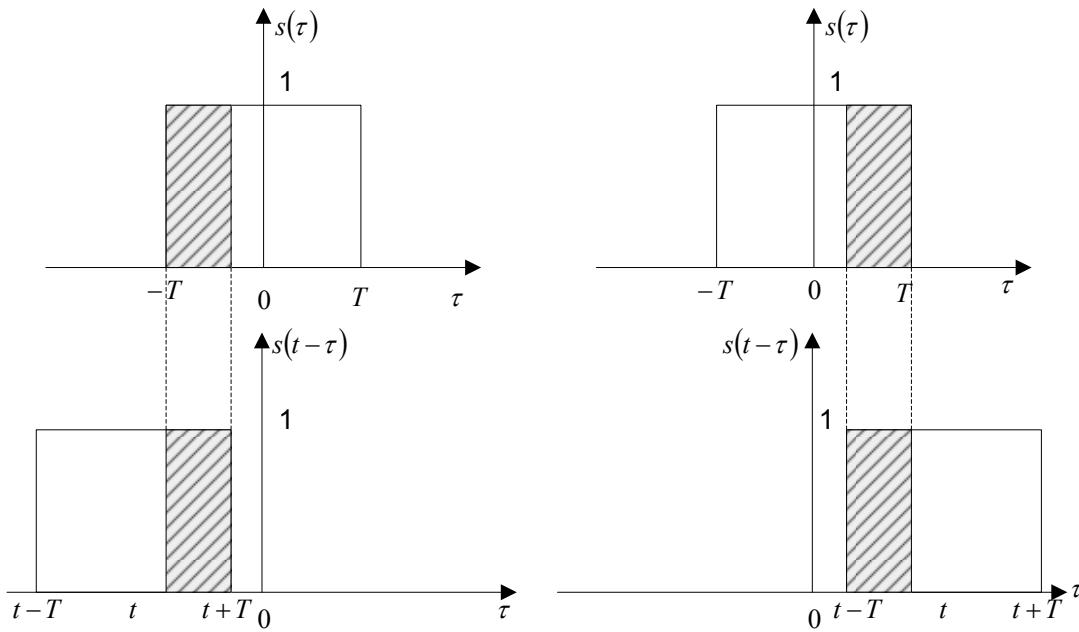
Delimičan rezultat konvolucionog signala je tada

$$k_v(t) = \begin{cases} 0; & t \leq -2T \\ ?; & -2T \leq t \leq 2T \\ 0; & 2T \leq t . \end{cases}$$

Interval  $-2T \leq t \leq 2T$  obuhvata takve tačke, u kojima nastalje preklapanje signala. U intervalu od  $-2T \leq t \leq 0$  lik u ogledalu postepeno uklizava pod osnovni signal stvarajući delimično preklapanje koje je prikazano na levom delu slike ..... Osenčeni deo pokazuje interval preklapanja i rezultat koji je srazmerna osenčenoj površini. Formalno se dobija

$$k_v(t) = \int_{-T}^{t+T} (1)d\tau = t + T - (-T) = 2T + t .$$

Kako vreme „prolazi“, lik u ogledalu proklizava po  $\tau$  osi stvarajući sve veći interval i površinu preklapanja. Ova površina raste do tačke  $t = 0$ , u kome nastaje potpuno preklapanje sa maksimalnom vrednošću konvolucionog signala  $k_v(t = 0) = 2T$ .

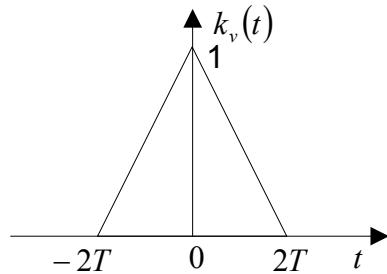


Nakon vremena  $t = 0$  ponovo nastaje delimično preklapanje jer lik u ogledalu postepeno izklizava ispod osnovnog signala. Površina opada kao i rezultat konvolucionog signala.

$$k_v(t) = \int_{t-T}^T (1)d\tau = T - (t - T) = 2T - t.$$

Rešenje autokonvolucije glasi

$$k_v(t) = \begin{cases} 0; & t \leq -2T \\ 2T + t; & -2T \leq t \leq 0 \\ 2T - t; & 0 \leq t \leq 2T \\ 0; & 2T \leq t. \end{cases}$$



**Zadatak 2.4.4.** Odrediti Furierovu transformaciju signala dobijenog konvolucijom proizvoljnih signala  $s_1(t)$  i  $s_2(t)$ .

Izrazimo signale pomoću svojih spektara.

$$s_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} S_1(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega,$$

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} S_2(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega.$$

Primenimo sada Fourierovu transformaciju nad konvolucionim integralom.

$$K_v(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) \cdot d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt .$$

Zamenimo redosled integriranja.

$$K_v(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \cdot d\tau .$$

Unutrašnji integral predstavlja spektar pomerenog signala

$$K_v(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot S_2(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = S_2(j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = S_1(j\omega) \cdot S_2(j\omega) .$$

Kao što se vidi, spektar konvolucije predstavlja proizvod spektara signala čije smo konvoluciju računali.

**Zadatak 2.4.5.** Odrediti Fourierovu transformaciju signala dobijenog međukorelacijom proizvoljnih signala  $s_1(t)$  i  $s_2(t)$ .

Analizu ćemo sprovesti za slučaj

$$k_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(\tau + t) d\tau .$$

Fourierova transformacija je jednaka

$$K_r(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_r(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(\tau + t) \cdot d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt .$$

Zamenimo redosled integriranja.

$$K_r(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau + t) \cdot e^{-j\omega t} dt \cdot d\tau = S_2(j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot e^{j\omega\tau} d\tau .$$

Kako je signal realna funkcija, to važi sledeće

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot e^{j\omega\tau} d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \right]^* = S_1^*(j\omega) .$$

Odatle se onda lako dolazi do spektra međukorelaceione funkcije

$$K_r(j\omega) = S_1^*(j\omega) \cdot S_2(j\omega) .$$

**Zadatak 2.4.6.** Odrediti Furierovu transformaciju autokorelacione funkcije proizvoljnog signala  $s(t)$ .

Koristeći rezultate prethodnih preimera, lako se dolazi do rešenja ako se uzme  $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ .

$$K_r(j\omega) = S(j\omega) \cdot S^*(j\omega) = |S(j\omega)|^2 = A^2(\omega) = E(\omega).$$

Furijeva transformacija autokorelacione funkcije je jednaka energetskom spektru signala.

**Zadatak 2.4.7.** Odrediti konvoluciju i korelaciju sledećih signala.

$$s_1(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 3 \cdot e^{-t}; & t \geq 0, \end{cases} \quad s_2(t) = 1.5 + \cos(\omega_0 t) - 0.75 \sin(2\omega_0 t) - 0.15 \cos(4\omega_0 t).$$

Odredimo najpre spektar pojedinih signala.

$$S_1(j\omega) = \frac{3}{1+j\omega} = \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\text{arctg}(\omega)},$$

$$S_2(j\omega) = 3\pi\delta(\omega) + \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) - 0.75\pi \left( \delta(\omega - 2\omega_0)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(\omega + 2\omega_0)e^{j\frac{\pi}{2}} \right) - 0.15\pi(\delta(\omega - 4\omega_0) + \delta(\omega + 4\omega_0)).$$

Spektar konvolucionog signala je

$$K_v(j\omega) = S_1(j\omega) \cdot S_2(j\omega).$$

Inverznom Furierovom transformacijom dobijamo oblik signala.

$$k_v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_v(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) \cdot S_2(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Uvrštavanjem spektara u izraz, dobijamo

$$\begin{aligned} k_v(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\text{arctg}(\omega)} \cdot 3\pi\delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\text{arctg}(\omega)} \cdot \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\text{arctg}(\omega)} \cdot 0.75\pi \left( \delta(\omega - 2\omega_0)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(\omega + 2\omega_0)e^{j\frac{\pi}{2}} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\text{arctg}(\omega)} \cdot 0.15\pi(\delta(\omega - 4\omega_0) + \delta(\omega + 4\omega_0)) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

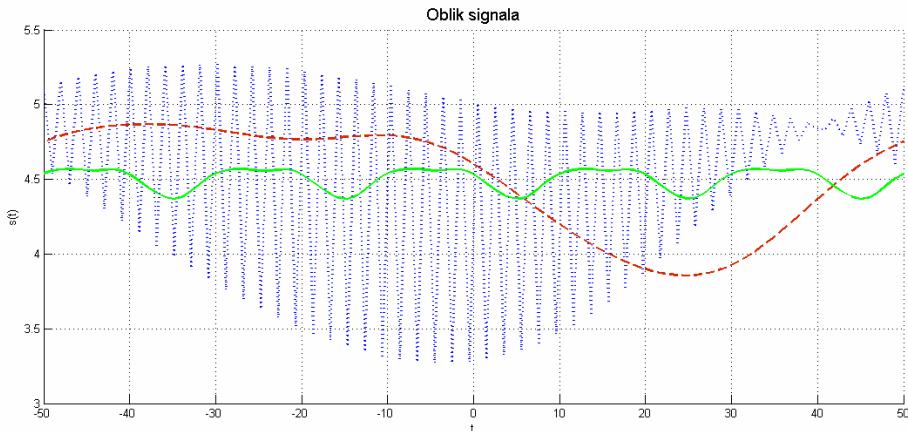
Primenjujući osobinu delta impulsa, nalazimo da je gornja jednačina jednaka

$$\begin{aligned} k_v(t) = & \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \cdot \left( e^{j(\omega_0 t - \arctg(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t - \arctg(\omega_0))} \right) - \\ & - \frac{2.25}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(2\omega_0^2)}} \cdot \left( e^{j(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctg(2\omega_0))} + e^{-j(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctg(2\omega_0))} \right) - \\ & - \frac{0.45}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(4\omega_0^2)}} \cdot \left( e^{j(4\omega_0 t - \arctg(4\omega_0))} + e^{-j(4\omega_0 t - \arctg(4\omega_0))} \right) \end{aligned}$$

Primenimo sada Ojlerov obrazac.

$$\begin{aligned} k_v(t) = & \frac{9}{2} + \frac{3}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t - \arctg(\omega_0)) - \frac{2.25}{\sqrt{1+(2\omega_0^2)}} \cdot \sin(2\omega_0 t - \arctg(2\omega_0)) - \\ & - \frac{0.45}{\sqrt{1+(4\omega_0^2)}} \cdot \cos(4\omega_0 t - \arctg(4\omega_0)) \end{aligned}$$

Kao što se vidi, dobili smo periodičan signal sa rednim brojem komponenata kao i signal  $s_2(t)$ . Jedino su se promenile amplitude i faze pojedinih komponenata. Zavisno od vrednosti dužine periode  $T_0$ , dobijaju se oblici signala prikazanog na slici.



Odredimo međukorelaciju oblika

$$k_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(\tau + t) d\tau.$$

Spektar međukorelacijske će biti

$$K_r(j\omega) = S_1^*(j\omega) \cdot S_2(j\omega).$$

Inverzna Fourierova transformacija će biti

$$k_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(j\omega) \cdot S_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Nakon uvrštavanja, dobijamo

$$\begin{aligned}
 k_r(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{j\arctg(\omega)} \cdot 3\pi\delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{j\arctg(\omega)} \cdot \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{j\arctg(\omega)} \cdot 0.75\pi \left( \delta(\omega - 2\omega_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(\omega + 2\omega_0) e^{j\frac{\pi}{2}} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{j\arctg(\omega)} \cdot 0.15\pi (\delta(\omega - 4\omega_0) + \delta(\omega + 4\omega_0)) \cdot e^{j\omega t} d\omega.
 \end{aligned}$$

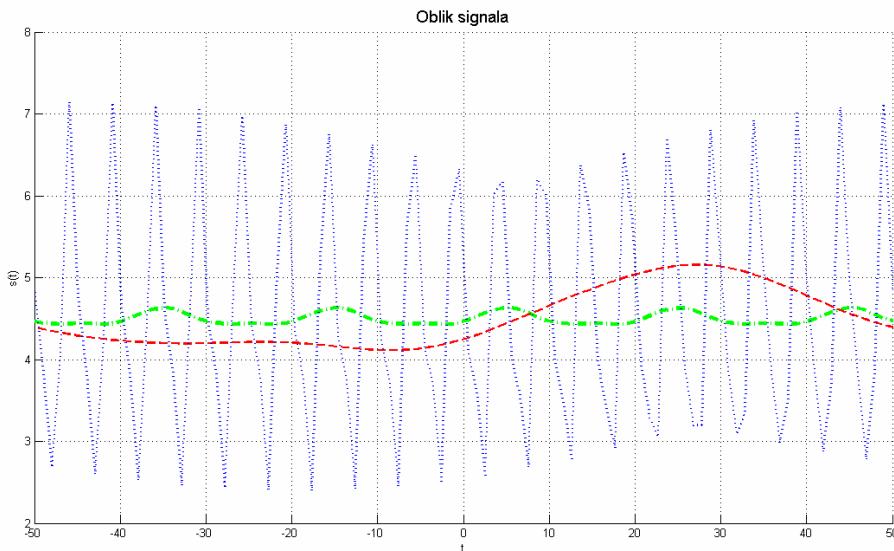
Primenjujući osobinu delta impulsa, nalazimo da je gornja jednačina jednaka

$$\begin{aligned}
 k_r(t) = & \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \cdot \left( e^{j(\omega_0 t + \arctg(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t + \arctg(\omega_0))} \right) - \\
 & - \frac{2.25}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(2\omega_0^2)}} \cdot \left( e^{j(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \arctg(2\omega_0))} + e^{-j(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \arctg(2\omega_0))} \right) - \\
 & - \frac{0.45}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(4\omega_0^2)}} \cdot \left( e^{j(4\omega_0 t + \arctg(4\omega_0))} + e^{-j(4\omega_0 t + \arctg(4\omega_0))} \right)
 \end{aligned}$$

Primenom Ojlerovog obrazca gornji izraz se pretvara u

$$\begin{aligned}
 k_r(t) = & \frac{9}{2} + \frac{3}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t + \arctg(\omega_0)) - \frac{2.25}{\sqrt{1+(2\omega_0^2)}} \cdot \sin(2\omega_0 t + \arctg(2\omega_0)) - \\
 & - \frac{0.45}{\sqrt{1+(4\omega_0^2)}} \cdot \cos(4\omega_0 t + \arctg(4\omega_0))
 \end{aligned}$$

Oblik dobijene funkcije je prikazano na slici



Nadimo sada međukorelaciju u obliku

$$k_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) s_1(\tau + t) d\tau.$$

Spektar međukorelacije će biti

$$K_r(j\omega) = S_2^*(j\omega) \cdot S_1(j\omega).$$

Inverzna Furierova transformacija će biti

$$k_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2^*(j\omega) \cdot S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Nakon uvrštavanja, dobijamo

$$\begin{aligned} k_r(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctg(\omega)} \cdot 3\pi\delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctg(\omega)} \cdot \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctg(\omega)} \cdot 0.75\pi \left( \delta(\omega - 2\omega_0) e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(\omega + 2\omega_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctg(\omega)} \cdot 0.15\pi (\delta(\omega - 4\omega_0) + \delta(\omega + 4\omega_0)) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

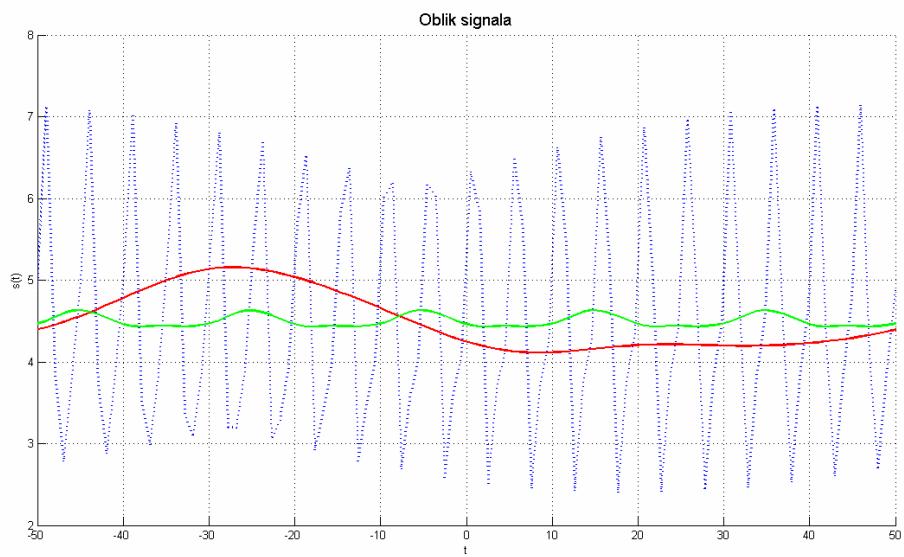
Primenjujući osobinu delta impulsa, nalazimo da je gornja jednačina jednaka

$$\begin{aligned} k_r(t) = & \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \cdot (e^{j(\omega_0 t - \arctg(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t - \arctg(\omega_0))}) - \\ & - \frac{2.25}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(2\omega_0^2)}} \cdot \left( e^{j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \arctg(2\omega_0))} + e^{-j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \arctg(2\omega_0))} \right) - \\ & - \frac{0.45}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(4\omega_0^2)}} \cdot (e^{j(4\omega_0 t - \arctg(4\omega_0))} + e^{-j(4\omega_0 t - \arctg(4\omega_0))}) \end{aligned}$$

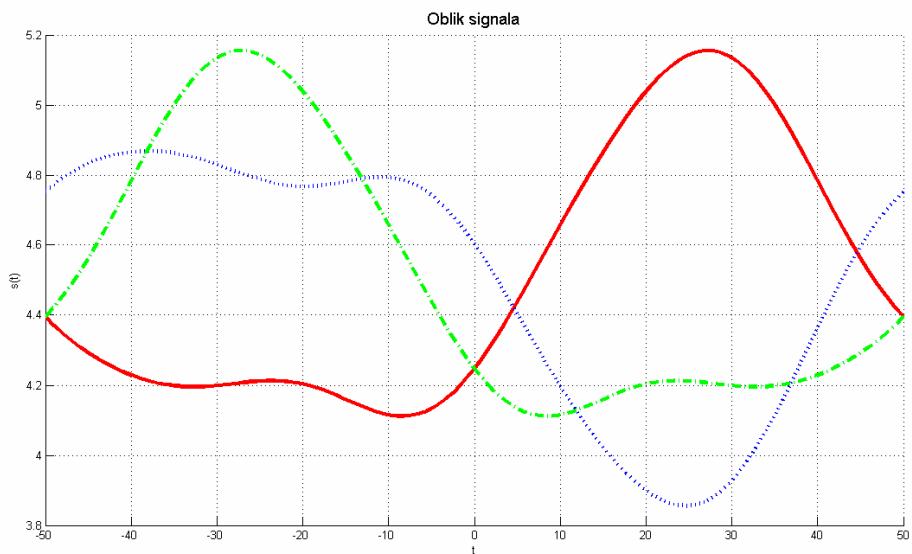
Primenom Ojlerovog obrazca gornji izraz se pretvara u

$$\begin{aligned} k_r(t) = & \frac{9}{2} + \frac{3}{\sqrt{1+\omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t - \arctg(\omega_0)) + \frac{2.25}{\sqrt{1+(2\omega_0^2)}} \cdot \sin(2\omega_0 t + \arctg(2\omega_0)) - \\ & - \frac{0.45}{\sqrt{1+(4\omega_0^2)}} \cdot \cos(4\omega_0 t - \arctg(4\omega_0)) \end{aligned}$$

Oblik dobijene funkcije je prikazano na slici



Oblici signala koji se dobijaju po matematičkim operacijama koje smo sproveli u ovom zadatku su prikazani na slici



### 3. Diskretni signali i sistemi

Fizičke veličine koje zavise od vremena nazivamo **signalima**. Po svojoj prirodi signale delimo u dve kalse:

#### 1. Deterministički signali

Deterministički signal je signal čija je vremenska zavisnost poznata, tako da se njene vrednosti mogu odrediti u bilo kom trenutku.

#### 2. Slučajni signali.

Slučajni signal je signal čija vremenska zavisnost nije poznata. Buduće vrednosti signala se nemogu odrediti ali ako je signal poznat u prošlosti tada se njena buduća vrednost može proceniti sa nekom verovatnoćom.

Signali čija je vremenska zavisnost kontinualna nazivaju se **kontinualnim signalima**. **Analogni signali** su vremenski kontinualni signali čija amplituda može biti bilo koja vrednost iz nekog dozvoljenog opsega.

**Vremenski diskretni signali** su signali koje su definisane samo u diskretnim vremenskim trenucima. Važno je uočiti da iz gornje definicije ne sledi da su vrednosti diskretnog signala jednake nuli u onim tačkama koje ne pripadaju skupu gore datih trenutaka. U tim trenucima vrednost signala nije poznata a i nije od značaja. Sa aspekta diskretne obrade signala potpuno je nevažno koje vrednosti signala imaju u tim trenucima.

**Digitalni signal** je diskretni signal čija je amplituda takođe diskretizovana.

Elementarni diskretni signali koje se često koriste u diskretnoj obradi signala su:

**Jedinični diskretni impuls:**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases}$$

**Jedinični diskretni odskočni signal:**

$$u[n] = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

**Linearni diskretni signal:**

$$r[n] = \begin{cases} a \cdot n; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}; a = \text{const.}$$

**Eksponencijalni diskretni signal:**

$$e[n] = \begin{cases} A \cdot a^n; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}; A = \text{const.}, a = \text{const.}$$

Diskretni sistemi vrše transformaciju diskretnog ulaznog signala  $x[n]$  u diskretni izlazni signal  $y[n]$ . Transformacija se u matematičkom obliku iskazuje

$$y[n] = S\{x[n]\},$$

gde je  $S\{\bullet\}$  operator koji preslikava  $x[n]$  u  $y[n]$ .

Sistemi se u opštem slučaju dele na **linearne i nelinearne sisteme**.

Linearni sistemi zadovoljavaju osobinu linearnosti tj.

$$\begin{aligned} y[n] &= S\{\alpha \cdot x_1[n] + \beta \cdot x_2[n]\} = S\{\alpha \cdot x_1[n]\} + S\{\beta \cdot x_2[n]\} = \\ &= \alpha \cdot S\{x_1[n]\} + \beta \cdot S\{x_2[n]\} = \alpha \cdot y_1[n] + \beta \cdot y_2[n]. \end{aligned}$$

Osobina realizljivih linearnih sistema je da su **kauzalni i stabilni**.

Diskretni sistemi se mogu opisati

1. Relacijom ulaz-izlaz (**RUI**).  
RUI predstavlja diferencnu jednačinu koja definiše vezu između ulaznog i izlaznog diskretnog signala ( pobude i odziva ), i ona je oblika

$$y[n] + \sum_{l=1}^L \alpha_l \cdot y[n-l] = \sum_{m=1}^M \beta_m \cdot y[n-m]; \alpha_l, \beta_m \in C.$$

Zavisno od oblika RUI, diskrete sisteme delimo na:

- 1.1. Rekurzivne sisteme  $\alpha_l \neq 0, \beta_m \neq 0$ ,  
1.2. Nerekurzivne sisteme  $\alpha_l = 0, \beta_m \neq 0$ .
2. impulsnim odzivom diskretnog sistema  $h[n]$ .  
Impulsni odziv diskretnog sistema predstavlja odziv sistema na jediničnu impulsnu pobudu  $\delta[n]$ .

Zavisno od dužine impulsnog odziva sisteme delimo na:

- 2.1. sisteme sa beskonačnim impulsnim odzivom (**IIR** – infinit impuls respons),  
2.2. sisteme sa konačnim impulsnim odzivom (**FIR** – finit impuls respons).
3. prenosnom funkcijom  $H(z), H(e^{j\omega})$ .  
Prenosna funkcija u potpunosti definiše osobine diskretnog sistema u transformacionom domenu. Ona predstavlja transformaciju impulsnog odziva.

Odziv sistema na poznatu pobudu se određuje konvolucijom ulaznog signala (pobude) i impulsnog odziva sistema. U transformacionom domenu transformacija izlaza je jednaka proizvodu transformacije ulaznog (pobudnog) signala i impulsnog odziva (prenosna funkcija).

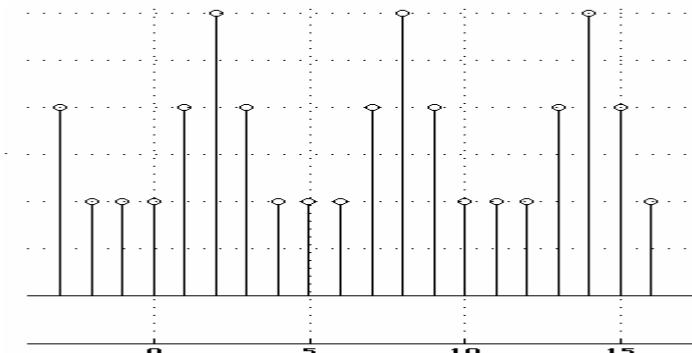
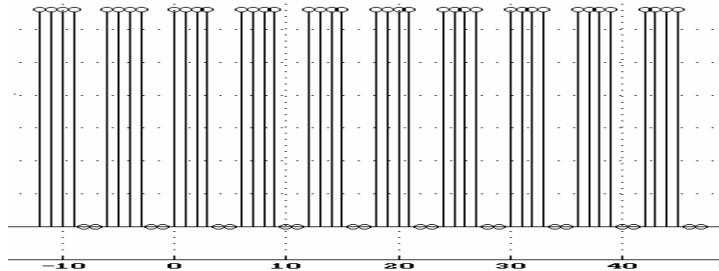
**Zadatak 3.1.** Odrediti periodu sledećih diskretnih signala.

a)  $s[n] = 1; \forall n$       b)  $s[n] = \cos\left(\frac{3}{4}n\right); -\infty < n < +\infty$       c)  $s[n] = \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right); n \geq 0$

d)  $s[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{3}{4}n\right) + 1.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right); n \leq 0$     e)  $s[n] = 7.8 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) + 8.3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right); \forall n$

f)  $s[n] = e^{j\frac{\pi}{3}n}; n \geq 11$     g)  $s[n] = e^{j2n}; \forall n$

h)



i)

a) Signal  $s[n]$  je prikazan na slici.



Sa slike se može uočiti da se vrednost signala ponavlja nakon svakog diskretnog trenutka, pa je perioda signala jednaka  $N = 1$ .

b) Po uslovu periodičnosti diskretnih signala  $s[n] = s[n + N]$ , mora da važi jednakost

$$\cos\left(\frac{3}{4}n\right) = \cos\left(\frac{3}{4}(n + N)\right) = \cos\left(\frac{3}{4}n + \frac{3}{4}N\right) \text{ za proizvoljno } n, N \in \mathbb{Z}.$$

Jednačina je zadovoljena ukoliko je  $\frac{3}{4}N = 2\pi k$  gde je  $k \in \mathbb{Z}$ , odnosno ako je  $N = \frac{8}{3}\pi k$ . Kako brojevi  $N$  i  $k$  pripadaju skupu celih brojeva sledi da se uslov ne može zadovoljiti ni za koje vrednosti  $N$  i  $k$ , pa stoga signal  $s[n]$  nije periodičan.<sup>+</sup>

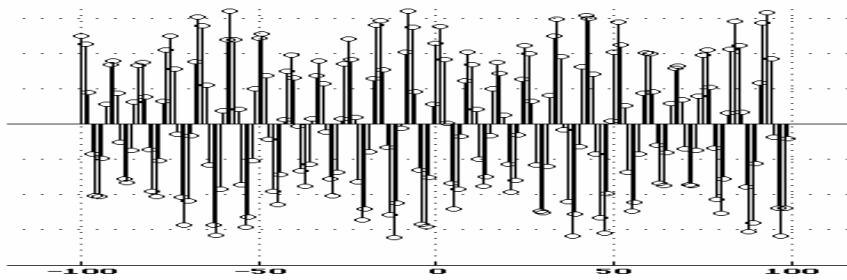
<sup>+</sup> Kada bi tačke signala povezali kontinualnom krivom tada bi se uočilo da tačka koja predstavlja kraj periodice kontinualne krive, se nalazi između dva odbirka diskretnog signala. Međutim kako ta tačka nije deo diskretne vremenske ose (vremensku osu čini skup celih brojeva) to sledi da signal nije periodičan.

c) Analogno predhodnom zadatku za uslov periodičnosti se dobija

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}(n+N)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}n + \frac{\pi}{5}N\right) \text{ za proizvoljno } n, N \in \mathbb{N}.$$

Jednačina se zadovoljava ako je  $\frac{\pi}{5}N = 2\pi k$ , odnosno ako je  $N = 10 \cdot k$  gde je  $k \in \mathbb{N}$ . Najmanji broj punih oscilacija signala  $s[n]$  se dobija za  $k=1$ , iz čega sledi da je perioda signala  $N=10$ .

d) U zadatku pod b) smo pokazali da diskretni signal čija učestanost nije deljivo sa  $\pi$  neposeduje osobinu periodičnosti, pa stoga ni zbirni signal  $s[n]$  nemože biti periodičan što se vidi i sa slike koja pokazuje segment signala u intervalu  $-100 \leq n \leq 100$ .



e) Posmatrajmo posebno periodičnost pojedinih članova signala  $s[n]$ .

Po uslovu periodičnosti za prvi član signala se dobija da je  $N_1 = 6 \cdot k_1$ , dok za drugi  $N_2 = 8 \cdot k_2$ . Perioda zbirnog signala je broj  $N = N_1 = N_2$  koji obuhvata minimalan broj punih oscilacija oba podsinala. Minimalan broj punih oscilacija se dobija ako su  $k_1 = 4$  i  $k_2 = 3$ . Sledi da je perioda signala  $s[n]$  jednako  $N = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 24$ .

f) Postavimo jednačinu za uslov periodičnosti diskretnih signala za posmatrani signal  $s[n]$ .

$e^{j\frac{\pi}{3}n} = e^{j\frac{\pi}{3}(n+N)} = e^{j\frac{\pi}{3}n} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}N}$ . Jasno je da je jednačina zadovoljena ako je  $e^{j\frac{\pi}{3}N} = 1$  odnosno ako važi  $\frac{\pi}{3}N = 2\pi k$  gde je  $k \in \mathbb{N}$ . Odavde se dobija da je  $N = 6 \cdot k; k \in \mathbb{N}$ . Za  $k=1$  sledi da je perioda signala  $s[n]$  jednako  $N = 6$ .

g) Za uslov periodičnosti se dobija  $e^{j2n} = e^{j2(n+N)} = e^{j2n} \cdot e^{j2N}$ . Jednačina se zadovoljava ako je  $e^{j2N} = 1$ , odnosno ako je  $2N = 2\pi k$  za proizvoljno  $N, k \in \mathbb{N}$ . Vidi se da se ulosov nemože zadovoljiti za prirodne brojeve  $N$  i  $k$  pa sledi da signal nije periodičan.<sup>+</sup>

h) Posmatranjem signala prikazanog na slici može se uočiti da se signal ponavlja nakon izvesnog broja

trenutaka. Broj trenutaka nakon čega sledi ponavljanje vrednosti je jednak 6 odnosno perioda diskretnog signala je  $N = 6$ .

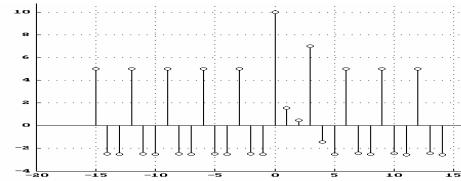
i) Analogno predhodnom zadatku posmatranjem signala može da se uoči perioda diskretnog signala koja iznosi  $N = 6$ .

**Zadatak 3.2.**

- a) Skicirati signal  $s[n] = s_1[n] + s_2[n]$  ako su signali  $s_1[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); \forall n, s_2[n] = \begin{cases} 5-n; & 0 \leq n \leq 5 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$ .
- b) Skicirati signale  $s'[n] = s_1[n] - s_2[n]$  i  $s''[n] = s_2[n] - s_1[n]$  ako su signali  $s_1[n] = \begin{cases} 5+n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 5-n; & 0 \leq n \leq 5 \end{cases}, \quad s_2[n] = \begin{cases} 5+n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$ .
- c) Skicirati signal  $s[n] = s_1[n] \cdot s_2[n]$  za navedene slučajeve signala  $s_1[n]$  i  $s_2[n]$ .
- c.1)  $s_1[n] = a^n; 0 \leq n \leq 15,$  c.2)  $s_1[n] = 2^n; 0 \leq n \leq 10,$  c.3)  $s_1[n] = 3^n; 0 \leq n \leq 15,$
- $s_2[n] = 3; \forall n. \quad s_2[n] = 3^n; 0 \leq n \leq 10. \quad s_2[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n; -10 \leq n \leq 1.$
- d) Skicirati signal  $s[n].$
- d.1)  $s[n] = s_1[n - n_0]$  ako je  $s_1[n] = 100 \cdot \delta[n]$  i  $n_0 = 100$ .
- d.2)  $s[n] = s_1[n + 5] - s_2[n - 10]$  ako je  $s_1[n] = a^n; 0 \leq n \leq 15, \quad s_2[n] = \left(-\frac{1}{a}\right)^n; -15 \leq n \leq 1.$
- d.3)  $s[n] = s_1[n] \cdot u[n - 10] + s_1[n - 10] \cdot u[n]$  ako je  $s_1[n] = 3^{-n}; n \geq 0.$
- e) Skicirati konvolucioni signal  $s[n].$
- e.1)  $s[n] = \delta[n] * \delta[n - n_0]. \quad$  e.2)  $s[n] = u[n] * \delta[n - 10]. \quad$  e.3)  $s[n] = u[n] * u[n].$
- e.4)  $s[n] = a^n * u[n]. \quad$  e.5)  $s[n] = a^n * a^n.$
- f) Skicirati korelacioni signal  $s[n].$
- f.1)  $s[n] = s_1[n] * s_1[-n], \quad$  f.2)  $s[n] = s_1[-n] * s_2[n],$   
 $s_1[n] = a^n; n \geq 0. \quad$   $s_1[n] = \delta[n], \quad s_2[n] = \delta[n - 3].$
- f.3)  $s[n] = s_1[n] * s_2[-n], \quad$  f.4)  $s[n] = s_1[n] * s_2[-n],$   
 $s_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); n \geq 0, \quad$   $s_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right); n \leq 0,$   
 $s_2[n] = u[n]. \quad$   $s_2[n] = \sin(2 \cdot n); n \geq 0.$
- f.5)  $s[n] = s_1[n] * s_2[-n],$   
 $s_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); \forall n,$   
 $s_2[n] = \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right); \forall n.$

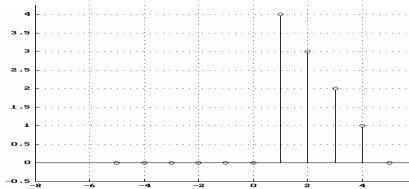
a) Sabiranjem signala u odgovarajućim intervalima za rezultat se dobija

$$s[n] = \begin{cases} 5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + (5-n); & 0 \leq n \leq 5 \\ 5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); & \text{drugde} \end{cases}$$

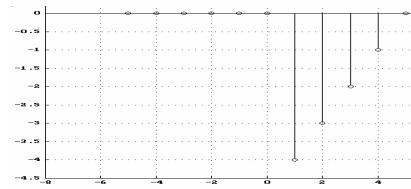


b) Nalaženjem razlike signala dobijamo da su signali

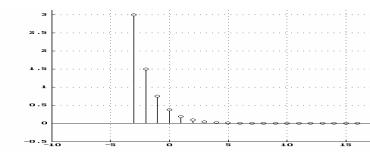
$$s'[n] = \begin{cases} 5-n; & 1 \leq n \leq 5 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



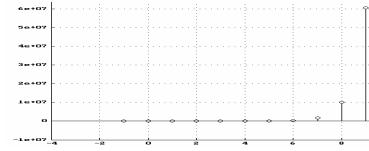
$$s''[n] = \begin{cases} n-5; & 1 \leq n \leq 5 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



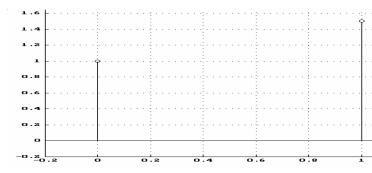
c.1)  $s[n] = \begin{cases} 3 \cdot a^n; & 0 \leq n \leq 15 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$ , za  $a = 0.5$  sledi slika



c.2)  $s[n] = \begin{cases} 2^n \cdot 3^n = 6^n; & 0 \leq n \leq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$

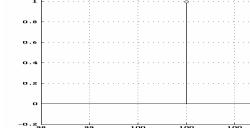
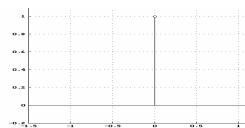


c.3)  $s[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ \frac{3}{2}; & n = 1 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$

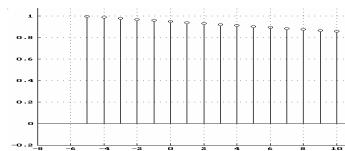


d). vremensko pomeranje

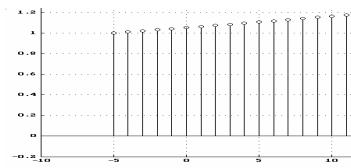
d.1)  $s[n] = 100 \cdot \delta[n - 100]$



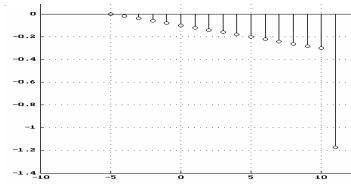
d.2)  $s_1[n+5] = \begin{cases} a^n; & -5 \leq n \leq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$



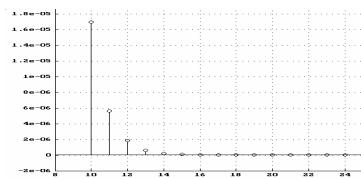
$$s_2[n-10] = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^n; & -5 \leq n \leq 11 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



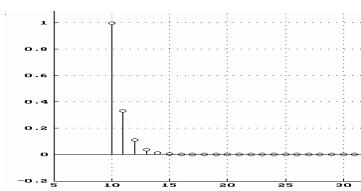
$$s[n] = \begin{cases} a^n + \left(\frac{1}{a}\right)^n; & -5 \leq n \leq 11 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



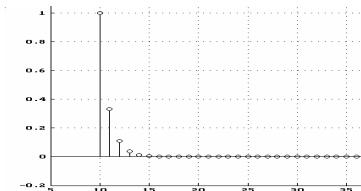
$$\text{d.3)} \quad s_1[n] \cdot u[n-10] = \begin{cases} 3^{-n}; & n \geq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



$$s_1[n-10] \cdot u[n] = \begin{cases} 3^{-(n-10)}; & n \geq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



$$s[n] = \begin{cases} 3^{-n} + 3^{-(n-10)}; & n \geq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$

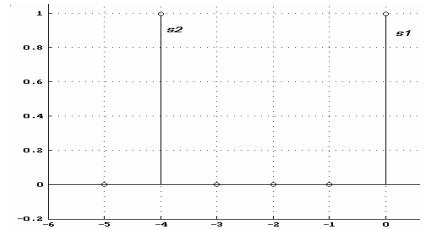


e) konvolucija signala (  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[n-m] \cdot s_2[m]$  )

U slučaju signala sa složenim analitičkim opisom često se konvolucioni signal  $s[n]$  rešava grafičkim putem. U sledećim primerima će se primeniti ova metoda.

e.1) Neka je signal  $s_1[m] = \delta[n]|_{n=m} = \delta[m]$ . Ovim smo signal  $\delta[n]$  preslikali u m-domen u kome se vrši sumiranje signala (sumiranje po promenljivoj 'm'). Signal  $s_2[n-m]$  se dobija na sledeći način:

1. preslika se signal u m-domen i tako se dobija  $s_2[m] = \delta[m-n_0]$ .
2. nalazi se signal  $s_2[-m]$  koji predstavlja lik u ogledalu signala  $s_2[m]$ , tj. vrednosti signala sa negativne se perslikavaju na pozitvnu vremensku osu a sa pozitivne na negativnu vremensku osu, kao lik u ogledalu.
3. pomeri se signal  $s_2[-m]$  za neki proizvoljan korak 'n' čime se dobija signal  $s_2[n-m]$  (za  $n < 0$  signal se pomera uлево  $n$  koraka, za  $n > 0$  signal se pomera udesno  $n$  koraka).



Oređivanje  $s[n]$  podrazumeva određivanje njenih vrednosti za svako  $n$  odnosno za  $-\infty < n < +\infty$ . Grafički se postupak može predstaviti kao pomeranje signala  $s_2[m]$  po  $m$  osi od  $-\infty$  do  $+\infty$ , nalaženjem proizvoda  $s_1[m] \cdot s_2[n-m]$  i sabiranjem vrednosti dobijenih proizvoda. Za konkretni primer se dobija jednačina  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-n_0-m]$ . Na osnovu definicije jediničnih impulsa se može uočiti da je proizvod u sumi različito od nule samo za  $n = n_0$ , pa je zato i suma različita od nule za tu vrednost, dok za ostale vrednosti  $n$ , proizvod pa i suma su jednaki nuli. Grafička interpretacija: neka se određuje vrednost signala u trenutku  $n = n_1 \neq n_0$  tj.  $s[n = n_1]$ . S obzirom da se pomera samo signal  $s_2[m]$ , to ćemo imati da je  $s_2[n_1 - m] = \delta[n_1 - n_0 - m]$ . Prikažimo oba signala u istom dijagramu predpostavljajući da je  $n_1 - n_0 < 0$ . To znači da je pomereni jedinični impuls lociran na levoj strani vremenske ose tj. za negativno  $m$ . Sa slike se vidi da se signali ne preklapaju pa je njihov proizvod jednak nuli pa je i suma jednaka nuli. Signal  $s_2[m]$  je različito od nule tamo gde je signal  $s_1[m]$  jednaka nuli, dok je signal  $s_1[m]$  različito od nule tamo gde je signal  $s_2[m]$  jednaka nuli. Isti zaključak se može izvesti i za slučaj kada se signal  $s_2[m]$  nalazi desno od signala  $s_1[m]$ . Predpostavimo da smo signal  $s_2[m]$  pomerili tako da se signali preklapaju. Kako su signali različiti od nule za isti trenutak, to će i njihov proizvod biti različito od nule, dok za ostale trenutke proizvod je jadnak nuli. Kako postoji samo jedan član u sumi koji je različito od nule to će i vrednost signala biti jednaka tom članu. Postavlja se pitanje za koju vrednost  $n$  ćemo dobiti sumu različitu od nule, odnosno koliko treba da se pomeri signal  $s_2[m]$  u odnosu na signal  $s_1[m]$  da bi dobili rezultat različitu od nule. Kao što je to već pre uočeno signali se moraju preklapati. Signal  $s_1[m]$  je lociran u tačku  $m = 0$ . Ako se signali preklapaju tada je signal  $s_2[m]$  isto lociran u toj tački tj.  $n - n_0 - m|_{m=0} = n - n_0 = 0$ . Iz toga onda sledi da za trenutak  $n = n_0$  vrednost sume je različito od nule, odnosno za rezultat važi  $s[n] = \begin{cases} 1; n = n_0 \\ 0; n \neq n_0 \end{cases}$ . Rezultujući signal je zapravo jedinični impuls pomeren za  $n_0$  koraka uлево ako je  $n_0 < 0$  ili udesno ako je  $n_0 > 0$ .

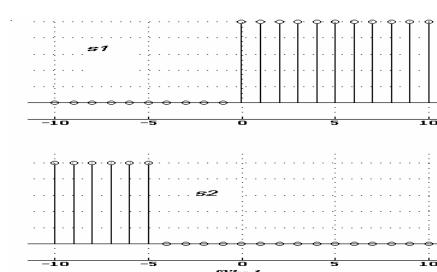
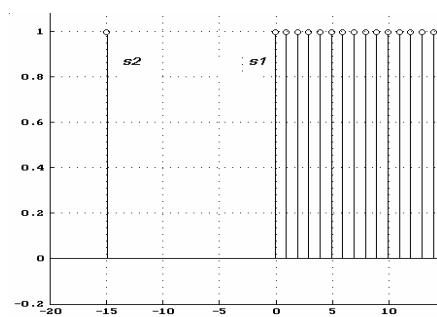
e.2) Neka su signali  $s_1[n] = u[n]$   $s_2[n] = \delta[n-10]$ . Za konvolucionu jednačinu se tada dobija  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \cdot \delta[n-10-m]$ . Grafički prikaz oba signala za  $n = -5$  je dato na slici.

Analogno predhodnom zadatku i u ovom slučaju je konvolucionu sumu različita od nule samo tada kada se oba signala preklapaju tj. kada se signal  $s_2[m]$  nalazi desno od tačke  $m = 0$ . Preklapanje signala počinje od trenutka kada je  $n - 10 - m|_{m=0} = 0$  tj kada je  $n = 10$  i traje do  $+\infty$ .

Konvolucionu sumu i sada sadrži samo jedan član jer se ostali članovi zbog jediničnog impulsa množe sa nulom, te je rezultat

$$\text{konvolucije } s[n] = \begin{cases} 1; n \geq 10 \\ 0; n < 10 \end{cases} = u[n-10].$$

e.3) Signali  $s_1[m] = u[m]$  i  $s_2[m] = u[n-m]$  su prikazani na slici 1. Ako se signali ne preklapaju tada je i proizvod jednak nuli kao što se to vidi i sa slike 1. Preklapanje signala nastaje u trenutku  $n - m|_{m=0} = 0$  tj. za  $n \geq 0$  što je prikazano na slici 2.



Konvolucionna suma će tada da glasi  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \cdot u[n-m]$ .

Sa slike 2. se može uočito da je donja granica sume  $m=0$  jer signal  $s_1[m]$  je različito od nule samo za pozitivne vrednosti  $m$ . Gornju granicu sume određuje signal  $s_2[m]$ . Sa slike se vidi je signal  $s_2[m]$  različito od nule ako je  $m \leq n$  pa sledi da je gornja granica sume  $m=n$ . Uvrštavanjem se dobija  $s[n] = \sum_{m=0}^n 1 \cdot 1 = n+1; n \geq 0$ .

e.4) Neka je signal  $s_1[m] = \begin{cases} a^n; & n \geq 0 \\ 0; & drugde \end{cases}$  a signal  $s_2[m] = u[n-m]$ .

Posmatrajmo signal  $s[n]$  posebno za interval  $-\infty < n < 0$  i posebno za interval  $0 \leq n < +\infty$ . Za interval  $n < 0$  međusobni položaj signala  $s_1[m]$  i  $s_2[m]$  je prikazano na slici 1. dok za interval  $n \geq 0$  na slici 2. Analogno predhodnom zadatku sa slike 1. se može uočiti da zbog neprekapanja signala proizvod signala je jednaka nuli, pa je i suma jednaka nuli. Iz ove analize zaključujemo da je signal  $s[n] = 0; n < 0$ . Preklapanje nastaje kada se signal  $s_2[m]$  pomeri za  $n \geq 0$ . Donju granicu sume opet određuje signal  $s_1[m]$  koji je definisan samo za  $m \geq 0$ , pa zato sumiranje počinjemo od tačke  $m=0$ . Gornja granica zavisi od položaja signala  $s_2[m]$  odnosno u kojoj meri se signali preklapaju. Kao i u predhodnom primeru signal  $s_2[m]$  je različit od nule za  $m \leq n$  pa je gornja granica sume  $m=n$ . Nakon ove analize konvolucionna suma će da glasi

$$s[n] = \sum_{m=0}^n a^m \cdot 1 = \sum_{m=0}^n a^m. \text{ Ova suma postoji samo za vrednosti}$$

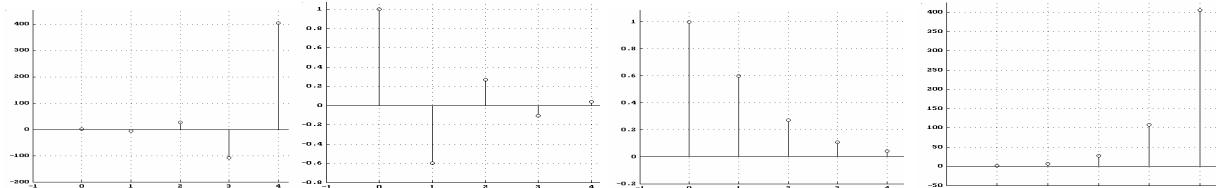
$|a| < 1$  i ona je jednaka  $\sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ . Za ostale vrednosti broja  $a$ , suma divergira ili osciluje

oko vremenske ose. Na osnovu predhodne analize konačno dolazimo do rešenja

$$s[n] = \begin{cases} 0; & n < 0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}; & n \geq 0 \end{cases}$$

e.5) Analogno predhodnim primerima signal  $s[n] = 0$  za  $n < 0$  jer se signali ne preklapaju. Za  $n \geq 0$  signali se preklapaju pa je  $s[n] = \sum_{m=0}^n a^m \cdot a^{n-m} = a^n \cdot \sum_{m=0}^n 1 = a^n \cdot (n+1)$ . Određivanje granica sume je

analogan predhodnim postupcima. Za  $a \leq -1$  signal  $s[n]$  teži ka beskonačnosti menjajući predznak u svakom trenutku (slika 1). Za  $-1 < a < 0$  signal naizmenično menja predznak i teži ka nuli (slika 2). Za  $0 < a < 1$  signal je uvek pozitivan i teži ka nuli (slika 3). Za  $a \geq 1$  signal teži ka beskonačnosti (slika 4).



$$f) \text{ korelacija signala } ( s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n+m] )$$

f.1) postupak rešavanja korelace jednačine je sličan postupku za rešavanje konvolucione jednačine. Bitna razlika je u signalu koja se pomera u odnosu na drugi fiksni signal. U slučaju konvolucije smo imali da se jedan od signala preslikava kao lik u ogledalu i tako ulazi u konvolucionu jednačinu. Kako se signal pomera po vremenskoj osi to smo dobijali različite vrednosti za rezultat tražene sume. Kod korelace jednačine nema gore opisanog preslikavanja nego se signal pomera za određeni korak i tako ulazi u račun sume. Rezultat toga je da se sada signal pomera u suprotnom smeru tj. kreće se od desne strane ka levoj. Za  $n < 0$  imaćemo da se signal nalazi na desnoj strani vremenske ose dok se za  $n > 0$  nalazi na levoj strani vremenske ose. Posmatrajmo prvo interval  $n < 0$  koji je prikazan na slici 1.

Kako se signali preklapaju to je njihov proizvod različito od nule pa je i suma različita od nule. Napišimo izraz za sumiranje iz koje ćemo zatim da odredimo zavisnost signala  $s[n]$  od

$$\text{vremena } n < 0. \quad s[n] = \sum_{m=|n|}^{\infty} a^m \cdot a^{-|n|+m} = a^{-|n|} \cdot \sum_{m=|n|}^{\infty} a^{2m}. \quad \text{Granice su}$$

očigledne jer se signali preklapaju samo za  $n \leq m < +\infty$ . Da bi sumu rešili u tabličnom obliku napisaćemo je na sledeći način

$$\sum_{m=|n|}^{\infty} a^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} - \sum_{m=0}^{|n|-1} a^{2m} = \frac{1}{1-a^2} - \frac{1-a^{2|n|}}{1-a^2} = \frac{a^{2|n|}}{1-a^2}.$$

$$\text{Konačno se dobija } s[n] = a^{-|n|} \cdot \frac{a^{2|n|}}{1-a^2} = \frac{a^{|n|}}{1-a^2} \text{ za } n < 0.$$

Posmatrajmo sada signal  $s[n]$  u intervalu  $n > 0$  i međusobni položaj signala koji je prikazan na slici 2. Kao što se to vidi sa slike donja granica sume je  $m=0$  dok je gornja granica  $m \rightarrow \infty$ .

Na osnovu ovoga

$$s[n] = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cdot a^{n+m} = a^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} = \frac{a^n}{1-a^2} \text{ za } n \geq 0. \quad \text{Upoređujući}$$

izraze signala  $s[n]$  za različite intervale  $n$  uočava se jedna bitna osobina autokoreacionog signala: ako su diskretni signali realni tada je njihov autokoreacioni signal uvek parna funkcija vremena.

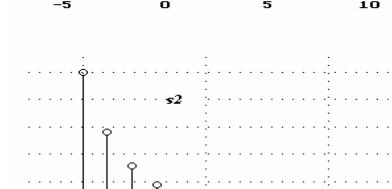
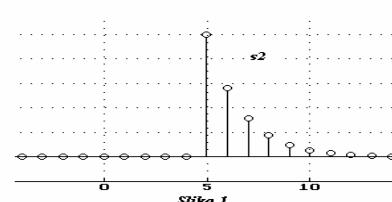
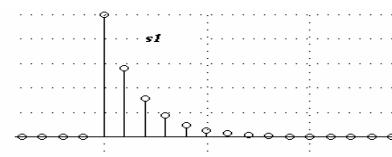
$$\text{Konačno se za signal može napisati } s[n] = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}; \forall n.$$

f.2) Uvrštavanjem signala u formulu korelacije signala dolazimo do izraza  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m] \cdot \delta[n-3+m]$ . Poznavajući osobine impulsnih

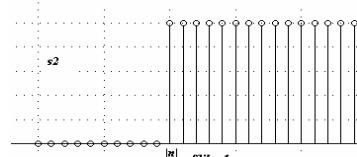
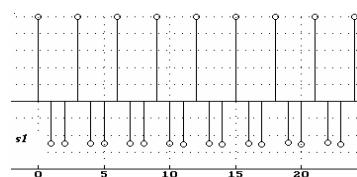
funkcija može se zaključiti da je data suma različita od nule ako se impulsi poklapaju tj. nalaze se na istom mestu.

Iz ovog uslova sledi  $n-3+m|_{m=0} = 0$  pa se dobija da je  $n = 3$ .

$$\text{Konačno imamo da je } s[n] = \begin{cases} 1; & n = 3 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$



Slika 2.



f.3) Korelaciona suma za ovaj primer će da glasi  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right) \cdot u[n+m]$ . Posmatrajmo sumu posebno za  $n > 0$  i za  $n < 0$ . Međusobni položaj signala za slučaj  $n < 0$  je prikazan na slici 1. Kao što se to sa slike vidi, suma je različita od nule samo za  $m \geq |n|$  pa prema tome  $s[n] = \sum_{m=|n|}^{\infty} 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right)$ . Primenom Ojlerovog obrazca i preuređivanjem sume se dobija

$$s[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}m} + e^{-j\frac{2\pi}{3}m}}{2} - \sum_{m=0}^{|n|-1} \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}m} + e^{-j\frac{2\pi}{3}m}}{2}. \text{ Razbijanjem sume na parcijalne sume i primenom tabličnih rešenja gornjih suma sledi}$$

$$s[n] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}} + \frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} - \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{3}|n|}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}} - \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}|n|}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} \right].$$

Sređivanjem izraza u zagradi dolazi se do rešenja

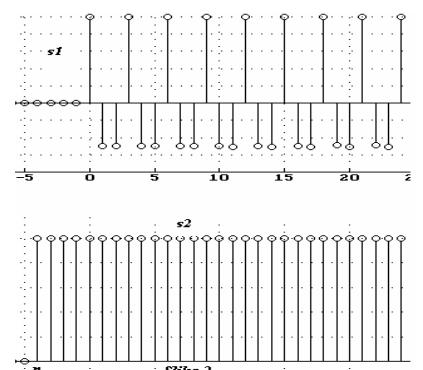
$$\begin{aligned} s[n] &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}|n|}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}} + \frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}|n|}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}|n|\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}(|n|-1)\right)}{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}|n| - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}|n| - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \text{ za } n < 0. \end{aligned}$$

Međusobni položaj signala za interval  $n > 0$  prikazana je na slici 2.

Tražena suma će tada biti  $s[n] = \sum_{m=0}^{\infty} 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right)$ . Primenom

Ojlerovog obrazca sledi

$$\begin{aligned} s[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}m} + e^{-j\frac{2\pi}{3}m}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}} + \frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



$$\text{Iz prethodne analize sledi da je } s[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}; & n \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}|n| - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}; & n < 0 \end{cases}.$$

f.4) Analogno predhodnim primerima može se zaključiti da je korelacioni signal za  $n \geq 0$  jednaka nuli jer se signali zbog svojih oblasti definisanosti ne preklapaju kao što je to prikazano na slici 1.

Za slučaj  $n < 0$  imamo delimično preklapanje signala do tačke  $m = |n|$

$$\text{pa je stoga korelaciona suma } s[n] = \sum_{m=0}^{|n|} \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right) \cdot \sin(2(m - |n|)).$$

Primenom smena  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\beta = 2$  i Ojlerovog obrazca za sumu se

$$\text{dobija } s[n] = \sum_{m=0}^{|n|} \frac{e^{j\alpha m} + e^{-j\alpha m}}{2} \cdot \frac{e^{j\beta(m-|n|)} - e^{-j\beta(m-|n|)}}{2j}. \text{ Sredivanjem sume dolazi se do izraza}$$

$$s[n] = \frac{e^{-j\beta|n|}}{4j} \sum_{m=0}^{|n|} \left( e^{j(\alpha+\beta)m} + e^{-j(\alpha-\beta)m} \right) - \frac{e^{j\beta|n|}}{4j} \sum_{m=0}^{|n|} \left( e^{j(\alpha-\beta)m} + e^{-j(\alpha+\beta)m} \right).$$

Koristeći tablična rešenja konačnih sumi, dobijena suma se pretvara u oblik

$$s[n] = \frac{e^{-j\beta|n|}}{4j} \cdot \left[ \frac{1 - e^{j(\alpha+\beta)(|n|+1)}}{1 - e^{j(\alpha+\beta)}} + \frac{1 - e^{-j(\alpha-\beta)(|n|+1)}}{1 - e^{-j(\alpha-\beta)}} \right] - \frac{e^{j\beta|n|}}{4j} \cdot \left[ \frac{1 - e^{j(\alpha-\beta)(|n|+1)}}{1 - e^{j(\alpha-\beta)}} + \frac{1 - e^{-j(\alpha+\beta)(|n|+1)}}{1 - e^{-j(\alpha+\beta)}} \right].$$

Nakon množenja prve zagrade sa  $e^{-j\beta|n|}$  i druge sa  $e^{j\beta|n|}$  i kombinovanjem prvog člana prve zagrade sa drugim članom druge i drugog člana prve zagrade sa prvim članom druge zagrade dobija se

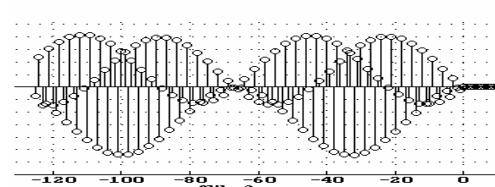
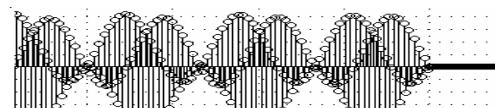
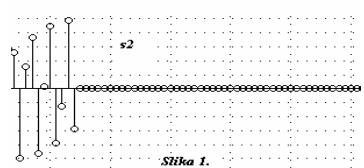
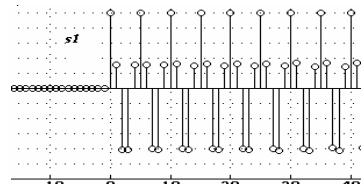
$$s[n] = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{\cos(\alpha|n| + \frac{\alpha - \beta}{2}) - \cos(\beta|n| - \frac{\alpha - \beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})} - \frac{\cos(\alpha|n| + \frac{\alpha + \beta}{2}) - \cos(\beta|n| + \frac{\alpha + \beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})} \right].$$

Nakon uvrštavanja  $\alpha$  i  $\beta$  dolazi se do konačnog rezultata koji glasi

$$s[n] = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}|n| + \frac{\pi}{3} - 1) - \cos(2|n| - \frac{\pi}{3} + 1)}{4 \sin(\frac{\pi}{3} + 1)} - \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}|n| + \frac{\pi}{3} + 1) - \cos(2|n| + \frac{\pi}{3} + 1)}{4 \sin(\frac{\pi}{3} - 1)}; & n < 0 \\ 0; & n \geq 0 \end{cases}.$$

Dobijeni korelacioni signal je prikazan na slici 2.

Gornja slika prikazuje korelacioni signal u širem intervalu, dok donja slika prikazuje izdvojeni segment signala u intervalu  $-120 \leq n \leq 20$ . I sa grafikona i iz analitičkog oblika signala može da se zapazi da korelacioni signal nije periodičan.



f.5) Konvolucionna suma za ova dva signala će da glasi  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}(n+m)\right)$ .

Primenom osnovnih trigonometrijskih transformacija suma se može svesti na oblik

$$s[n] = \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right) \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right) \cos\left(\frac{5\pi}{4}m\right) \right] + \cos\left(\frac{5\pi}{4}n\right) \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right) \sin\left(\frac{5\pi}{4}m\right) \right] =$$

$$= \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right) \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{23\pi}{12}m\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{12}m\right)}{2} \right] + \cos\left(\frac{5\pi}{4}n\right) \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{23\pi}{12}m\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{12}m\right)}{2} \right].$$

Može se uočiti da su svi trigonometrijski diskretni signali pod sumom periodični sa periodom  $N = 24$ . Razbijanjem sume na zbir parcijalnih suma po jednoj periodi signala tj.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m] = \sum_{m=-n24}^{-(n+1)24+1} g[m] + \dots + \sum_{m=-24}^{-1} g[m] + \sum_{m=0}^{23} g[m] + \sum_{m=24}^{47} g[m] + \dots + \sum_{m=n24}^{(n+1)24-1} g[m] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=r24}^{(r+1)24-1} g[m].$$

Izdvojimo iz niza parcijalnih suma tu koja sumira vrednosti periodičnog trigonometrijskog signala u njenoj osnovnoj periodi, to je  $\sum_{m=0}^{23} g[m]$ . Neka je  $g[m] = \sin\left(\frac{23\pi}{12}m\right)$ . Za  $g[m]$  se može izabrati bilo koji gore navedeni signal, zaključak koji će da sledi važi za svaki od tih signala. Vrednosti koje će signal poprimati u datoj periodi za različite vrednosti  $m$  su sledeće

$$s[m] = \begin{cases} 0, -0.258, -0.5, -0.707, -0.866, -0.965, -1, -0.965, -0.866, -0.707, -0.5, -0.258; 0 \\ 0, +0.258, +0.5, +0.707, +0.866, +0.965, +1, +0.965, +0.866, +0.707, +0.5, +0.258 \end{cases}.$$

Ako sumiramo vrednosti signala po celoj periodi vidimo da se za rezultat dobija nula. Kako je signal periodičan, njene vrednosti se ponavljaju za svaku parcijalnu sumu, te će svaka parcijalna suma, analogno predhodnom, biti jednaka nuli. Sledi da su vrednost pojedinih beskonačnih suma jednakе nuli tj.

$$s[n] = \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right) \cdot 0 + \cos\left(\frac{5\pi}{4}n\right) \cdot 0 = 0. \text{ Iz dobijenog rezultata se može zaključiti da je korelacija}$$

gore navedenih signala jednaka nuli za bilo koju vrednost  $n$  tj.  $s[n] = 0; \forall n$ .<sup>+</sup>

Gore navedeni zaključak smo izveli u vremenskom domenu primenom nekih od trigonometrijskih adicionalnih transformacija. Do istog zaključka ćemo doći i u sledećem poglavlju gde ćemo analizu sprovesti u transformacionom domenu signala.

---

<sup>+</sup> Gore izvedenoj sumi se može dati i drugačije tumačenje: suma neke funkcije po nekom intervalu predstavlja srednju vrednost date funkcije. Svaka od gornjih trigonometrijskih signala ima istu periodu i simetrične su u svakoj periodi na diskretnu vremensku osu. Kako su one simetrične po svakoj periodi te njihova srednja vrednost mora biti nula po svakoj periodi pa je zato i njihova beskonačna suma jednakna nuli.

**Zadatak 3.3.** Za svaki od sledećih sistema odrediti dali je sistem stabilan, kauzalan, linearan, vremenski nepromenljiv, bez memorije

- a.1)  $S\{x[n]\} = g[n] \cdot x[n]$ ,      a.2)  $S\{x[n]\} = \sum_{k=n_0}^n x[k]$ ,      a.3)  $S\{x[n]\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$ ,
- a.4)  $S\{x[n]\} = x[n - n_0]$ ,      a.5)  $S\{x[n]\} = e^{x[n]}$ ,      a.6)  $S\{x[n]\} = a \cdot x[n] + b$ ,
- a.7)  $S\{x[n]\} = x[-n]$ ,      a.8)  $S\{x[n]\} = x[n] + 3 \cdot u[n+1]$ .

#### a.1) Uslov stabilnosti:

*Sistem je stabilan ako se na bilo koji ograničen ulaz ( $|x[n]| < B_x < \infty$ ) na izlazu sistema dobija ograničen odziv tj.  $|y[n]| < B_y < \infty$ .*

Neka je  $y[n] = S\{x[n]\} = g[n] \cdot x[n]$  odziv sistema na ograničenu pobudu ( $|x[n]| < B_x < \infty$ ). Po datoj definiciji sledi  $|y[n]| = |g[n] \cdot x[n]| = |g[n]| \cdot |x[n]| < |g[n]| \cdot B_x$ . Ukoliko je i sekvenca  $g[n]$  ograničena tj.  $|g[n]| < B_g < \infty$  tada je  $|y[n]| = |g[n]| \cdot |x[n]| < B_g \cdot B_x < \infty$  tj. zaključujemo da je sistem ograničen jer je i njegov odziv ograničen.

#### Uslov kauzalnosti:

*Sistem je kauzalan ako se za bilo koji proizvoljno odabrani trenutak  $n_0$ , izlazni signal u trenutku  $n = n_0$  zavisi samo od vrednosti ulaznog signala u trenucima  $n \leq n_0$ .*

Primenom gornjeg uslova na dati sistem, dobija se da je za trenutak  $n = n_0$  izlazni signal jednak  $y[n_0] = g[n_0] \cdot x[n_0]$  tj. da vrednost izlaznog signala za posmatrani trenutak zavisi samo od vrednosti sekvenca  $g[n]$  i  $x[n]$  u posmatranom trenutku. Znači sistem jeste kauzalan.

#### Uslov linearnosti:

*Klasa linearnih sistema je definisana principom superpozicije.*

*Ako su  $y_1[n]$  i  $y_2[n]$  odzivi na pojedine pobude  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$  respektivno, tada je sistem linearan ako i samo ako važi*

$$\begin{aligned} S\{x_1[n] + x_2[n]\} &= S\{x_1[n]\} + S\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \\ i \\ S\{a \cdot x[n]\} &= a \cdot S\{x[n]\} = a \cdot y[n] \end{aligned}$$

gde je  $a$  proizvoljno odabrana konstanta.

Prva osobina se naziva osobinom **aditivnosti** dok je druga, osobina **homogenosti** ili drugačije osobina **skaliranja**.

Analizirajmo prvo osobinu aditivnosti. Tada se dobija

$$S\{x_1[n] + x_2[n]\} = g[n] \cdot [x_1[n] + x_2[n]] = g[n] \cdot x_1[n] + g[n] \cdot x_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

iz čega zaključujemo da sistem zadovoljava osobinu aditivnosti.

Za osobinu homogenosti dobijamo  $S\{a \cdot x[n]\} = g[n] \cdot a \cdot x[n] = a \cdot g[n] \cdot x[n] = a \cdot y[n]$  iz čega se vidi da sistem zadovoljava datu osobinu. Kako sistem zadovoljava date uslove sledi da je linearan.

**Uslov vremenske invarijantnosti:**

Za sistem se kaže da je vremenski invarijantan ako se za vremenski pomerenu pobudu na izlazu dobija odziv vremenski pomerenu za istu veličinu.

Neka je  $n_0 < 0$  vremenski pomeraj ulaznog signala koji se dovodi na ulaz testiranog sistema. Tada je  $S\{x[n - n_0]\} = g[n] \cdot x[n - n_0] \neq y[n - n_0] = g[n - n_0] \cdot x[n - n_0]$  iz čega sledi da sistem nije vremenski invarijantan.

**Uslov koji definiše sistem bez memorije:**

Sistem je bez memorije ako se vrednost izlaznog signala u bilo kom trenutku  $n$  zavisi samo od vrednosti ulaznog signala u istom trenutku  $n$ .

Iz definicije sistema se vidi da izlaz u trenutku  $n$  zavisi samo od proizvoda sekvence  $g[n]$  i  $x[n]$  u istom trenutku te sledi da je sistem bez memorije.

a.2) **Stabilnost:**  $|y[n]| = \left| \sum_{k=n_0}^n x[k] \right| \leq \sum_{k=n_0}^n |x[n]| < \sum_{k=n_0}^n B_x = B_x \cdot (n - n_0)$ . Iz dobijene jednakosti sledi da ako  $n \rightarrow \infty$  tada i  $|y[n]| \rightarrow \infty$ , te sistem nije stabilan.

**Kauzalnost:** Za proizvoljno  $n = n_1$  imaćemo  $y[n_1] = \sum_{k=n_0}^{n_1} x[k] = x[n_0] + x[n_0 + 1] + \dots + x[n_1 - 1] + x[n_1]$ . Kao što se vidi izlazni signal u datom trenutku zavisi samo od predhodnih vrednosti ulaznog signala tj.  $n_0 \leq n \leq n_1$ . Te zaključujemo da je sistem kauzalan.

**Linearnost:** Obuhvatajući obe osobine linearnosti u jednu jednačinu, dobijamo da za linearne sistema važi

$$S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = S\{a \cdot x_1[n]\} + S\{b \cdot x_2[n]\} = a \cdot S\{x_1[n]\} + b \cdot S\{x_2[n]\} = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n].$$

Primenimo dati uslov na posmatrani sistem. Dobijamo jednačinu

$$S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = \sum_{k=n_0}^n [a \cdot x_1[k] + b \cdot x_2[k]] = a \cdot \sum_{k=n_0}^n x_1[k] + b \cdot \sum_{k=n_0}^n x_2[k] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$

iz koje sledi da je posmatrani sistem linearan.

**Vremenska invarijantnost:**

$$y[n - n_1] = \sum_{k=n_0}^{n-n_1} x[k] = x[n_0] + \dots + x[n - n_1] \neq \sum_{k=n_0-n_1}^n x[k] = x[n_0 - n_1] + \dots + x[n - n_1].$$

Iz dobijene relacije sledi da sistem nije vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:**  $y[n] = \sum_{k=n_0}^n x[k] = x[n_0] + x[n_0 + 1] + \dots + x[n - 1] + x[n]$ . Kao što se vidi trenutna vrednost odziva zavisi i od predhodnih vrednosti ulaznog signala, te sledi da dati sistem nije bez memorije.

a.3) **Stabilnost:**  $|y[n]| = \left| \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] \right| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x[k]| < \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} B_x = B_x(n + n_0 - n + n_0) = B_x 2n_0 < \infty$ . Kako je odziv ograničen za bilo koje  $n$  sledi da je dati sistem stabilan.

**Kauzalnost:** Za trenutak  $n = n_1$  odziv sistema je

$$y[n_1] = \sum_{k=n_1-n_0}^{n_1+n_0} x[k] = x[n_1 - n_0] + x[n_1 - n_0 + 1] + \cdots + x[n_1 + n_0 - 1] + x[n_1 + n_0].$$

Očigledno sistem nije kauzalan jer izlazni signal u trenutku  $n = n_1$  ne zavisi samo od vrednosti ulaznog signala u predhodnim trenucima ( $n_1 - n_0, n_1 - n_0 + 1, n_1 - n_0 + 2, \dots, n_1 - n_0 + n_0 = n_1$ ) već i od vrednosti u budućim trenucima ( $n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots, n_1 + n_0$ ).

**Linearost:** Primenom uslova linearnosti dobija se izraz

$$S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} [a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]] = a \cdot \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[n] + b \cdot \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[n] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n].$$

Dati sistem zadovoljava uslov linearnosti te sledi da je sistem linearan.

**Vremenska invarijantnost:** Za proizvoljnu pomerenu ulaznu pobudu dobjamo

$$\begin{aligned} S\{x[n - n_1]\} &= \sum_{k=n-n_1-n_0}^{n-n_1+n_0} x[k] = x[(n - n_1) - n_0] + x[(n - n_1) - n_0 + 1] + \cdots \\ &\quad \cdots + x[(n - n_1) + n_0 - 1] + x[(n - n_1) + n_0] = y[n - n_1]. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je sistem vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:** Kako izlazni signal zavisi i od predhodne vrednosti ulaznog signala zaključujemo da posmatrani sistem nije bez memorije.

a.4) **Stabilnost:** Ako na ulaz dovedemo ograničenu pobudu tada na izlazu dobijamo isto ograničen odziv tj.  $|y[n]| = |x[n - n_0]| < B_x < \infty$ , te sledi da je sistem stabilan.

**Kauzalnost:** Odziv sistema u trenutku  $n = n_1$  je  $y[n_1] = x[n_1 - n_0]$  tj. zavisi samo od predhodne vrednosti ulaznog signala pa je stoga sistem kauzalan.

**Linearost:** Primenom uslova sledi

$$S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = a \cdot x_1[n - n_0] + b \cdot x_2[n - n_0] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n].$$

Pa zaključujemo da je sistem linearan.

**Vremenska invarijantnost:** Za proizvoljno odabranu vrednost  $n_1$  odziv na pobudu  $x[n - n_1]$  će biti  $y'[n] = x[(n - n_0) - n_1] = x[(n - n_1) - n_0] = y[n - n_1]$  pa je sistem vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:** Po datom opisu sistema, trenutna vrednost odziva zavisi od neke od predhodnih vrednosti pobudnog signala pa stoga sistem nije bez memorije.

a.5) **Stabilnost:**  $|y[n]| = |e^{x[n]}| < e^{|x[n]|} < e^{B_x} < \infty$ . Iz formule sledi da je sistem stabilan.

**Kauzalnost:** Odziv sistema u proizvoljno odabranom trenutku  $n = n_1$  je  $y[n_1] = e^{x[n_1]}$  tj. zavisi samo od vrednosti ulaznog signala u istom trenutku, pa sledi da je sistem kauzalan.

**Linearost:**  $S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = e^{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]} = e^{a \cdot x_1[n]} \cdot e^{b \cdot x_2[n]} \neq a \cdot e^{x_1[n]} + b \cdot e^{x_2[n]}$ . Kao što se vidi sistem ne zadovoljava uslov linearnosti.

**Vremenska invarijantnost:** Za proizvoljno vremenski pomereni ulazni signal na izlazu se dobija odziv  $e^{x[n-n_0]} = y[n-n_0]$  koji je pomeren u vremenu za istu vrednost. Sledi da je sistem vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:** Iz uslova kauzalnosti smo zaključili da vrednost odziva u proizvoljnom trenutku zavisi samo od vrednosti pobude u istom tom trenutku tj. sistem ne pamti predhodne vrednosti ulaznog signala. Sledi da je sistem bez memorije.

a.6) **Stabilnost:** Iz jednačine  $|y[n]| = |a \cdot x[n] + b| = |a \cdot x[n]| + b = a \cdot |x[n]| + b < a \cdot B_x + b < \infty$  sledi da je posmatrani sistem stabilan.

**Kauzalnost:** U proizvoljno odabranom trenutku odziv sistema će biti  $y[n_1] = a \cdot x[n_1] + b$ , što nam ukazuje, analogno predhodnom zadatku, da je sistem kauzalan.

**Linearost:**

$$S\{a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]\} = a_1 \cdot [a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]] + b \neq a_1 \cdot \underbrace{[a \cdot x_1[n] + b]}_{y_1[n]} + a_2 \cdot \underbrace{[a \cdot x_2[n] + b]}_{y_2[n]}.$$

Iz date nejednakosti se zaključuje da posmatrani sistem nije linearan.

**Vremenska invarijantnost:** Za proizvoljno vremensko pomeranje ulaznog signala na izlazu se dobija  $y'[n] = a \cdot x[n-n_0] + b = y[n-n_0]$  pomereni odziv u vremenu za istu vrednost, pa je zato sistem vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:** Kako vrednost odziva sistema na proizvoljnu pobudu u proizvoljnom trenutku zavisi samo od vrednosti pobude u istom trenutku, zaključujemo da je sistem bez memorije.

a.7) **Stabilnost:** Kako je  $|y[n]| = |x[-n]| < B_x < \infty$  sledi da je sistem stabilan.

**Kauzalnost:** Po definiciji kauzalnosti može da se zaključi da sistemi koji poseduju osobinu kauzalnosti ne mogu da vrše predikciju izlaznog signala, ako je poznat ulazni signal do nekog trenutka tj. nemaju osobinu predviđanja odziva na osnovu dotad poznatih vrednosti pobude. Predpostavimo da smo ulazni signal posmatrali u beskonačno dugom vremenskom intervalu. Neka je trenutak kraja posmatranja odabran tako da se nalazi u tački  $n = 0$  na diskretnoj vremenskoj osi. Tada su nam poznati vrednosti pobude za  $n < 0$ . Odredimo vrednost odziva za proizvoljno  $n > 0$  tako da su nam vrednosti u predhodnim trenutcima nepoznate. Neka je taj trenutak  $n = n_0 > 0$ . Iz definicije sistema sledi da je odziv  $y[n_1] = x[-n_1]$  tj. da su vrednosti odziva u budućim trenucima već određene vrednostima pobude do trenutka posmatranja. Pa sledi da sistem nije kauzalan jer na

osnovu predhodno posmatranih vrednosti pobude uvek se može predvideti buduća vrednost odziva sistema. Posmatrani sistem ima osobinu preslikavanja prošlosti u budućnost.

**Linearost:** Iz uslova linearnosti

$$S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = a \cdot S\{x_1[n]\} + b \cdot S\{x_2[n]\} = a \cdot x_1[-n] + b \cdot x_2[-n] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$

sledi da je posmatrani sistem linearan.

**Vremenska invarijantnost:** Po uslovu vremenske invarijantnosti zakasnela pobuda na ulazu sistema treba da da zakasneli odziv na izlazu sistema za isti vremenski pomeraj. Predpostavimo da smo pobudni signal zakasnili za izvesno vreme  $x[n - n_0]$ . Tada je odziv  $y[n] = x[-(n - n_0)]$  što nam pokazuje da odziv prednjači isto toliko vremena. Znači sistem nije vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:** Sistem nije bez memorije jer se vrednosti odziva određuju na osnovu predhodno posmatranih vrednosti pobude.

a.8) **Stabilnost:** Iz  $|y[n]| = |x[n] + 3 \cdot u[n]| \leq |x[n]| + 3 \cdot |u[n]| < B_x + 3 < \infty$  sledi da je sistem stabilan.

**Kauzalnost:** U proizvoljno odabranom trenutku  $n = n_0$  odziv sistema je  $y[n_1] = x[n_1] + 3 \cdot u[n_1]$  tj. ne zavisi od budućih vrednosti pobudnog signala. Sledi da je sistem kauzalan.

**Linearost:**

$$S\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n] + 3 \cdot u[n]\} = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n] + 3 \cdot u[n] \neq a \cdot x_1[n] + 3 \cdot u[n] + b \cdot x_2[n] + 3 \cdot u[n]$$

tj. sistem nije linearan.

**Vremenska invarijantnost:** Za proizvoljno vremenski pomereni ulazni signal  $x[n - n_0]$  na izlazu sistema se dobija odziv  $y'[n] = x[n - n_0] + 3 \cdot u[n] \neq x[n - n_0] + 3 \cdot u[n - n_0] = y[n - n_0]$  koji nije vremenski pomeren signal. Zaključujemo da sistem nije vremenski invarijantan.

**Sistem bez memorije:** U razmatranju uslova kauzalnosti već smo ukazali na činjenicu da odziv sistema zavisi samo od trenutne vrednosti pobude, te je stoga sistem bez memorije.

## 4. Spektar diskretnih signala

Po definiciji signali su fizičke veličine zavisne od vremena. Međutim njihov opis u vremenskom domenu, bili oni analogni ili diskretni signali, predstavlja mnogo složeniji problem nego što se to na prvi pogled čini.

Da bi se izbegli problemi oko vremenske reprezentacije signala, primenjuju se posebne transformacione tehnike. Uloga transformacionih tehnika je da vremenski signal presliku u transformacioni domen i da se u tom domenu pomoću neke, u opštem slučaju kompleksne, funkcije opišu osobine signala.

Kao najjednostavniji primer bi se mogao navesti prikaz naizmeničnih električnih veličina (struja, napon) pomoću kompleksnih brojeva i vektora. Mada se to ne ističe na osnovnim studijama, ali ona jeste jedan način transformacije vremenskih signala. Pomoću nje vremenski signali se prikazuju kompleksnim vektorima čime se sve složene operacije u vremenskom domenu svode na proste algebarske i vektorske operacije.

Za analogne signale često korišćene transformacije su **Laplasova transformacija** koja omogućava analizu signala u prelaznom režimu, zatim **Furijeova transformacija** ( kao specijalan slučaj Laplasove transformacije ) za analizu signala u frekvencijskom domenu, itd.

Transformacije koje služe za analizu diskretnih signala su:

- **Z-transformacija** ( analogne uloge Laplasovoj transformaciji )
  - **dvostrana** (bilateralna) **Z-transformacija**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n},$$

- **jednostrana** (unilateralna) **Z-transformacija**

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}.$$

- **Inverzna Z-transformacija**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz.$$

- **Furijeova transformacija diskretnog signala ( FTD )**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\omega},$$

- **Inverzna Furijeova transformacija diskretnog signala ( IFTD )**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \cdot d\omega.$$

Pojavom namenske računarske arhitekture ( DSP procesori ) **FTD** je izrastao svoj teorijski značaj. Međutim nedostatak njene praktične primene je ta što za rezultat daje kontinualnu kompleksnu funkciju, koja je nepogodna za smeštaj u memoriju procesora. Rešenje ovog nedostatka je predstavljala diksretizacija spektra signala čime je nastala diskretna Furijeova transformacija ( **DFT** ).

- ***Diskretna Furijeova transformacija ( DFT )***

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}n \cdot k}; k = 0, 1, \dots, N-1,$$

- ***Inverzna diskretna Furijeova transformacija ( IDFT )***

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n \cdot k}; n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ova transformacija je dala kasnije i osnovu za pojavu nekih drugih transformacija, sa boljim i ekonomičnjim osobinama u računksom smislu, kao što su:

- **diskretna Hartlejeva transformacija,**
- **diskretna kosinusna transformacija,**
- **Karhunen-Leve transformacija,**
- **brza Furijeova transformacija,**
- itd.

Ovo poglavlje ima cilj da da uvid u primenu osnovnih transformacionih tehniki i da pokaže neke osnovne metode rešavanja problema iz ove oblasti.

**Zadatak 4.1.** Odredit Furijeovu transformaciju sledećih diskretnih signala (FTD)

a)  $s[n] = 1; \forall n$ .

b.)  $s[n] = \cos\left(\frac{3}{4} \cdot n\right); \forall n$ .

c.)

$s[n] = \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right); n \geq 0$ .

d.)  $s[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{3}{4} \cdot n\right) + 1.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right); n \leq 0$ .

e.)  $s[n] = 7.8 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) + 8.3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right); \forall n$ .

f.)  $s[n] = s_1[n] + s_2[n]$  ako su  $s_1[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); \forall n$  i  $s_2[n] = \begin{cases} 5 - n; & 0 \leq n \leq 5 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$

g.)  $s[n] = s_1[n] - s_2[n]$  ako su  $s_1[n] = \begin{cases} 5 + n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 5 - n; & 0 \leq n \leq 5 \end{cases}$  i  $s_2[n] = \begin{cases} 5 + n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$

h.)  $s[n] = s_1[n] \cdot s_2[n]$  ako su  $s_1[n] = a^n; 0 \leq n \leq 15$  i  $s_2[n] = 3; \forall n$ .

i.)  $s[n] = s_1[n - n_0]$  ako je  $s_1[n] = 100 \cdot \delta[n]$  i  $n_0 = 100$ .

j.)  $s[n] = s_1[n] * s_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-m]$  za slučajeve

j.1.)  $s_1[n] = \delta[n]$       j.2)  $s_1[n] = u[n]$       j.3)  $s_1[n] = u[n]$   
 $s_2[n] = \delta[n - n_0]$ .       $s_2[n] = \delta[n - 10]$ .       $s_2[n] = a^n; n \geq 0$ .

k.1.)  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n+m]$  ako je  $s_1[n] = s_2[n] = a^n; n \geq 0$ .

k.2.)  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[n+m] \cdot s_2[m]$  ako je  $s_1[n] = \delta[n]$  i  $s_2[n] = \delta[n-3]$ .

k.3.)  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n+m]$  ako je  $s_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); \forall n$      $s_2[n] = \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right); \forall n$ .

l.) Rešavanje diferencnih jednačina pomoću FTD za slučaj sa nultim početnim uslovima.

l.1)  $y[n] - \frac{3}{4} \cdot y[n-1] + \frac{1}{8} \cdot y[n-2] = 2 \cdot x[n-1]$  ako je  $x[n] = \delta[n]$ ,

l.2)  $y[n] - 5 \cdot y[n-1] + 6 \cdot y[n-2] = 2 \cdot x[n]$  ako je  $x[n] = \delta[n]$  i  $x[n] = u[n]$ .

a.) Signal  $s[n]$  ne zadovoljava uslov  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$  te stoga njegovo FTD ne može u klasičnom smislu da se izvede. Međutim nekim transformacijama može se pokazati da FTD ovog signala ipak postoji.

Ako se signal prikaže u grafičkom obliku uočava se da signal predstavlja beskonačni niz vremenski pomerenih diskretnih Dirakovih impulsa tj.  $s[n] = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$ . Nađimo sada FTD signala u ovom obliku. Tada se dobija  $S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \cdot e^{-jn\omega}$ . Zamenom redosleda sumiranja dobijamo  $S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega}$ .

Iz telekomunikacija je poznata veza  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\omega} = \frac{2\pi}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{T})$ , pa za vrednost  $T = 1$  dobija se  $S(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \cdot 2\pi)$ . S obzirom da je FTD bilo kog signala periodična funkcija po promenljivoj normalizovane učestanosti  $\omega$  sa periodom  $2\pi$ , tada je dovoljno posmatrati FTD spektar signala u njegovom osnovnom opsegu u  $\omega \in [-\pi, +\pi]$  ili  $\omega \in [0, +2\pi]$ . Te je stoga FTD signala datog u primeru jednaka  $S(j\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega); -\pi \leq \omega \leq +\pi$  tj. FTD spektar diskretnog signala je Dirakov impuls lociran u tački  $\omega = 0$ . Dobijeni rezultat je logičan jer posmatrani signal ima samo jednosmernu komponentu te ni spektar takvog signala nemože da ima komponente na drugim normalizovanim učestanostima osim za  $\omega = 0$ .

b.) Napišimo izraz za FTD signala.  $S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{3}{4} \cdot n\right) \cdot e^{-jn\omega}$ . Primenom Ojlerove transformacije ovaj izraz se svodi na oblik

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{3}{4}n} e^{-jn\omega} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{3}{4}n} e^{-jn\omega} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \frac{3}{4})n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \frac{3}{4})n}.$$

Sume u ovom izrazu su one poznate od predhodnog zadatka te dobijamo da je FTD jednak

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{2} \cdot \delta(\omega - \frac{3}{4}) + \frac{2\pi}{2} \cdot \delta(\omega + \frac{3}{4}) = \pi\delta(\omega + \frac{3}{4}) + \pi\delta(\omega - \frac{3}{4}); -\pi \leq \omega \leq +\pi.$$

Iz ovog primera se može zaključiti bitna razlika između spektra kontinualnih i diskretnih signala. Naime spektar kontinualnih signala predstavlja niz periodičnih komponenata (signala) koje sadrži signal. Međutim kod diskretnih signala to nije slučaj jer komponente na nekim normalizovanim učestanostima nemoraju da daju periodične diskrete signale u vremenskom domenu. Dati signal ima diskretni FTD spektar međutim ovoj komponenti ne odgovara periodični diskretni signal kao što smo to pokazali u prvom poglavljju.

c.) Primenom Ojlerove transformacije za FTD se dobija  $S(j\omega) = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega - \frac{\pi}{5})n} - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega + \frac{\pi}{5})n}$ .

Rešenje ovog tabličnog izraza će biti

$$S(j\omega) = \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - e^{-j(\omega - \frac{\pi}{5})}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - e^{-j(\omega + \frac{\pi}{5})}} = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\omega) - \cos(\frac{\pi}{5})}.$$

d.) Izraz za FTD glasi  $S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^0 \left[ 5 \cos\left(\frac{3}{4}n\right) + 1.5 \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right) \right] \cdot e^{-jn\omega}$ . Rastavljanjem sume na parcijalne oblike dobija se  $S(j\omega) = 5 \sum_{n=-\infty}^0 \cos\left(\frac{3}{4}n\right) \cdot e^{-jn\omega} + 1.5 \sum_{n=-\infty}^0 \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right) \cdot e^{-jn\omega}$ .

Primenom Ojlerovog obrazca i smene  $l = -n$  sledi

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{5}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^0 e^{-j(\omega-\frac{3}{4})n} + \sum_{n=-\infty}^0 e^{-j(\omega+\frac{3}{4})n} \right] + \frac{1.5}{2j} \left[ \sum_{n=-\infty}^0 e^{-j(\omega-\frac{\pi}{5})n} + \sum_{n=-\infty}^0 e^{-j(\omega+\frac{\pi}{5})n} \right] = \\ &= \frac{5}{2} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} e^{j(\omega-\frac{3}{4})l} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{j(\omega+\frac{3}{4})l} \right] + \frac{1.5}{2j} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} e^{j(\omega-\frac{\pi}{5})l} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{j(\omega+\frac{\pi}{5})l} \right]. \end{aligned}$$

Dobijene sume u zagradama predstavljaju tablične izraze pa je tada konačno rešenje dato u obliku

$$S(j\omega) = \frac{5}{2} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{1 - e^{j\omega} \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\right)}{\cos(\omega) - \cos\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{1.5}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos(\omega) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}; \omega \in [-\pi, +\pi].$$

e.) Analogno predhodnim primerima imaćemo da je  $FTD\{s[n]\}$  jednako

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 7.8 \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) + 8.3 \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) \right] \cdot e^{-jn\omega} = 7.8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) e^{-jn\omega} + 8.3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) e^{-jn\omega}$$

Primenom Ojlerovog obrazca dobijamo

$$S(j\omega) = \frac{7.8}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{6})n} + \frac{7.8}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\frac{2\pi}{6})n} + \frac{8.3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{8})n} + \frac{8.3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\frac{2\pi}{8})n}.$$

Posmatrajući spektar u osnovnom intervalu za rezultat se dobija

$$S(j\omega) = 7.8 \cdot \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{6}\right) + 8.3 \cdot \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{8}\right) + 8.3 \cdot \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{8}\right) + 7.8 \cdot \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6}\right); -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

f.) U predhodnim primerima smo videli da je FTD zbir signala jednaka zbiru FTD-a pojedinih signala tj.

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [s_1[n] + s_2[n]] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n] \cdot e^{-jn\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n] \cdot e^{-jn\omega} = S_1(j\omega) + S_2(j\omega).$$

Primenom ove osobine dobijamo

$$S_1(j\omega) = 5 \cdot \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + 5 \cdot \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right); -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$S_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^5 (5-n) \cdot e^{-jn\omega} = 5 \cdot \sum_{n=0}^5 e^{-jn\omega} - \sum_{n=0}^5 n \cdot e^{-jn\omega} = 5 \cdot \sum_{n=0}^5 e^{-jn\omega} - j \cdot \frac{d}{d\omega} \left[ \sum_{n=0}^5 e^{-jn\omega} \right] = \frac{6e^{-j6\omega} - e^{-j\omega}}{[1 - e^{-j\omega}]^2}$$

Konačno rešenje će biti

$$S(e^{j\omega}) = 5 \cdot \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + 5 \cdot \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{6e^{-j6\omega} - e^{-j\omega}}{\left[1 - e^{-j\omega}\right]^2}; -\pi \leq \omega \leq +\pi.$$

g.)  $S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-5}^0 [5-n] \cdot e^{-jn\omega} + \sum_{n=1}^5 [5+n] \cdot e^{-jn\omega} - \sum_{n=-5}^0 [5-n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=1}^5 [5+n] \cdot e^{-jn\omega}$ . Razvojem date sume dobija se rezultat u obliku

$$S(e^{j\omega}) = 4e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega}; -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

h.) Odredimo prvo opšti oblik FTD-a proizvodu dva diskretna signala tj.

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [s_1[n] \cdot s_2[n]] \cdot e^{-jn\omega}.$$

Poznato je da je inverzna Furijeova transformacija diskretnog signala (IFTD)

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega.$$

Primenimo ovaj izraz na signal  $s_1[n]$ . Tada je FTD

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_1(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \cdot s_2[n] \right] \cdot e^{-jn\omega}.$$

Kako su suma i integral konačni, zamenom matematičkih operacija se dobija

$$S(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_1(e^{j\Omega}) \underbrace{\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n] \cdot e^{-j(\omega-\Omega)n} \right]}_{S_2(e^{j(\omega-\Omega)})} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_1(e^{j\Omega}) \cdot S_2(e^{j(\omega-\Omega)}) \cdot d\Omega = S_1(e^{j\omega}) * S_2(e^{j\omega}).$$

Odavde zaključujemo da je **FTD spektar proizvoda dva signala jednaka periodičnoj konvoluciji FTD spektara pojedinih diskretnih signala**. Primenjujući ovu osobinu prvo ćemo da odredimo FTD spektar pojedinih signala. Tako dobijamo da su FTD spektri pojedinih signala jednaka

$$S_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{15} a^n \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{15} [a \cdot e^{-j\omega}]^n = \frac{1 - [a \cdot e^{-j\omega}]^{16}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}; -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$S_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3 \cdot e^{-jn\omega} = 3 \cdot 2\pi\delta(\omega); -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Odnosno da je spektar proizvoda signala jednak

$$S(e^{j\omega}) = \frac{3 \cdot 2\pi}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - [a \cdot e^{-j\Omega}]^{16}}{1 - a \cdot e^{-j\Omega}} \cdot \delta(\omega - \Omega) \cdot d\Omega = 3 \cdot \frac{1 - [a \cdot e^{-j\omega}]^{16}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}; -\pi \leq \omega \leq +\pi.$$

i.) Izvedimo prvo izraz za FTD vremenski pomerenog signala. Neka je  $s'[n] = s[n - n_0]$ . Tada je FTD jednaka

$$\begin{aligned} S'(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s'[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n - n_0] e^{-jn\omega} \Big|_{k=n-n_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-jk\omega(k+n_0)} = \\ &= e^{-jn_0\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-jk\omega} = e^{-jn_0\omega} S(e^{jn\omega}). \end{aligned}$$

Odavde sledi da je FTD spektar traženog signala

$$S_1(e^{j\omega}) = 100 \cdot e^{-j100\omega}; -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

j.) Izvedimo FTD spektar izraza  $s[n] = s_1[n] * s_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[n-m] \cdot s_2[m]$ .

Dobjamo da je  $S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-m] \right] e^{-jn\omega}$ . Zamenom redosleda sumiranja sledi izraz

$S(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n-m] \cdot e^{-jn\omega} \right]$ . Proširimo izraz u zagradi sa  $e^{-jm\omega} \cdot e^{jm\omega} = 1$  što će da da

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot e^{-jm\omega} \cdot \underbrace{\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n-m] \cdot e^{-j(n-m)\omega} \right]}_{S_2(e^{j\omega})} = S_2(e^{j\omega}) \cdot \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot e^{-jm\omega}}_{S_1(e^{j\omega})} = S_1(e^{j\omega}) \cdot S_2(e^{j\omega})$$

Odavde sledi da je **FTD spektar konvolucionog signala jednaka proizvodu FTD spektra pojedinih signala**. Za date primere imaćemo:

j.1)

$$\left. \begin{aligned} S_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \cdot e^{-jn\omega} = 1; -\pi \leq \omega \leq \pi \\ S_2(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] \cdot e^{-jn\omega} = e^{-jn_0\omega}; -\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(e^{j\omega}) = S_1(e^{j\omega}) \cdot S_2(e^{j\omega}) = e^{-jn_0}; -\pi \leq \omega \leq \pi$$

j.2)

$$\left. \begin{aligned} S_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{-jn\omega} = 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}; \\ S_2(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-10] e^{-jn\omega} = e^{-j10\omega}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega) + \frac{e^{-j10\omega}}{(1-e^{-j\omega})}; |\omega| \leq \pi.$$

j.3)

$$\left. \begin{aligned} S_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{-jn\omega} = 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}; \\ S_2(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{1-a} \delta(\omega) + \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-e^{-j\omega})}; |\omega| \leq \pi.$$

k.1.) Izvedimo opšti izraz za FTD spektar traženog signala.

$$\begin{aligned} S(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n+m] \right] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n+m] \cdot e^{-j(n+m)\omega} \right] \cdot e^{jm\omega} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot S_2(e^{j\omega}) \cdot e^{jm\omega} = S_2(e^{j\omega}) \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot e^{-jm\omega} \right]^* = S_1^*(e^{j\omega}) \cdot S_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Ako su signali  $s_1[n] = s_2[n]$  tada je FTD spektar jednak  $S(e^{j\omega}) = S_1^*(e^{j\omega}) \cdot S_1(e^{j\omega}) = |S_1(e^{j\omega})|^2$  tj. rečima: **FTD spektar autokoreacionog signala je jednak spektralnoj gustini energije (snage) signala.**

Za dati primer imaćemo  $S_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\operatorname{arctg}\left(\frac{a \sin \omega}{1-a \cos \omega}\right)}}{\sqrt{1-2a \cos \omega+a^2}}$ ;  $|\omega| \leq \pi$  pa je traženi spektar dat u obliku

$$S(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-2a \cos \omega+a^2}; |\omega| \leq \pi.$$

k.2.) Izvedimo i za ovaj slučaj traženi izraz za proračun FTD spektra.

$$\begin{aligned} S(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m+n] \cdot s_2[m] \right] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_2[m] \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n+m] \cdot e^{-j(n+m)\omega} \right] \cdot e^{jm\omega} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_2[m] \cdot S_1(e^{j\omega}) \cdot e^{jm\omega} = S_1(e^{j\omega}) \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_2[m] \cdot e^{-jm\omega} \right]^* = S_1(e^{j\omega}) \cdot S_2^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Zaključak kojeg smo izveli u predhodnom primeru i ovde važi. Za date signale imaćemo

$$\left. \begin{array}{l} S_1(e^{j\omega}) = 1; |\omega| \leq \pi \\ S_2(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}; |\omega| \leq \pi \end{array} \right\} \Rightarrow S(e^{j\omega}) = S_1(e^{j\omega}) \cdot S_2^*(e^{j\omega}) = 1 \cdot e^{+j3\omega} = e^{j3\omega}; |\omega| \leq \pi.$$

k.3.) U predhodnim primerima smo već izveli izraz za FTD spektar prostoperiodičnih signala. Pa sledi

$$S_1(e^{j\omega}) = 2\pi \cdot \delta(\omega + \frac{2\pi}{3}) + 2\pi \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi}{3}) = S_1^*(e^{j\omega}); |\omega| \leq \pi$$

$$S_1(e^{j\omega}) = 2\pi \cdot \delta(\omega + \frac{5\pi}{4}) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + 2\pi \cdot \delta(\omega - \frac{5\pi}{4}) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}; |\omega| \leq \pi.$$

Na osnovu datih izraza vidimo da su delta impulsi pojedinih spektara na različitim položajima frekvencijske ose. Poznato nam je i to da proizvod dva delta impuls je različito od nule ako su oni smešteni na isto mesto. Kako ovaj uslov nije zadovoljen za ova dva data spektra sledi da je njihov proizvod jednak nuli po celoj frekvencijskoj osi. Ovaj zadatak smo rešavali u prvom poglavljju u kome smo ovom problemu pristupili u vremenskom domenu gde smo dobili isti rezultat.

I). Primena FTD analize u određivanju odziva nekog sistema, koji je opisan diferencnom jednačinom, napoznatu pobudu se svodi na nalaženje  $FTD\{\bullet\}$  obe strane diferencne jednačine.

Neka je data diferencna jednačina u obliku  $y[n] + \sum_{m=1}^M a_m \cdot y[n-m] = \sum_{k=0}^K b_k \cdot x[n-k]; M \geq K$ .

Primenimo  $FTD\{\bullet\}$  na obe strane jednačine. Na osnovu linearne osobine  $FTD\{\bullet\}$  dobija se jednačina

$$FTD\{y[n]\} + \sum_{m=1}^M a_m \cdot FTD\{y[n-m]\} = \sum_{k=0}^K b_k \cdot FTD\{x[n-k]\}; M \geq K.$$

Poznato je nadalje da je

$$FTD\{y[n-m]\} = e^{-jm\omega} \cdot FTD\{y[n]\} = e^{-jm\omega} \cdot Y(e^{j\omega})$$

$$FTD\{x[n-k]\} = e^{-jk\omega} \cdot FTD\{x[n]\} = e^{-jk\omega} \cdot X(e^{j\omega}).$$

Konačno se dobija jednačina

$$Y(e^{j\omega}) \cdot \left[ 1 + \sum_{m=1}^M a_m \cdot e^{-jm\omega} \right] = X(e^{j\omega}) \cdot \left[ \sum_{k=0}^K b_k \cdot e^{-jk\omega} \right]; M \geq K.$$

Ako nam je poznat FTD spektar pobudnog signala tj.  $X(e^{j\omega})$  tada izražavajući  $Y(e^{j\omega})$  dobijamo FTD spektar izlaznog signala tj. odziva

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k \cdot e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m \cdot e^{-jm\omega}} \cdot X(e^{j\omega}).$$

Primenom invrezne FTD ( $FTD^{-1}\{\bullet\}$ ) na spektar izlaznog signala možemo da odredimo vremenski oblik odziva.

1.1) Primenimo gore navedene operacije na datu diferencnu jednačinu. Tada dobijamo

$$Y(e^{j\omega}) \cdot \left[ 1 - \frac{3}{4} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{8} \cdot e^{-j2\omega} \right] = 2 \cdot X(e^{j\omega}). \quad \text{FTD spektar izlaznog signala će tada biti}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{8} \cdot e^{-j2\omega}} \cdot X(e^{j\omega}). \quad \text{Kako je } X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}, \text{ primenom razbijanja na}$$

parcijalnih razlomaka dati izraz, sledi

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2 \cdot e^{-j\omega}}{\left( 1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\omega} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} \right)} = \frac{-8}{1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\omega}} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}.$$

Primenom  $FTD^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$  nalazimo odziv sistema u vremenskom domenu na datu pobudu. Na osnovu tabličnog oblika izraza spektra izlaznog signala sledi da je odziv

$$y[n] = \left[ -8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \cdot u[n].$$

Prenosna funkcija datog sistema je

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{8} \cdot e^{-j2\omega}} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\omega}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}}.$$

Kako je prenosna funkcija diskretnog sistema FTD impulsnog odziva tj.  $H(e^{j\omega}) = FTD\{h[n]\}$ , impulsni odziv će tada biti

$$h[n] = \left[ -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \cdot u[n].$$

1.2.) FTD transformacija na datu diferencnu jednačinu daje

$$Y(e^{j\omega}) \cdot [1 - 5 \cdot e^{-j\omega} + 6 \cdot e^{-j2\omega}] = 2 \cdot X(e^{j\omega}).$$

Izražavanjem spektar izlaznog signala dobijamo jednačinu

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - 5 \cdot e^{-j\omega} + 6 \cdot e^{-j2\omega}} \cdot X(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - 3 \cdot e^{-j\omega}) \cdot (1 - 2 \cdot e^{-j\omega})} \cdot X(e^{j\omega}).$$

Prenosna funkcija diskretnog sistema će biti

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{(1 - 3 \cdot e^{-j\omega}) \cdot (1 - 2 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{6}{1 - 3 \cdot e^{-j\omega}} - \frac{4}{1 - 2 \cdot e^{-j\omega}},$$

pa je impulsni odziv datog sistema

$$h[n] = [6 \cdot (3)^n - 4 \cdot (2)^n] \cdot u[n].$$

Ako se na ulaz sistema dovodi impulsna pobuda tada je odziv jednak impulsnom odzivu sistema, pa sledi da je za  $x[n] = \delta[n]$  izlazni signal  $y[n] = h[n] = [6 \cdot (3)^n - 4 \cdot (2)^n] \cdot u[n]$ .

Ako na ulazu deluje pobuda  $x[n] = u[n]$  čiji je FTD spektar  $X(e^{j\omega}) = U(e^{j\omega}) = 2\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$ , spektar izlaznog signala će tada da glasi

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - 3 \cdot e^{-j\omega}) \cdot (1 - 2 \cdot e^{-j\omega})} \cdot \left[ 2\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \right] = 2\pi + \frac{2}{(1 - 3 \cdot e^{-j\omega}) \cdot (1 - 2 \cdot e^{-j\omega}) \cdot (1 - e^{-j\omega})}$$

Nakon rastavljanja zadnjeg člana u oblik parcijalnih razlomaka dobija se tablični izraz za spektar odziva

$$Y(e^{j\omega}) = 2\pi + \frac{9}{1 - 3 \cdot e^{-j\omega}} - \frac{8}{1 - 2 \cdot e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = 2\pi \cdot \delta[n] + [9 \cdot (3)^n - 8 \cdot (2)^n + 1] \cdot u[n].$$

**Zadatak 4.2.** Odrediti Z-transformaciju sledećih diskretnih signala

a.)  $s[n] = \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right); n \geq 0.$     b.)  $s[n] = 5 \cdot \cos\left(\frac{3}{4} \cdot n\right) + 1.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot n\right); n \leq 0.$     c.)  $s[n] = e^{\frac{j\pi}{3}}; n \geq 11.$

d.)  $s[n] = s_1[n] - s_2[n]$  ako su  $s_1[n] = \begin{cases} 5+n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 5-n; & 0 \leq n \leq 5 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$  i  $s_2[n] = \begin{cases} 5+n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$ .

e.1.)  $s[n] = s_1[n - n_0]$  ako je  $s_1[n] = 100 \cdot \delta[n]$  i  $n_0 = 100.$

e.2.)  $s[n] = s_1[n+5] - s_2[n-10]$  ako su  $s_1[n] = a^n; 0 \leq n \leq 15$  i  $s_2[n] = \left(-\frac{1}{a}\right)^n; -15 \leq n \leq 1.$

f.)  $s[n] = s_1[n] * s_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-m]$  za slučajevе

f.1.) $s_1[n] = \delta[n]$	f.2) $s_1[n] = u[n]$	f.3) $s_1[n] = u[n]$
$s_2[n] = \delta[n - n_0].$	$s_2[n] = \delta[n - 10].$	$s_2[n] = a^n; n \geq 0.$

g.1.)  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n+m]$  ako je  $s_1[n] = s_2[n] = a^n; n \geq 0.$

g.2.)  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[n+m] \cdot s_2[m]$  ako je  $s_1[n] = \delta[n]$  i  $s_2[n] = \delta[n-3].$

h.) Rešavanje diferencnih jednačina pomoću Z-transformacije za slučaj sa nultim početnim uslovima.

h.1)  $y[n] - \frac{3}{4} \cdot y[n-1] + \frac{1}{8} \cdot y[n-2] = 2 \cdot x[n-1]$  ako je  $x[n] = \delta[n].$

h.2)  $y[n] - 5 \cdot y[n-1] + 6 \cdot y[n-2] = 2 \cdot x[n]$  ako je  $x[n] = \delta[n]$  i  $x[n] = u[n].$

i.) Rešavanje diferencnih jednačina pomoću jednostrane Z-transformacije za slučaj sa nenultim početnim uslovima.

i.1.)  $y[n] + 3 \cdot y[n-1] = x[n]$  ako je  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$  i ako je  $y[-1] = 1.$

i.2.)  $y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n-1]$  ako je  $x[n] = u[n]$  i ako je  $y[-1] = 1.$

a.) Primenom Ojlerovog obrazca izraz za  $Z\{\bullet\}$  transformaciju će biti

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{j\frac{\pi}{5}n} - e^{-j\frac{\pi}{5}n}}{2j} \right] \cdot z^{-n} = \frac{1}{2j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{j\frac{\pi}{5} \cdot z^{-1}} \right]^n - \frac{1}{2j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-j\frac{\pi}{5} \cdot z^{-1}} \right]^n.$$

Date sume postoje ukoliko one konvergiraju. Uslovi koji zadovoljavaju konvergenciju datih suma su

$$\begin{aligned} \left| e^{j\frac{\pi}{5} \cdot z^{-1}} \right| < 1 &\Rightarrow \left| e^{j\frac{\pi}{5}} \right| \cdot \left| z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow \left| z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1 \\ \left| e^{-j\frac{\pi}{5} \cdot z^{-1}} \right| < 1 &\Rightarrow \left| e^{-j\frac{\pi}{5}} \right| \cdot \left| z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow \left| z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1. \end{aligned}$$

Iz datog sledi da ako je moduo kompleksne promenljive  $z$  veće od jedan tada gornje sume konvergiraju. Oblast u  $z$ -ravni za koje se zadovoljavaju gornji uslovi predstavlja oblast konvergencije tj. ROC. Znači oblast konvergencije datih suma a i same  $Z$ -transformacije je oblast koja se nalazi izvan jedinične kružnice  $Z$ -ravni. Primenom tabličnih rešenja dobijamo da je rešenje kompleksne funkcije

$$S(z) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\frac{\pi}{5}} \cdot z^{-1}} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}} \cdot z^{-1}} = \frac{z^{-1} \cdot \sin(\frac{\pi}{5})}{1 - z^{-1} \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{5}) + z^{-2}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{z^2 - z \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{5}) + 1}.$$

Polovi i nule date  $Z$ -transformacije su  $z_{p1} = e^{j\frac{\pi}{5}}$ ;  $z_{p2} = e^{-j\frac{\pi}{5}}$ . Prema tome rešenje  $Z$ -transformacije datog signala je

$$S(z) = \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{z^2 - z \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{5}) + 1}; ROC : |z| > 1.$$

b.) Primenom Ojlerove formule  $Z$ -transformacija signala će biti

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 e^{j\frac{3}{4}n} z^{-n} + \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 e^{-j\frac{3}{4}n} z^{-n} + \frac{1.5}{2j} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 e^{j\frac{\pi}{5}n} z^{-n} - \frac{1.5}{2j} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 e^{-j\frac{\pi}{5}n} z^{-n} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 \left[ e^{-j\frac{3}{4}z} \right]^{-n} + \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 \left[ e^{j\frac{3}{4}z} \right]^{-n} + \frac{1.5}{2j} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 \left[ e^{-j\frac{\pi}{5}z} \right]^{-n} - \frac{1.5}{2j} \cdot \sum_{n=-\infty}^0 \left[ e^{j\frac{\pi}{5}z} \right]^{-n} = smena = l = -n = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left[ e^{-j\frac{3}{4}z} \right]^l + \frac{5}{2} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left[ e^{j\frac{3}{4}z} \right]^l + \frac{1.5}{2j} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left[ e^{-j\frac{\pi}{5}z} \right]^l - \frac{1.5}{2j} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left[ e^{j\frac{\pi}{5}z} \right]^l \end{aligned}$$

Gornji izraz postoji ukoliko su uslovi konvergencije datih suma zadovoljene tj. ako važi

$$\left| e^{-j\frac{3}{4}z} \right| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\left| e^{-j\frac{3}{4}} \right|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow |z| < 1$$

$$\left| e^{j\frac{3}{4}z} \right| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\left| e^{j\frac{3}{4}} \right|} = 1 \Rightarrow |z| < 1$$

$$\left| e^{-j\frac{\pi}{5}z} \right| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\left| e^{-j\frac{\pi}{5}} \right|} = 1 \Rightarrow |z| < 1$$

$$\left| e^{j\frac{\pi}{5}z} \right| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\left| e^{j\frac{\pi}{5}} \right|} = 1 \Rightarrow |z| < 1$$

Iz gornjih uslova se uočava da je svaka suma konvergentna ako je kompleksna promenljiva  $z$  po modulu manja od jedinice tj. za proizvoljno odabrani kompleksni broj u  $Z$ -ravni koji se nalazi u unutrašnjosti jediničnog kruga, svaka suma je konvergentna pa i kompleksna funkcija  $S(z)$  postoji.

Odavde onda sledi da je oblast konvergencije Z-transformacije unutrašnjost jedinične kružnice u Z-ravni tj.  $ROC : |z| < 1$ . Nakon primene tabličnih rešenja datih suma izraz za Z-transformaciju će biti

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\frac{3}{4}} \cdot z} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\frac{3}{4}} \cdot z} + \frac{1.5}{2j} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}} \cdot z} - \frac{1.5}{2j} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\frac{\pi}{5}} \cdot z} = \\ &= 5 \cdot \frac{1 - z \cdot \cos(\frac{3}{4})}{1 - z \cdot 2 \cos(\frac{3}{4}) + z^2} - 1.5 \cdot \frac{z \cdot \sin(\frac{\pi}{5})}{1 - z \cdot 2 \cos(\frac{\pi}{5}) + z^2} = \frac{5 - 12.635 \cdot z + 12.201 \cdot z^2 - 4.535 \cdot z^3}{1 - 3.081 \cdot z + 4.367 \cdot z^2 - 3.081 \cdot z^3 + z^4}. \end{aligned}$$

Nule funkcije su:  $z_{n1} = 0.983629$ ;  $z_{n2} = 0.771685 + j0.571487$ ;  $z_{n3} = 0.771685 - j0.571487$ .

Polovi funkcije su:  $z_{p1} = e^{-j\frac{3}{4}}$ ;  $z_{p2} = e^{-j\frac{3}{4}}$ ;  $z_{p3} = e^{j\frac{\pi}{5}}$ ;  $z_{p4} = e^{-j\frac{\pi}{5}}$ .

$$S(z) = \frac{5 - 12.635 \cdot z + 12.201 \cdot z^2 - 4.535 \cdot z^3}{1 - 3.081 \cdot z + 4.367 \cdot z^2 - 3.081 \cdot z^3 + z^4}; ROC : |z| < 1.$$

c.) Dati signal je kompleksni diskretni signal. Njena Z-transformacija će biti po definiciji

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{3}n} \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1} \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1} \right]^n - \sum_{n=0}^{10} \left[ e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1} \right]^n.$$

Prva suma konvergira ako je  $\left| e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$ . Konačne sume uvek konvergiraju jer

sadrže konanačan broj članova te sledi da je druga suma konvergentna za bilo koju vrednost kompleksne promenljive  $z$ . Logično je tada da oblast konvergencije mora biti ta oblast u Z-ravni koja zadovoljava oba uslova konvergencije tj. oblast konvergencije Z-transformacije mora biti presek pojedinih oblasti. Odavde sledi da je  $ROC : |z| > 1$ . Primenom tabličnih rešenja gornjih suma, izraz za Z-transformaciju glasi

$$S(z) = \frac{1}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1}} - \frac{1 - \left[ e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1} \right]^{11}}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1}} = e^{j11\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{(z^{-1})^{11}}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot z^{-1}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{z^{10} \cdot \left( z - e^{j\frac{\pi}{3}} \right)}; ROC : |z| > 1.$$

Iz izraz se vidi da Z-transformacija nema nula. Jedan pol se nalazi u tački  $z_{p1} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$  dok je drugi lociran u kordinatni početak Z-ravni tj.  $z_{p2} = 0$ , i on je desetostruki pol naše funkcije.

d.) Nađimo prvo izraz za Z-transformaciju zbiru dva signala.

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [s_1[n] + s_2[n]]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [s_1[n]z^{-n} + s_2[n]z^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n]z^{-n} = S_1(z) + S_2(z)$$

Vidimo da je Z-transformacija zbiru dva signala jednaka zbiru njihovih Z-transformacija. Nakon ovog zaključka odredimo Z-transformaciju datog signala.

$$S(z) = \sum_{n=-5}^0 (5+n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^5 (5-n) \cdot z^{-n} - \sum_{n=-5}^0 (5+n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^5 (5-n) \cdot z^{-n}.$$

Razvojem date sume dobijamo

$$S(z) = 4 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4} = \frac{1 + 2 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 4 \cdot z^3}{z^4}.$$

Nule funkcije su:  $z_{n1} = -1.650629; z_{n2} = -0.174685 - j1.546869; z_{n3} = -0.174685 + j1.546869$ .

Z-transformacija ima samo jedan pol koji je četverostruki pol i koji se nalazi u kordinatnom početku. Odavde onda možemo da zaključimo da je oblast konvergencije cela Z-ravan izuzev tačke  $z = 0$  jer za tu vrednost funkcija  $S(z)$  nije definisana tj.  $ROC : |z| > 0$ .

e.1.) Izvedimo opšti izraz za Z-transformaciju vremenski pomerenog diskretnog signala.

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n-n_0]z^{-n} \Big| \begin{array}{l} k=n-n_0 \\ n=k+n_0 \end{array} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k]z^{-(k+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k]z^{-k} = z^{-n_0} S_1(z).$$

Kao što se to vidi vremensko pomeranje diskretnog signala u Z-domenu predstavlja množenje Z-transformacije nepomerenog signala sa kompleksnim brojevima  $z^{-n_0}$ . Na osnovu gore izведенog za navedeni primer signala dobijamo da je  $S_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 100 \cdot \delta[n] \cdot z^{-n} = 100 \cdot z^0 = 100$  pa će tražena

Z-transformacija biti  $S(z) = 100 \cdot z^{-100} = \frac{100}{z^{100}}$ . Dobijena kompleksna funkcija nema nule međutim ima jedan pol u tački  $z = 0$  koji je stotostruki. Odavde sledi da je oblast konvergencije  $ROC : |z| > 0$ . U ovom primeru je bitno uočiti da se tokom vremenskog pomeranja menja oblast konvergencije Z-transformacije rezultantnog signala tj. u opštem slučaju je nemoguće predvideti  $ROC$  rezultata pomeranja čisto na osnovu posmatranja  $ROC$  nepomerenog signala.

e.2) Na osnovu razmatranja predhodnog primera sledi da je  $Z\{s[n]\} = S(z) = z^5 \cdot S_1(z) - z^{-10} \cdot S_2(z)$ .

Z-transformacija pojedinih signala su:

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{15} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{15} [a \cdot z^{-1}]^n = \frac{1 - [a \cdot z^{-1}]^{16}}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z^{16} - a^{16}}{z^{15} \cdot (z - a)}$$

Z-transformacija signala  $s_1[n]$  ima jedan višestruki pol u tački  $z = 0$ . Nule polinoma u brojiocu su date formulom  $z_{nk} = a \cdot e^{j \frac{2\pi}{16} k}; k = 0, 1, \dots, 15$ . Odavde se vidi da nula za  $k = 0$  eliminiše pol  $z_p = a$ .

Odavde sledi da su nule Z-transformacije  $z_{nk} = a \cdot e^{j\frac{2\pi}{16}k}$ ;  $k = 1, \dots, 15$  koje su ekvidistantno raspoređene na kružnici poluprečnika  $r = a$ .

$$S_2(z) = \sum_{n=-15}^1 \left( -\frac{1}{a} \right)^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=-15}^0 \left[ \left( -\frac{1}{a} \right) \cdot z^{-1} \right]^n - \frac{1}{a} \cdot z^{-1} = -\frac{1}{a} \cdot z^{-1} + \sum_{l=0}^{15} [(-a) \cdot z]^l = -\frac{1 - (-a \cdot z)^{17}}{a \cdot z \cdot (1 + a \cdot z)}.$$

Dobijena Z-transformacija signala  $s_2[n]$  ima polove u tačkama  $z_{p1} = 0$ ;  $z_{p2} = -\frac{1}{a}$ . Nule su određene formulom  $z_{nk} = -\frac{1}{a} \cdot e^{j\frac{2\pi}{17}k}$ ;  $k = 0, 1, \dots, 16$ .

Uvrštavanjem izraza u traženu Z-transformaciju dobija se sledeći izraz

$$S(z) = z^5 \cdot \left[ \frac{z^{16} - a^{16}}{z^{15} \cdot (z - a)} \right] - z^{-10} \cdot \left[ -\frac{1 + (a \cdot z)^{17}}{a \cdot z \cdot (1 + a \cdot z)} \right] = z^{-10} \cdot \frac{z^{16} - a^{16}}{(z - a)} + z^{-10} \cdot \frac{1 + (a \cdot z)^{17}}{a \cdot z \cdot (1 + a \cdot z)}.$$

Primenom algebarskih identiteta  $z^{16} - a^{16} = (z^8 + a^8)(z^4 + a^4)(z^2 + a^2)(z + a)(z - a)$  i  $1 + (a \cdot z)^{17} = (1 + a \cdot z) \cdot \sum_{i=0}^{16} (-a \cdot z)^i$  izraz za Z-transformaciju će biti

$$S(z) = z^{-10} \cdot \left[ (z^8 + a^8)(z^4 + a^4)(z^2 + a^2)(z + a) + \frac{\sum_{i=0}^{16} (-az)^i}{az} \right] = \frac{1}{a} \frac{az \prod_{i=0}^3 (z^{2^i} + a^{2^i}) + \sum_{i=0}^{16} (-az)^i}{z^{11}}.$$

Kao što se to vidi Z-transformacija ima pol u tački  $z_p = 0$  koji je jedanaestostruki pol. Kako oblast konvergencije nemože da sadrži u sebi polove jer bi tada funkcija  $S(z)$  bila nedefinisana sledi da je  $ROC : |z| > 0$ . Nule Z-transformacije se mogu odrediti iz polinoma u brojiocu.

f.) Izvedimo prvo opšti oblik Z-transformacije konvolucije dva proizvoljna diskretna signala.

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n-m] \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n-m] \cdot z^{-n} \cdot (z^{-m} \cdot z^m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot z^{-m} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n-m] \cdot z^{-(n-m)} = S_1(z) \cdot S_2(z). \end{aligned}$$

Sledi da Z-transformacija konvolucije dva signala je jednak proizvodu Z-transformacija pojedinih signala.

Na osnovu gornjeg sledi da su rešenja za pojedine primere

f.1.)

$$\left. \begin{array}{l} S_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} = 1 \\ S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] \cdot z^{-n} = z^{-n_0} \end{array} \right\} \Rightarrow S(z) = 1 \cdot z^{-n_0} = z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}; ROC = ROC_1 \cap ROC_2 : |z| > 0.$$

Z-transformacija konvolucionog signala ima višestruki pol u tački  $z_p = 0$ .

f.2.)

$$\left. \begin{array}{l} S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}; ROC_1 : |z| > 1 \\ S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-10] \cdot z^{-n} = z^{-10}; ROC_2 : |z| > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S(z) = \frac{z^{-10}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z^9(z-1)}; ROC : |z| > 1.$$

Funkcija  $S(z)$  nema nule, jedan pol se nalazi u tački  $z_{p1} = 1$  dok je drugi devetostruki pol u tački  $z_{p2} = 0$ .

f.3.)

$$\left. \begin{array}{l} S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}; ROC_1 : |z| > |a| \\ S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}; ROC_2 : |z| > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S(z) = \frac{z^2}{(z-1) \cdot (z-a)}; ROC : \begin{cases} |z| > |a|; |a| > 1 \\ |z| > 1; |a| < 1 \end{cases}.$$

Dobijena Z-transformacija ima dvostruku nulu u tački  $z_n = 0$  i ima polove u tačkama  $z_{p1} = 1; z_{p2} = a$ .

g.1) Slično predhodnom zadatku izvešćemo opšti izraz za Z-transformaciju datog izraza.

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot s_2[n+m] \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n+m] \cdot z^{-n} \cdot (z^{-m} \cdot z^m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot z^m \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n+m] \cdot z^{-(n+m)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m] \cdot (z^{-1})^{-m} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n+m] \cdot z^{-(n+m)} = S_1(z^{-1}) \cdot S_2(z). \end{aligned}$$

Primenom izvedenog obrazca rešenje datog primera će biti

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z-a}; ROC_1 : |z| > |a|.$$

$$S_1(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^n = \frac{1}{1-a \cdot z} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a}; ROC_{11} : |z| < \left| \frac{1}{a} \right|.$$

Na osnovu dobijenih izraza sledi da je Z-transformacija korelacionog signala jednaka

$$S(z) = S_1(z^{-1}) \cdot S_1(z) = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z^2 - \frac{1+a^2}{a} \cdot z + 1} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{z}{(z-a) \cdot \left(z - \frac{1}{a}\right)}.$$

Z-transformacija ima nulu u tački  $z_n = 0$  i ima polove u tačkama  $z_{p1} = a; z_{p2} = \frac{1}{a}$ . Oblast konvergencije predstavlja presek oblasti konvergencije kompleksnih funkcija  $S_1(z)$  i  $S_2(z)$  tj.  $ROC : |a| < |z| < \left|\frac{1}{a}\right|$ .

Ovim smo onda u potpunosti definisali Z-transformaciju korelacionog signala.

g.2.) Analogno predhodnom primeru opšti oblik Z-transformacije glasi

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1[m+n] \cdot s_2[m] \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_2[m] \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n+m] \cdot z^{-n} \cdot (z^{-m} \cdot z^m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_2[m] \cdot z^m \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n+m] \cdot z^{-(n+m)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_2[m] \cdot (z^{-1})^{-m} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n+m] \cdot z^{-(n+m)} = S_1(z) \cdot S_2(z^{-1}). \end{aligned}$$

Pojedine Z-transformacije su  $S_1(z) = 1; \forall z$  i  $S_2(z) = \frac{1}{z^3}; |z| > 0$ . Odavde se onda dobija rešenje u obliku  $S(z) = 1 \cdot \frac{1}{z^{-3}} = z^3; ROC : \forall z$ . Dobijena funkcija nema polove ali ima trostruku nulu u tački  $z_n = 0$ . Kao što se to vidi oblast konvergencije obuhvata celu z-ravan tj. Z-transformacija postoji za bilo koju proizvoljno odabranu kompleksnu promenljivu  $z$ .

h) Rešavanje diferencnih jednačina pomoću dvostrane  $Z\{\bullet\}$  transformacije se vrši tako što se primenjuje transformacija na obe strane jednačine. Neka je data diferencna jednačina u obliku

$$y[n] + \sum_{m=1}^M a_m \cdot y[n-m] = \sum_{k=0}^K b_k \cdot x[n-k]; M \geq K.$$

Na osnovu već pokazanih osobina Z-transformacije važi da je  $Z\{y[n-m]\} = z^{-m} \cdot Z\{y[n]\} = z^{-m} \cdot Y(z)$  i da je  $Z\{x[n-k]\} = z^{-k} \cdot Z\{x[n]\} = z^{-k} \cdot X(z)$ . Primenom ovih osobina dobijamo

$$Z\{y[n]\} + \sum_{m=1}^M a_m \cdot Z\{y[n-m]\} = \sum_{k=0}^K b_k \cdot Z\{x[n-k]\}; M \geq K$$

$$Y(z) \cdot \left[ 1 + \sum_{m=1}^M a_m \cdot z^{-m} \right] = X(z) \cdot \left[ \sum_{k=0}^K b_k \cdot z^{-k} \right]; M \geq K.$$

Izražavanjem  $Y(z)$  dobijamo Z-transformaciju izlaznog signala na poznatu pobudu koja deluje na ulazu sistema i čija je Z-transformacija  $X(z)$

$$Y(z) = \left[ \frac{\sum_{k=0}^K b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m \cdot z^{-m}} \right] \cdot X(z); M \geq K.$$

Primenom inverzne Z-transformacije  $Z^{-1}\{\bullet\}$  možemo da odredimo odziv sistema  $y[n]$  tj. izlazni signal sistema na čijem ulazu deluje pobuda  $x[n]$ . Odnos Z-transformacija izlaza i ulaza određuje prenosnu funkciju sistema u Z-domenu i koja predstavlja Z-transformaciju impulsnog odziva sistema tj.  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h[n]\}$ .

h.1.) Primena Z-transformacije na datu diferencnu jednačinu daje

$$Y(z) \cdot \left[ 1 - \frac{3}{4} \cdot z^{-1} + \frac{1}{8} \cdot z^{-2} \right] = 2 \cdot X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} \cdot z^{-1} + \frac{1}{8} \cdot z^{-2}} \cdot z^{-1} = \frac{-8}{1 - \frac{1}{4} \cdot z^{-1}} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}.$$

Izraz za  $Y(z)$  u obliku parcijalnih suma nam omogućuje da nađemo inverznu Z-transformaciju u tabličnom obliku. Pa onda sledi da je odziv

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left[ -8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \cdot u[n].$$

Prenosna funkcija sistema je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} \cdot z^{-1} + \frac{1}{8} \cdot z^{-2}} = \frac{2 \cdot z^2}{z^2 - \frac{3}{4} \cdot z + \frac{1}{8}}.$$

Ova funkcija ima dvostruku nulu u tački  $z_n = 0$  i polove u tačkama  $z_{p1} = \frac{1}{4}; z_{p2} = \frac{1}{2}$ . Osobina realnih sistema je da su kauzalni tj. da im je oblast konvergencije izvan najudaljenijeg pola Z-transformacije. Odavde sledi da je  $ROC_h : |z| > \frac{1}{2}$ . Rastavljanjem izraza prenosne funkcije u oblik parcijalnih razlomaka i primene tablične inverzne transformacije dobijamo izraz za impulsni odziv sistema

$$h[n] = \left[ -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \cdot u[n].$$

h.2.) Analogno predhodnom zadatku za diferencnu jednačinu se dobija

$$Y(z) \cdot [1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}] = 2 \cdot X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{2}{1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}} \cdot z^{-1} = \frac{2}{1 - 3 \cdot z^{-1}} - \frac{2}{1 - 2 \cdot z^{-1}}.$$

Inverznom Z-transformacijom se dobija

$$y[n] = h[n] = [2 \cdot (3)^n - 2 \cdot (2)^n] \cdot u[n].$$

Na ulaznu pobudu oblika  $x[n] = u[n]$  dobijamo

$$Y(z) \cdot [1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}] = 2 \cdot X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{2}{1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Nakon rastavljanja u oblik parcijalnih razlomaka inverzna Z-transformacija će biti

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{8}{1 - 2 \cdot z^{-1}} + \frac{9}{1 - 3 \cdot z^{-1}} \Rightarrow y[n] = [1 - 8 \cdot (2)^n + 9 \cdot (3)^n] \cdot u[n].$$

i.1.) Primenom jednostrane Z-transformacije na diferencnu jednačinu sa nenultim početnim uslovima ima se

$$\begin{aligned} Y(z) + 3 \cdot [z^{-1} \cdot Y(z) + y[-1]] &= X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{X(z) - 3}{1 + 3 \cdot z^{-1}} = -\frac{3}{1 + 3 \cdot z^{-1}} + \frac{1}{(1 + 3 \cdot z^{-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right)} = \\ &= -\frac{3}{1 + 3 \cdot z^{-1}} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot z^{-1}} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} - \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot z^{-1}}. \end{aligned}$$

Primenom inverzne Z-transformacije

$$y[n] = \frac{1}{7} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n - 15 \cdot (-3)^n \right]; n \geq 0.$$

i.2.) Analogno predhodnom primeru

$$Y(z) - \frac{1}{2} \cdot [z^{-1} \cdot Y(z) + y[-1]] = X(z) - \frac{1}{2} \cdot [z^{-1} \cdot X(z) + x[-1]].$$

Kako je pobudni signal po definiciji različit od nule samo za  $n \geq 0$  sledi da je  $x[-1] = 0$ . Te stoga sredi

$$Y(z) - \frac{1}{2} \cdot [z^{-1} \cdot Y(z) + 1] = X(z) - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot X(z) \Rightarrow Y(z) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \right] - \frac{1}{2} = X(z) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \right].$$

Uvrštavanjem odgovarajuće Z-transformacije pobudnog signala  $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$  dobija se izraz

$$Y(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n + 1 \right] \cdot u[n].$$

**Zadatak 4.3.** Odrediti diskretnu Furijeovu transformaciju (DFT) sledećih diskretnih signala

a.)  $s[n] = 1; \forall n$ .      b.)  $s[n] = \cos\left(\frac{3}{4} \cdot n\right); \forall n$ .      c.)  $s[n] = e^{\frac{j\pi}{3}}; \forall n$ .

d.)  $s[n] = \begin{cases} 15; & 0 \leq n \leq 3 \\ 0; & 4 \leq n \leq 5 \end{cases}$  signal je dat u svojoj osnovnoj periodi.

e.)  $s[n] = \begin{cases} 5+n; & -5 \leq n \leq 0 \\ 5-n; & 0 \leq n \leq 5 \end{cases}$  signal je dat u svojoj osnovnoj periodi.

a.) U prvom poglavlju smo već razmatrali ovaj diskretni signal za koga smo zaključili da je periodičan sa

periodom  $N = 1$  i da je FTD spektar ovog signala  $S(e^{j\omega}) = 2\pi \cdot \delta(\omega); |\omega| \leq \pi$  tj. da se spektar sastoji iz jedne komponente koja se nalazi u tački  $\omega = 0$  i pokazuje na prisustvo diskretne jednosmerne komponente u signalu. Poznato je da se svaki periodičan diskretni signal može razviti u diskretni Furieov red koji uvek sadrži konačan broj periodičnih eksponencijalnih funkcija

$f_k[n] = e^{\frac{j2\pi}{N} nk}; k = 0, \dots, N-1$ . Doprinos tih funkcija u posmatranom signalu se proračunava pomoću diskretne Furieove transformacije  $S[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N} nk}; k = 0, \dots, N-1$ . Naj taj način signal  $s[n]$  se može pokazati kao linearna kombinacija eksponencijalnih periodičnih funkcija u obliku

$$\begin{aligned} s[n] &= \frac{1}{N} [S[0] \cdot f_0[n] + S[1] \cdot f_1[n] + S[2] \cdot f_2[n] + \dots + S[N-2] \cdot f_{N-2}[n] + S[N-1] \cdot f_{N-1}[n]] = \\ &= \frac{1}{N} \left[ S[0] \cdot e^{\frac{j2\pi}{N} 0n} + S[1] \cdot e^{\frac{j2\pi}{N} 1n} + S[2] \cdot e^{\frac{j2\pi}{N} 2n} + \dots + S[N-2] \cdot e^{\frac{j2\pi}{N} (N-2)n} + S[N-1] \cdot e^{\frac{j2\pi}{N} (N-1)n} \right]. \end{aligned}$$

Iz gornjeg tada sledi da su kompleksni koeficijenti diskretnog Furieovog reda

$$S[k] = \sum_{n=0}^0 s[n] \cdot e^{-j2\pi nk}; k = 0 \Rightarrow S[0] = 1$$

pa i diskretni spektar (DFT) signala sadrži samo jednu komponentu

$$S[k] = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 0; & k \neq 0 \end{cases}; k = 0, \dots, N-1.$$

- b.) Posmatrani periodični diskretni signal ima periodu  $N = 24$  iz čega sledi da ga možemo prikazati kao linearu kombinaciju dvadesetčetiri kompleksnih periodičnih signala oblika

$$f_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{24}nk}; k = 0, \dots, 23$$

gde ćemo udeo pojedinih signala proračunati po izrazu  $S[k] = \sum_{n=0}^{23} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{24}nk}; k = 0, \dots, 23$ .

Primenom Ojlerovog obrazca za izraz diskretne Furieove transformacije dobijamo

$$\begin{aligned} S[k] &= 7.8 \cdot \sum_{n=0}^{23} \left[ \frac{e^{j\frac{2\pi}{6}n} + e^{-j\frac{2\pi}{6}n}}{2} \right] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{24}nk} + 8.3 \cdot \sum_{n=0}^{23} \left[ \frac{e^{j\frac{2\pi}{8}n} - e^{-j\frac{2\pi}{8}n}}{2j} \right] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{24}nk} = \\ &= \frac{7.8}{2} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-4)} + \frac{7.8}{2} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k+4)} + \frac{8.3}{2j} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-3)} - \frac{8.3}{2j} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k+3)}. \end{aligned}$$

Izrazi  $k+4$  i  $k+3$  s mogu prikazati i u obliku  $k+24-20$  i  $k+24-21$ . Smenom ovih oblika u gornju jednačinu i deljenjem u eksponentu sa  $N = 24$  dobijamo

$$S[k] = \frac{7.8}{2} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-4)} + \frac{7.8}{2} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-20)} + \frac{8.3}{2j} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-3)} - \frac{8.3}{2j} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-21)}.$$

Pokazali smo da je spektar diskretnog signala uvek periodična kompleksna funkcija sa periodom  $2\pi$  ili ako se posmatra diskretizovani spektar tada je ona periodična sa  $K = N$  gde je  $K$  perioda u  $k$ -domenu. Odavde onda sledi da su komponente, u posmatranom intervalu  $k \in [0, 1, \dots, N-1]$ , koje određuje druga i četvrta suma zapravo komponente koje se nalaze u okolini  $1 \cdot K$  u tačkama  $K-k_1$  i  $K-k_2$ .

Posmatrajmo posebno rešenja pojedinih sumi.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-4)} &= \frac{1 - e^{-j2\pi(k-4)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{24}(k-4)}} = \frac{e^{-j\pi(k-4)}}{e^{-j\frac{\pi}{24}(k-4)}} \cdot 24 \cdot \frac{\frac{\sin \pi(k-4)}{\pi(k-4)}}{\frac{\sin \frac{\pi}{24}(k-4)}{\frac{\pi}{24}(k-4)}} = 24 \cdot \delta[k-4] = \begin{cases} 0; k \neq 4 \\ 24; k = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-20)} &= \frac{1 - e^{-j2\pi(k-20)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{24}(k-20)}} = \frac{e^{-j\pi(k-20)}}{e^{-j\frac{\pi}{24}(k-20)}} \cdot 24 \cdot \frac{\frac{\sin \pi(k-20)}{\pi(k-20)}}{\frac{\sin \frac{\pi}{24}(k-20)}{\frac{\pi}{24}(k-20)}} = 24 \cdot \delta[k-20] = \begin{cases} 0; k \neq 20 \\ 24; k = 20 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-3)} = \frac{1 - e^{-j2\pi(k-3)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{24}(k-3)}} = \frac{e^{-j\pi(k-3)}}{e^{-j\frac{\pi}{24}(k-3)}} \cdot 24 \cdot \frac{\frac{\sin \pi(k-3)}{\pi(k-3)}}{\frac{\sin \frac{\pi}{24}(k-3)}{\frac{\pi}{24}(k-3)}}$$

$$\sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(k-21)} = \frac{1 - e^{-j2\pi(k-21)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{24}(k-21)}} = \frac{e^{-j\pi(k-21)}}{e^{-j\frac{\pi}{24}(k-21)}} \cdot 24 \cdot \frac{\frac{\sin \pi(k-21)}{\pi(k-21)}}{\frac{\sin \frac{\pi}{24}(k-21)}{\frac{\pi}{24}(k-21)}}$$

Odavde dobijamo da je izraz za proračun koeficijenata

$$S[k] = \frac{8.3}{2j} \cdot 24 \cdot \delta[k-3] + \frac{7.8}{2} \cdot 24 \cdot \delta[k-4] + \frac{7.8}{2} \cdot 24 \cdot \delta[k-20] - \frac{8.3}{2j} \cdot 24 \cdot \delta[k-21] =$$

$$= \begin{cases} 93.6; k = 4, 20 \\ 99.6 \cdot e^{\frac{\pi}{2}}; k = 3 \\ 99.6 \cdot e^{\frac{\pi}{2}}; k = 0, 1, \dots, 23 \\ 0; k \neq 3, 4, 20, 21 \end{cases}$$

Kao što se vidi diskretni spektar ima samo četiri komponente različite od nule pa je stoga i signal  $s[n]$  oblika  $s[n] = \frac{1}{24} \cdot [S[3] \cdot f_3[n] + S[4] \cdot f_4[n] + S[4] \cdot f_{20}[n] + S[3] \cdot f_{21}[n]]$ .

c.) Dati signal je periodičan sa periodom  $N = 6$  iz čega onda sledi da opis ovog signala linearnom kombinacijom periodičnih eksponencijalnih funkcija sadrži samo šest komponenata. Navedimo te komponente

$$f_k[n] = \left\{ e^{j\frac{2\pi}{6}nk}; k = 0, 1, \dots, 5 \mid e^{j\frac{2\pi}{6}n0} = 1, e^{j\frac{2\pi}{6}n1}, e^{j\frac{2\pi}{6}n2}, e^{j\frac{2\pi}{6}n3}, e^{j\frac{2\pi}{6}n4}, e^{j\frac{2\pi}{6}n5} \right\}.$$

Doprinos pojedinih funkcija se računa pomoću diskretne Furieove transformacije. Izvođenjem dobijamo

$$S[k] = \sum_{n=0}^5 e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} = \sum_{n=0}^5 e^{-j\frac{2\pi}{6}n(k-1)} = \frac{1 - e^{-j2\pi(k-1)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{6}(k-1)}} = 6 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{6}(k-1)} \cdot \frac{\frac{\sin \pi(k-1)}{\pi(k-1)}}{\frac{\sin \frac{\pi}{6}(k-1)}{\frac{\pi}{6}(k-1)}}$$

Vidimo da u diskretnom spektru postoji samo jedna nenulta komponenta za  $k = 1$  dok su sve ostale jednakе nuli. Odavde onda sledi da u obliku linearne kombinacije postoji samo jedna kompleksna funkcija tj.

$$s[n] = \frac{1}{6} \cdot [0 \cdot f_0[n] + 6 \cdot f_1[n] + 0 \cdot f_2[n] + 0 \cdot f_3[n] + 0 \cdot f_4[n] + 0 \cdot f_5[n]] = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}n} = e^{j\frac{\pi}{3}n}.$$

d.) Po definiciji datog signala uočavamo da je perioda ovog signala  $N = 6$ , pa je njen opis pomoću diskretnog Furieovog reda  $s[n] = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^5 S[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}nk}; n = 0, 1, \dots, 5$ . Furieovi koeficijenti  $S[k]$  će biti

$$S[k] = \sum_{n=0}^5 s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} = \sum_{n=0}^3 15 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} = 15 \cdot \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{6}k}} = 15 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k} \cdot 4 \cdot \frac{\frac{\sin \frac{2\pi}{3}k}{\frac{2\pi}{3}k}}{\frac{\sin \frac{\pi}{6}k}{\frac{\pi}{6}k}}; k = 0, 1, \dots, 5.$$

Za različite vrednosti  $k$ , kompleksni koeficijenti diskretnog Furieovog reda će imati vrednosti

$$S[k] = \left\{ (komponenta, koeficijent) | (0, 60), \left( 1, 15 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right), (2, 15), (3, 0), (4, 15), \left( 5, 15 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) \right\}.$$

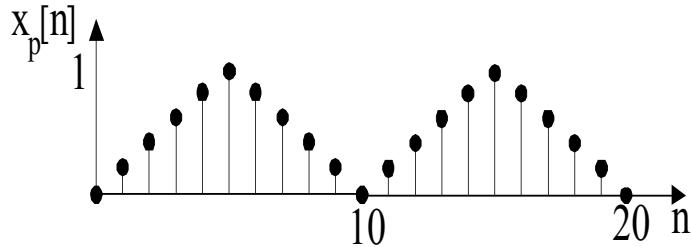
Smenom datih vrednosti koeficijenata i kompleksnih funkcija u izraz za signal  $s[n]$ , dobijamo

$$\begin{aligned} s[n] &= \frac{1}{6} \cdot \left[ 60 + 15\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}n} + 15 \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}2n} + 0 + 15 \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}4n} - 15\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}5n} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[ 60 + 15\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}n} + 15 \cdot e^{j\frac{2\pi}{6}2n} + 0 + 15 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}2n} + 15\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}n} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[ 60 + 30 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}n - \frac{\pi}{2}\right) + 30 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}2n\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[ 60 + 30 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6}n\right) + 30 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}2n\right) \right] = \\ &= 10 + 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6}n\right) + 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}2n\right). \end{aligned}$$

Kao što se vidi dat periodični signal se može predstaviti u obliku diskretnog Furieovog reda koji za dati primer ima tri komponente, jednu jednosmernu komponentu i dve naizmenične komponente.

**Zadatak 4.4.** Data su četiri vremenski diskretni signala. Klasifikovati njihovu DFT-u kao realnu, imaginarnu, ili kompleksnu. Predpostaviti da je N=10 u svim slučajevima.

a)



Prvo što možemo zaključiti da signal  $x_p[n]$  predstavlja parnu funkciju, pa na osnovu nekog iskustva možemo očekivati da ćemo dobiti realnu DFT.

Primenom izraza za DFT

$$X_p[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{n \cdot k}{N}}; k = 0, 1, \dots, N-1$$

sledi da je:

$$\begin{aligned} X_p[k] = & 0.2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{5} \cdot k} + 0.4 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{5} \cdot k} + 0.6 \cdot e^{-j \frac{3\pi}{5} \cdot k} + 0.8 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \pi \cdot k} + \\ & + 0.8 \cdot e^{-j \frac{6\pi}{5} \cdot k} + 0.6 \cdot e^{-j \frac{7\pi}{5} \cdot k} + 0.4 \cdot e^{-j \frac{8\pi}{5} \cdot k} + 0.2 \cdot e^{-j \frac{9\pi}{5} \cdot k}. \end{aligned}$$

Uparivanjem simetričnih članova i sredjivanjem izraza dobija se:

$$0.2 \cdot \left( e^{-j \frac{\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{9\pi}{5} \cdot k} \right) = 0.4 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \left( \frac{e^{-j \frac{4\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{4\pi}{5} \cdot k}}{2} \right) = 0.4 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{5} \cdot k\right)$$

$$0.4 \cdot \left( e^{-j \frac{2\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{8\pi}{5} \cdot k} \right) = 0.8 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \left( \frac{e^{-j \frac{3\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{3\pi}{5} \cdot k}}{2} \right) = 0.8 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{5} \cdot k\right)$$

$$0.6 \cdot \left( e^{-j \frac{3\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{7\pi}{5} \cdot k} \right) = 1.2 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \left( \frac{e^{-j \frac{2\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{2\pi}{5} \cdot k}}{2} \right) = 1.2 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot k\right)$$

$$0.8 \cdot \left( e^{-j \frac{4\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{6\pi}{5} \cdot k} \right) = 1.6 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \left( \frac{e^{-j \frac{\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \frac{\pi}{5} \cdot k}}{2} \right) = 1.6 \cdot e^{-j \pi \cdot k} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot k\right).$$

Konačno se za DFT signala dobija izraz

$$X_p[k] = (-1)^k \cdot \left[ 1 + 1.6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot k\right) + 1.2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot k\right) + 0.8 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{5} \cdot k\right) + 0.4 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{5} \cdot k\right) \right].$$

Kao što smo i predpostavili izraz za DFT datog signala je realna funkcija promenljive  $k$ .

Amplitudski i fazni spektar se određuje prema izrazima:

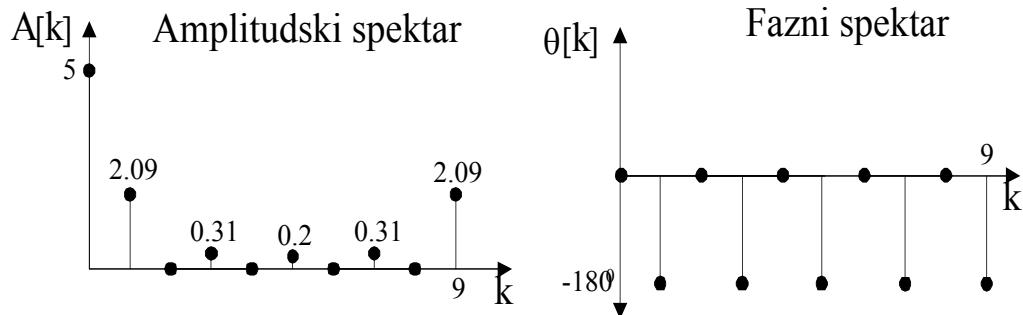
$$|X_p[k]| = A[k] = \sqrt{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}^2 + \operatorname{Im}\{X_p[k]\}^2},$$

$$\theta[k] = -\arctg \left( \frac{\text{Im}\{X_p[k]\}}{\text{Re}\{X_p[k]\}} \right).$$

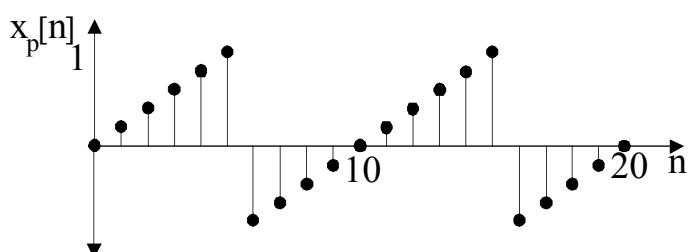
k	A[k]	$\theta[k]$	k	A[k]	$\theta[k]$
0	5	$0^0$	5	0.2	$-180^0$
1	2.09	$-180^0$	6	0	$0^0$
2	0	$0^0$	7	0.31	$-180^0$
3	0.31	$-180^0$	8	0	$0^0$
4	0	$0^0$	9	2.09	$-180^0$

Kako je u ovom slučaju imaginarni deo jednak nuli, za fazno kašnjenje se dobija uvek vrednost nula. Međutim kako je amplitudska karakteristika uvek parna funkcija, negativne realne brojeve možemo da prikažemo samo tako što odgovarajućoj komponenti dodamo fazu  $\pm\pi$  jer je  $-1 = e^{j\pi} = e^{-j\pi}$ .

Amplitudski i fazni spektar su prikazani na slici.



b



Rešenje:

Sa slike vidimo da signal nije ni parna ni neparna funkcija, pa možemo očekivati kompleksnu DFT.

$$X_p[k] = 0.2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{5} \cdot k} + 0.4 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5} \cdot k} + 0.6 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{5} \cdot k} + 0.8 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{5} \cdot k} + e^{-j\cdot\pi \cdot k} - \\ - 0.8 \cdot e^{-j\frac{6\pi}{5} \cdot k} - 0.6 \cdot e^{-j\frac{7\pi}{5} \cdot k} - 0.4 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{5} \cdot k} - 0.2 \cdot e^{-j\frac{9\pi}{5} \cdot k}.$$

Sličnim sređivanjem izraza, kao u predhodnom zadatku, za rezultat se dobija:

$$X_p[k] = (-1)^k \cdot \left[ 1 + j \cdot \left[ 1.6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot k\right) + 1.2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot k\right) + 0.8 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{5} \cdot k\right) + 0.4 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{5} \cdot k\right) \right] \right]$$

Prema očekivanjima dobili smo kompleksnu DFT, pošto imamo i realni i imaginarni deo.

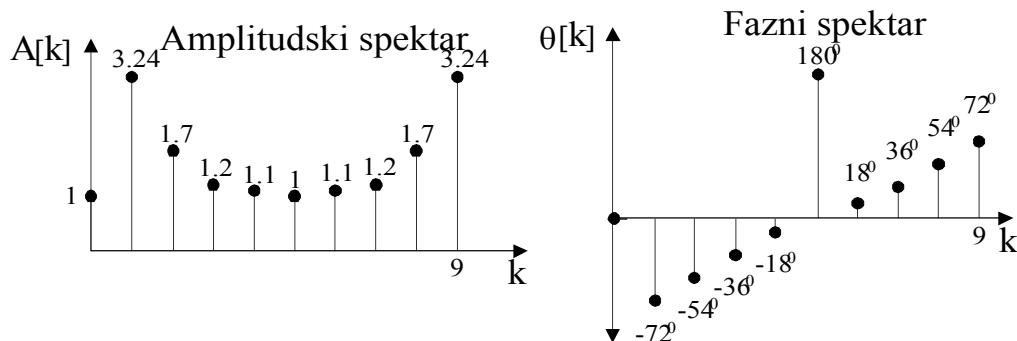
Amplitudska i fazna karakteristika se računa prema izrazima:

$$|X_p[k]| = A[k] = \sqrt{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}^2 + \operatorname{Im}\{X_p[k]\}^2},$$

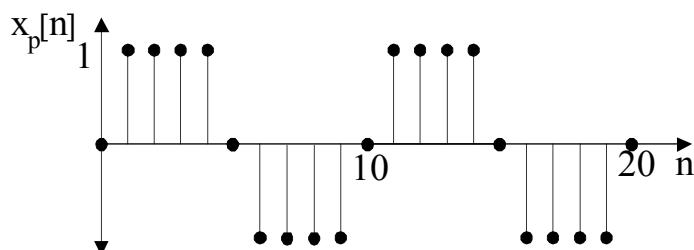
$$\theta[k] = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\{X_p[k]\}}{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}}\right).$$

k	A[k]	$\theta[k]$	k	A[k]	$\theta[k]$
0	1	$0^\circ$	5	1	$180^\circ$
1	3.24	$-72^\circ$	6	1.1	$18^\circ$
2	1.7	$-54^\circ$	7	1.2	$36^\circ$
3	1.2	$-36^\circ$	8	1.7	$54^\circ$
4	1.1	$-18^\circ$	9	3.24	$72^\circ$

Na osnovu izračunatih vrednosti za amplitudski i fazni spektar se dobija:



c)



Rešenje:

Primećujemo da je signal neparna funkcija, pa očekujemo imaginarnu DFT.

$$X_p[k] = e^{-j \cdot \frac{\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \cdot \frac{3\pi}{5} \cdot k} + e^{-j \cdot \frac{4\pi}{5} \cdot k} - e^{-j \cdot \frac{6\pi}{5} \cdot k} - e^{-j \cdot \frac{7\pi}{5} \cdot k} - e^{-j \cdot \frac{8\pi}{5} \cdot k} - e^{-j \cdot \frac{9\pi}{5} \cdot k}.$$

Posle sređivanja izraza slično kao u predhodnim zadacima dobija se:

$$X_p[k] = (-1)^k \cdot 2 \cdot j \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot k\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot k\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5} \cdot k\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} \cdot k\right) \right].$$

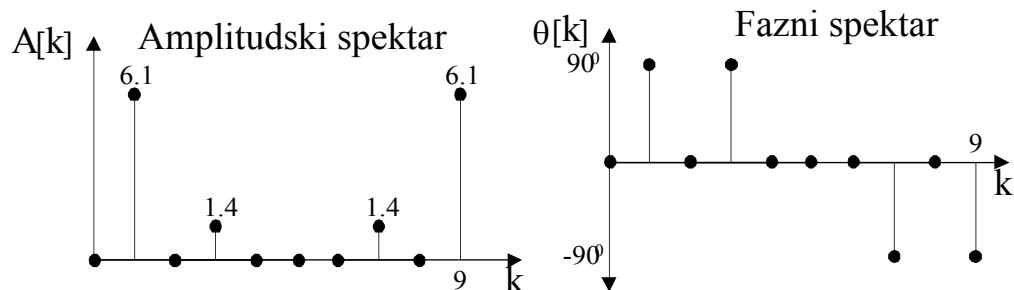
Vidimo da imamo samo imaginarni deo, pa smo dobili imaginarnu DFT.

$$|X_p[k]| = A[k] = \sqrt{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}^2 + \operatorname{Im}\{X_p[k]\}^2},$$

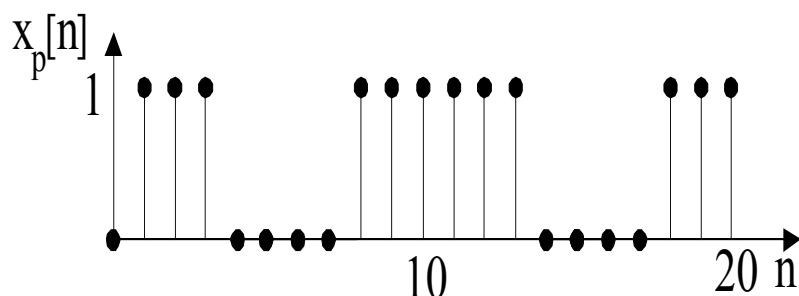
$$\theta[k] = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\{X_p[k]\}}{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}}\right).$$

k	A[k]	$\theta[k]$	k	A[k]	$\theta[k]$
0	0	$0^0$	5	0	$0^0$
1	6.1	$90^0$	6	0	$0^0$
2	0	$0^0$	7	1.4	$-90^0$
3	1.4	$90^0$	8	0	$0^0$
4	0	$0^0$	9	6.1	$-90^0$

Na osnovu izračunatih vrednosti za amplitudski i fazni spektar se dobija:



d)



Rešenje:

U ovom slučaju možemo primetiti da signal ne predstavlja ni parnu ni neparnu funkciju, pa opet očekujemo za rezultat kompleksnu DFT.

$$X_p[k] = 1 + e^{-j\frac{\pi}{5}k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + e^{-j\frac{3\pi}{5}k} + e^{-j\frac{8\pi}{5}k} + e^{-j\frac{9\pi}{5}k}.$$

Posle sređivanja izraza sledi da je konačno:

$$X_p[k] = 1 + e^{-j\frac{3\pi}{5}k} + (-1)^k \cdot 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{5} \cdot k\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5} \cdot k\right) \right].$$

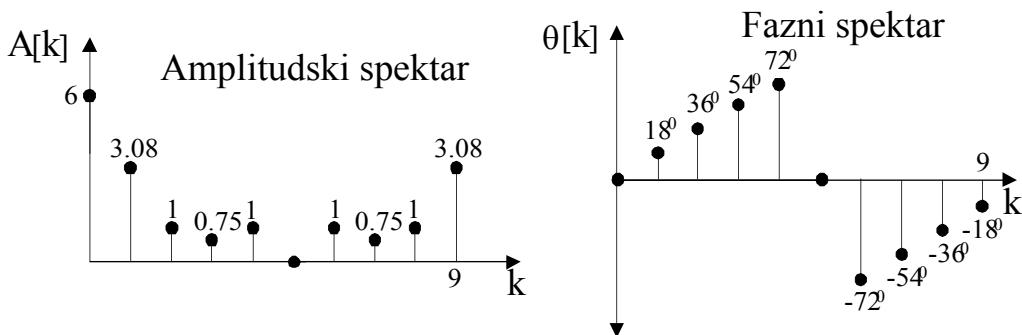
Prema očekivanjima dobili smo kompleksnu DFT.

$$\|X_p[k]\| = A[k] = \sqrt{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}^2 + \operatorname{Im}\{X_p[k]\}^2},$$

$$\theta[k] = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\{X_p[k]\}}{\operatorname{Re}\{X_p[k]\}}\right).$$

k	A[k]	$\theta[k]$	K	A[k]	$\theta[k]$
0	6	$0^0$	5	0	$0^0$
1	3.08	$18^0$	6	1	$-72^0$
2	1	$36^0$	7	0.75	$-54^0$
3	0.75	$54^0$	8	1	$-36^0$
4	1	$72^0$	9	3.08	$-18^0$

Na osnovu izračunatih vrednosti za amplitudski i fazni spektar se dobija:



## 5. Diskretni sistemi sa konačnim impulsnim odzivom, FIR sistemi

Ono što ističe značaj ovih sistema u odnosu na IIR sisteme je njihova linearna fazna karakteristika.

Zavisno od toga dali se zadovoljavaju uslovi konstantnog **grupnog i faznog kašnjenja**,

$$\theta_g = -\frac{d}{d\omega}[\theta(\omega)] = \text{const},$$

$$\theta_f = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = \text{const},$$

FIR sistemi se dele u četiri klase:

- 1) **sistemi sa simetričnim impulsnim odzivom čija je dužina neparan broj ( I tip FIR ),**  $\theta_g = \text{const}, \theta_f = \text{const},$
- 2) **sistemi sa simetričnim impulsnim odzivom čija je dužina paran broj ( II tip FIR ),**  $\theta_g = \text{const}, \theta_f = \text{const},$
- 3) **sistemi sa antisimetričnim impulsnim odzivom čija je dužina neparan broj ( III tip FIR ),**  $\theta_g = \text{const},$
- 4) **sistemi sa antisimetričnim impulsnim odzivom čija je dužina paran broj ( IV tip FIR ),**  $\theta_g = \text{const}.$

Projektovanje FIR sistema se može izvršiti na više načina.

### I način.

Na osnovu specifikacija se odredi idealna diskretna prenosna funkcija. Nakon toga se odredi impulsni odziv idealnog sistema. S obzirom da idealni sistemi imaju impulsni odziv beskonačnog trajanja, ona se ograničava nekom od prozorskih funkcija. Ovaj postupak je poznat pod nazivom **prozoriranje**. Često korištene prozorske funkcije su:

### Jedinična prozorska funkcija

$$w[n] = \begin{cases} 1; & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases},$$

### Hanova prozorska funkcija

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} \cdot n\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases},$$

## Hamingova prozorska funkcija

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} \cdot n\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases},$$

## Blekmanova prozorska funkcija

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} \cdot n\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N-1} \cdot n\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}.$$

Zbog ograničavanja impulsnog odziva u amplitudskoj karakteristici obavezno nastaju oscilacije koje su poznate pod nazivom **Gibsove oscilacije**. Da bi se njihova pojava ublažila poželjno je da prozorske funkcije na krajevima intervala imaju blago opadanje ka nuli.

### II način.

Razvoj željene amplitudske karakteristike u Furijeov red. Kako Furijeovi koeficijenti zapravo predstavljaju vrednosti impulsnog odziva sledi da se razvojem u red odmah dobija i impulsni odziv. Mana ovog postupka projektovanja je slaba konvergencija reda što prouzrokuje oscilacije u amplitudskoj karakteristici koje smo već opisali malopre. Postupak potiskivanja ovih oscilacija je primena prozoriranja impulsnog odziva.

Osim ovih načina postoje još brojni postupci projektovanja FIR sistema. Većina njih zahteva relativno složene proračune, čak i posebna računarska algoritamska rešenja, koja su izvan domašaja ovog udžbenika..

**Zadatak 5.1.** Nerekurzivni filter je okarakterisan prenosnom funkcijom

$$a) \quad H(z) = \frac{1 + 2 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 4 \cdot z^3 + 3 \cdot z^4 + 2 \cdot z^5 + z^6}{z^6}$$

$$b) \quad H(z) = \frac{1 - 2 \cdot z + 3 \cdot z^2 - 4 \cdot z^3 + 3 \cdot z^4 - 2 \cdot z^5 + z^6}{z^6}.$$

Odrediti grupno kašnjenje zadatih filtera.

Grupno kašnjenje filtra predstavlja prvi izvod fazne karakteristike sistema po kružnoj (normalizovanoj) učestanosti tj.

$$\theta_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}.$$

U toku projektovanja i realizacije različitih tipova filtera, bez obzira dali se radilo o analognim ili diskretnim sistemima, uvek se teži da fazna karakteristika sistema bude što je moguće linearnija tj. da je grupno kašnjenje konstantno u celom frekventnom opsegu ili ako to nije moguće zadovoljiti onda barem u opsegu od značaja.

a) Prenosna funkcija se može napisati u obliku

$$H(z) = z^{-6} \cdot (1 + 2 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 4 \cdot z^3 + 3 \cdot z^4 + 2 \cdot z^5 + z^6)$$

Što će nakon množenja dati

$$H(z) = z^{-6} + 2 \cdot z^{-5} + 3 \cdot z^{-4} + 4 \cdot z^{-3} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-1} + 1.$$

Ako se sada primeni smena  $z = e^{j\omega}$  dobija se

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j6\omega} + 2 \cdot e^{-j5\omega} + 3 \cdot e^{-j4\omega} + 4 \cdot e^{-j3\omega} + 3 \cdot e^{-j2\omega} + 2 \cdot e^{-j\omega} + 1.$$

Izvlačenjem zajedničkog eksponencijalnog faktora dolazi se do izraza

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega} \cdot (e^{-j3\omega} + 2 \cdot e^{-j2\omega} + 3 \cdot e^{-j\omega} + 4 + 3 \cdot e^{j\omega} + 2 \cdot e^{j2\omega} + e^{j3\omega}).$$

Primenom Ojlerovih obrazaca konačno se nalazi

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega} \cdot (4 + 6 \cdot \cos(\omega) + 4 \cdot \cos(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \cos(3 \cdot \omega)).$$

Odatle se onda vidi da je amplitudska karakteristika prenosne funkcije data jednačinom

$$A(\omega) = |4 + 6 \cdot \cos(\omega) + 4 \cdot \cos(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \cos(3 \cdot \omega)|,$$

dok je fazna karakteristika data jednačinom

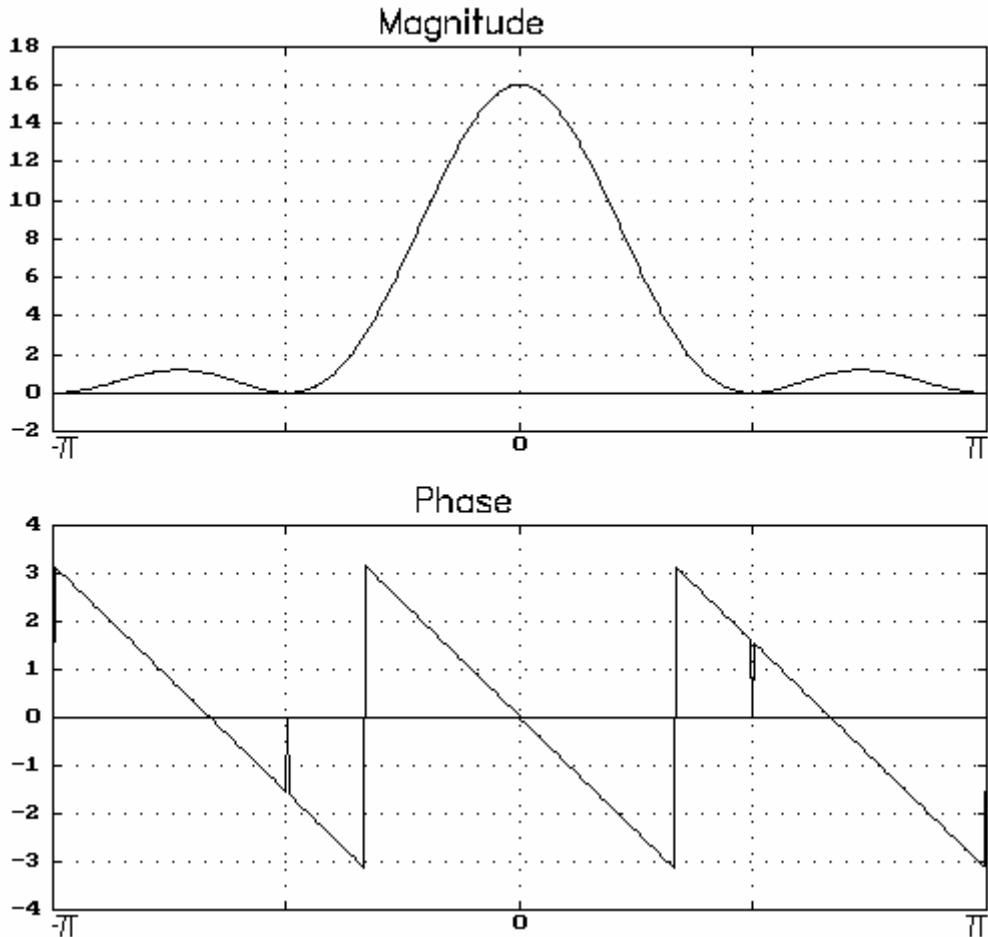
$$\theta(\omega) = -3 \cdot \omega.$$

Nalaženjem prvog izvoda fazne karakteristike po promenljivoj  $\omega$  grupno kašnjenje će biti

$$\theta_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega}[-3 \cdot \omega] = 3 = \text{const.}$$

Kako je grupno kašnjenje konstantno zaključujemo da je fazna karakteristika linearna što se moglo uočiti i na osnovu posmatranja same fazne karakteristike.

Amplitudska i fazna karakteristika sistema je prikazana na slici.



b) Slična analiza se može izvesti i za drugi primer. Prenosna funkcija se može napisati u obliku

$$H(z) = z^{-6} \cdot (1 - 2 \cdot z + 3 \cdot z^2 - 4 \cdot z^3 + 3 \cdot z^4 - 2 \cdot z^5 + z^6)$$

što će nakon množenja dati

$$H(z) = z^{-6} - 2 \cdot z^{-5} + 3 \cdot z^{-4} - 4 \cdot z^{-3} + 3 \cdot z^{-2} - 2 \cdot z^{-1} + 1.$$

Ako se sada primeni smena  $z = e^{j\omega}$  dobija se

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j6\omega} - 2 \cdot e^{-j5\omega} + 3 \cdot e^{-j4\omega} - 4 \cdot e^{-j3\omega} + 3 \cdot e^{-j2\omega} - 2 \cdot e^{-j\omega} + 1.$$

Izvlačenjem zajedničkog eksponencijalnog faktora dolazi se do izraza

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega} \cdot (e^{-j3\omega} - 2 \cdot e^{-j2\omega} + 3 \cdot e^{-j\omega} - 4 + 3 \cdot e^{j\omega} - 2 \cdot e^{j2\omega} + e^{j3\omega}).$$

Primenom Ojlerovih obrazaca konačno se nalazi

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega} \cdot (-4 + 6 \cdot \cos(\omega) - 4 \cdot \cos(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \cos(3 \cdot \omega)).$$

Odavde se onda vidi da je amplitudska karakteristika prenosne funkcije data jednačinom

$$A(\omega) = |-4 + 6 \cdot \cos(\omega) - 4 \cdot \cos(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \cos(3 \cdot \omega)|,$$

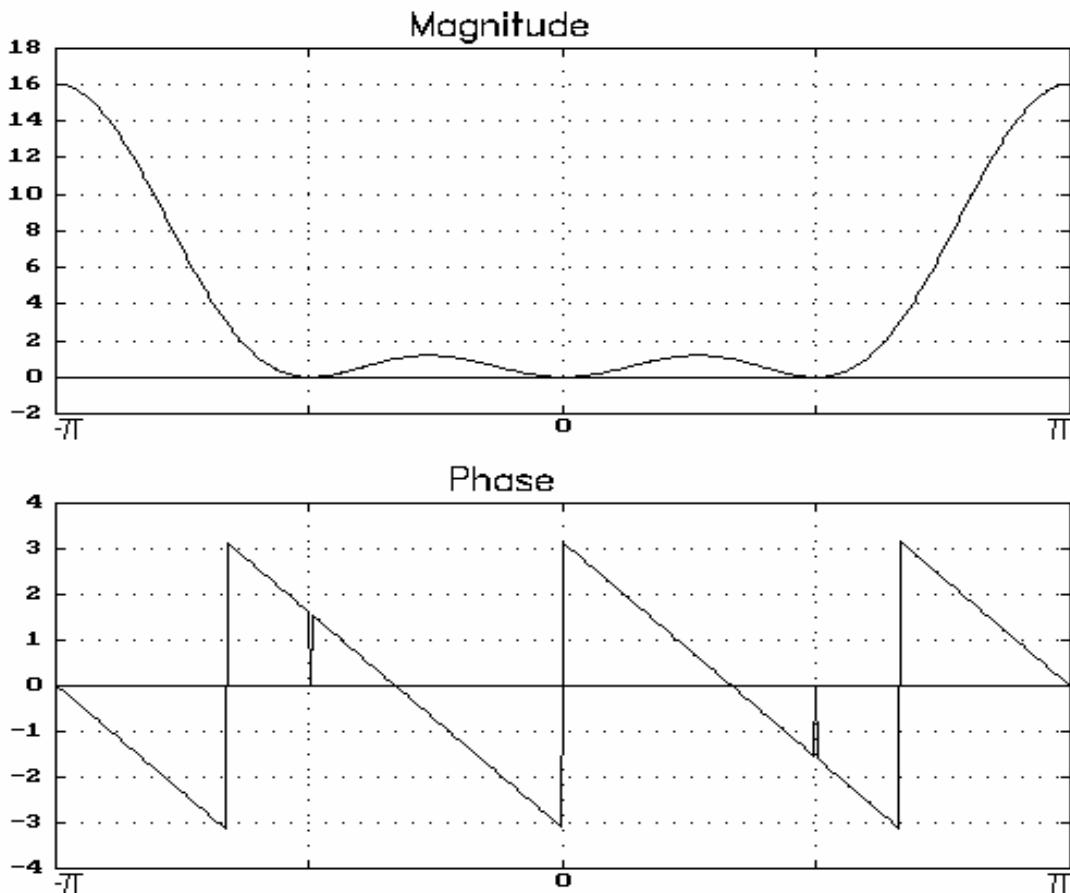
dok je fazna karakteristika data jednačinom

$$\theta(\omega) = -3 \cdot \omega.$$

Nalaženjem prvog izvoda fazne karakteristike po promenljivoj  $\omega$  grupno kašnjenje je tada

$$\theta_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega}[-3 \cdot \omega] = 3 = \text{const.}$$

Kako je grupno kašnjenje konstantno zaključujemo da je fazna karakteristika linearna što se moglo uočiti i na osnovu posmatranja same fazne karakteristike. Amplitudska i fazna karakteristika sistema je prikazana na slici.



**Zadatak 5.2.** Projektovati nerekurzivni filter sa idealizovanim frekventnim odzivom

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1; & |\omega| \leq \omega_{c1} \\ 0; & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 1; & \omega_{c2} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

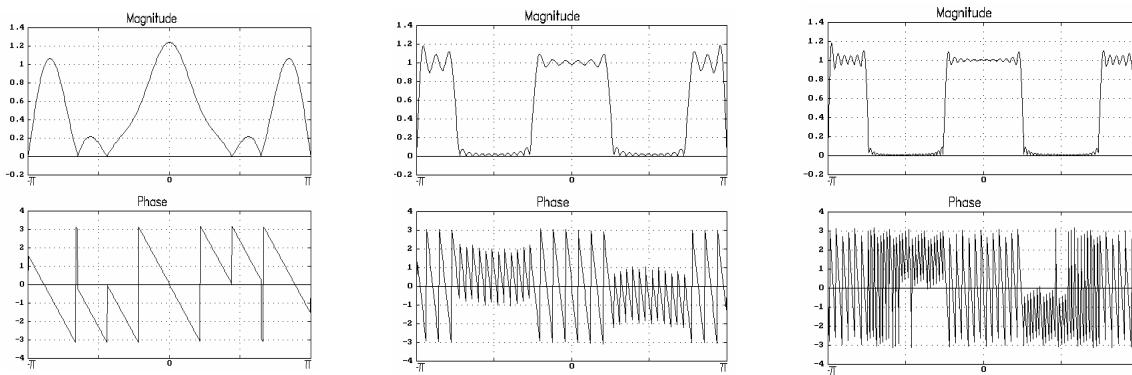
Rešenje:

Odredimo impulsni odziv zadatog sistema.

Primenom inverzne Furijeove transformacije diskretnog signala (IFTD) nalazimo da je

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_{c2}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c2}}^{-\omega_{c1}} 0 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c1}}^{-\omega_{c1}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c2}} 0 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{c2}}^{\pi} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_{c2}} e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c1}}^{-\omega_{c1}} e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c2}}^{\pi} e^{j\omega \cdot n} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \frac{e^{-j\omega_{c2} \cdot n} - e^{-j\pi \cdot n}}{jn} + \frac{e^{j\omega_{c1} \cdot n} - e^{-j\omega_{c1} \cdot n}}{jn} + \frac{e^{j\pi \cdot n} - e^{j\omega_{c2} \cdot n}}{jn} \right] = \frac{\sin(\omega_{c1} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\omega_{c2} \cdot n)}{\pi \cdot n} + \frac{\sin(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n} = \\
 &= \begin{cases} 1 + \frac{\omega_{c1}}{\pi} - \frac{\omega_{c2}}{\pi}; & n = 0 \\ \frac{\sin(\omega_{c1} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\omega_{c2} \cdot n)}{\pi \cdot n}; & n \neq 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Kao što se to vidi dobijeni impulsni odziv nije konačnog trajanja, što jeste jedna od osobina nerekurzivnih filtera sa konačnim impulsnim odzivom. U ovim slučajevima se često koristi postupak **prozoriranja** čime se postiže konačnost u vremenskom trajanju odziva. Međutim zbog ovakvog odsecanja tražena prenosna karakteristika se menja i dobijamo neku amproksimativnu prenosnu karakteristiku. Odstupanje od zahtevane karakteristike zavisi od načina prozoriranja (koji tip prozorskih funkcija se primenjuje) i od broja tačaka koje impulsni odziv sadrži. Na slikama su prikazane amplitudske i fazne karakteristike sistema primenom jedinične prozorske funkcije kada su dužine impulsnog odziva ograničene na  $N = 10; 50; 100$  tačaka respektivno.



**Zadatak 5.3.** Frekventni odziv diskretnog sistema mora da zadovolji sledeće uslove

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0; & |\omega| \leq \omega_{c1} \\ 1; & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0; & \omega_{c2} \leq |\omega| \leq \omega_{c3} \\ 1; & \omega_{c3} \leq |\omega| \leq \omega_{c4} \\ 0; & \omega_{c4} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}.$$

Projektovati kauzalni diskretni sistem primenom metode Furijeovog razvoja.

Rešenje:

Napišimo izraz za nalaženje kompleksnih Furijeovih koeficijenata date prenosne funkcije. Kako je kompleksni spektar diskretnog signala periodična kompleksna funkcija to će biti

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega.$$

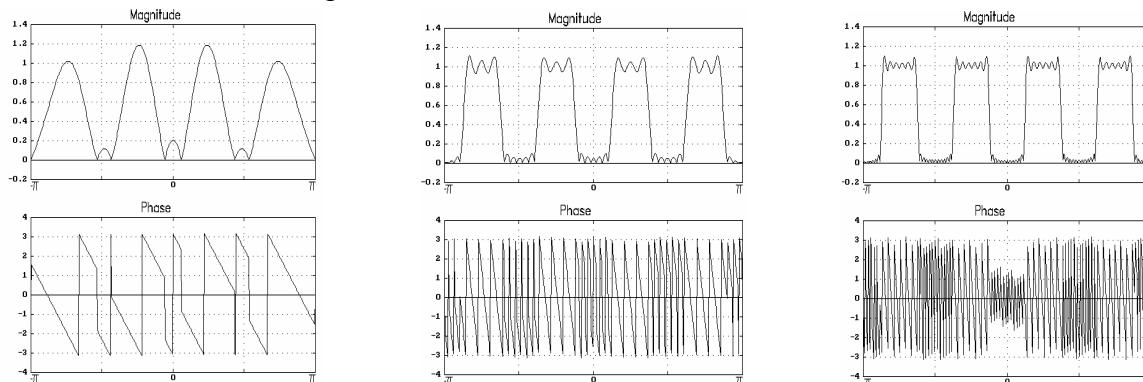
Kao što se da uočiti, izraz Furijeovog integrala i IFTD je identičan, pa sledi da su kompleksni koeficijenti Furijeovog reda zapravo vrednosti impulsnog odziva u diskretnim trenucima tj.  $C_n = h[n]$ . Da li su dobijene vrednosti kompleksne ili realne to zavisi od osbine funkcije  $H(e^{j\omega})$ .

Odredimo impulsni odziv datog sistema.

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c4}}^{-\omega_{c3}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c2}}^{-\omega_{c1}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c1}}^{-\omega_{c2}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{c3}}^{\omega_{c4}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-j\omega_{c3} \cdot n} - e^{-j\omega_{c4} \cdot n}}{jn} + \frac{e^{-j\omega_{c1} \cdot n} - e^{-j\omega_{c2} \cdot n}}{jn} + \frac{e^{j\omega_{c2} \cdot n} - e^{j\omega_{c1} \cdot n}}{jn} + \frac{e^{j\omega_{c4} \cdot n} - e^{j\omega_{c3} \cdot n}}{jn} \right] = \\ &= \frac{\sin(\omega_{c2} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\omega_{c1} \cdot n)}{\pi \cdot n} + \frac{\sin(\omega_{c4} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\omega_{c3} \cdot n)}{\pi \cdot n} = \\ &= \begin{cases} \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1} + \omega_{c4} - \omega_{c3}}{\pi} ; n = 0 \\ \frac{\sin(\omega_{c2} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\omega_{c1} \cdot n)}{\pi \cdot n} + \frac{\sin(\omega_{c4} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\omega_{c3} \cdot n)}{\pi \cdot n} ; n \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Kao i u predhodnom zadatku impulsni odziv sistema je beskonačnog trajanja. Ako se odziv ograniči na  $L = \frac{N-1}{2}$  tačaka simetrično raspoređenih oko tačke  $n = 0$ , tada se dobija aproksimativna varijanta tražene prenosne funkcije. Zaključak u vezi aproksimacije kojeg smo izveli u predhodnom primeru važi i za ovaj slučaj. Zbog slabe konvergencije Furijeovih redova u spektralnom domenu mogu da se uoče oscilacione pojave. Te pojave su poznate pod nazivom **Gibsove oscilacije**.

Na slikama su prikazane amplitudske i fazne karakteristike prenosne funkcije za dužine odziva  $N = 10; 50; 100$  tačaka respektivno.



**Zadatak 5.4.** Projektovati nerekurzivni visokopropusni filter sa specifikacijama

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0; |\Omega| \leq 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ 1; 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \leq |\Omega| \leq 5.0 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{cases}$$

ako je kružna učestanost uzorkovanja  $\Omega_s = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  i ako je zahtevana dužina impulsnog odziva  $N = 21$ . U projektovanju primeniti metodu prozoriranja.

Rešenje:

Za zadatu kružnu učestanost uzorkovanja nalazimo da je perioda uzorkovanja jednaka  $T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s} = 0.628$ . Ako se impulsni odziv uzorkuje periodom uzorkovanja  $T_s$  tada se granične kružne učestanosti preslikavaju u diskrete (normalizovane) učestanosti po izrazu  $\omega = \Omega \cdot T_s = 2\pi \cdot \frac{\Omega}{\Omega_s} \text{ rad}$ . Odavde onda diskretna prenosna funkcija mora da zadovolji sledeće specifikacije

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0; |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1; \frac{\pi}{2} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Odredimo impulsni odziv traženog sistema.

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \frac{e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot n} - e^{-j\pi \cdot n}}{jn} + \frac{e^{j\pi \cdot n} - e^{j\frac{\pi}{2} \cdot n}}{jn} \right] = \\ &= \frac{\sin(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} = \begin{cases} 0.5; n = 0 \\ -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{\pi \cdot n}; n \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

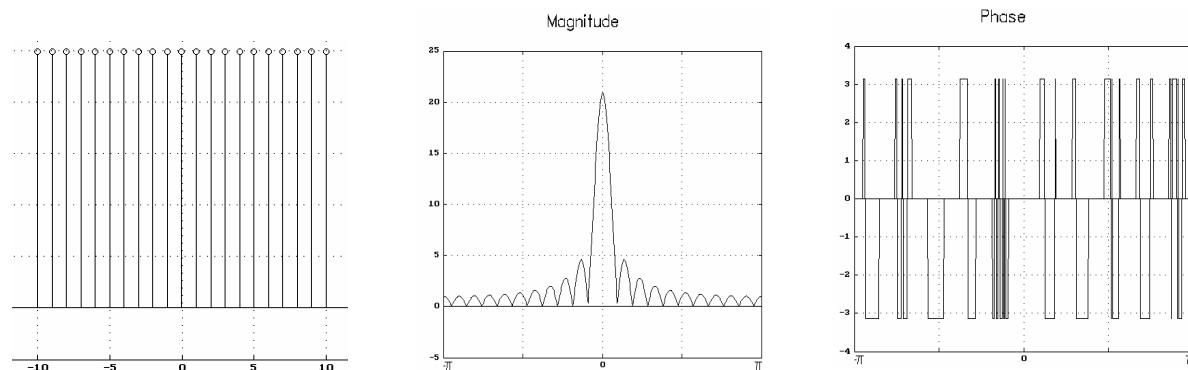
Kako traženo rešenje mora biti filter sa konačnim impulsnim odzivom, mora da se primeni prozoriranje.

### Ograničenje dužine impulsnog odziva primenom jedinične prozorske funkcije.

Jedinična prozorska funkcija je definisana izrazom

$$w[n] = \begin{cases} 1; |n| \leq \frac{N-1}{2} = 10 \\ 0; drugde \end{cases}$$

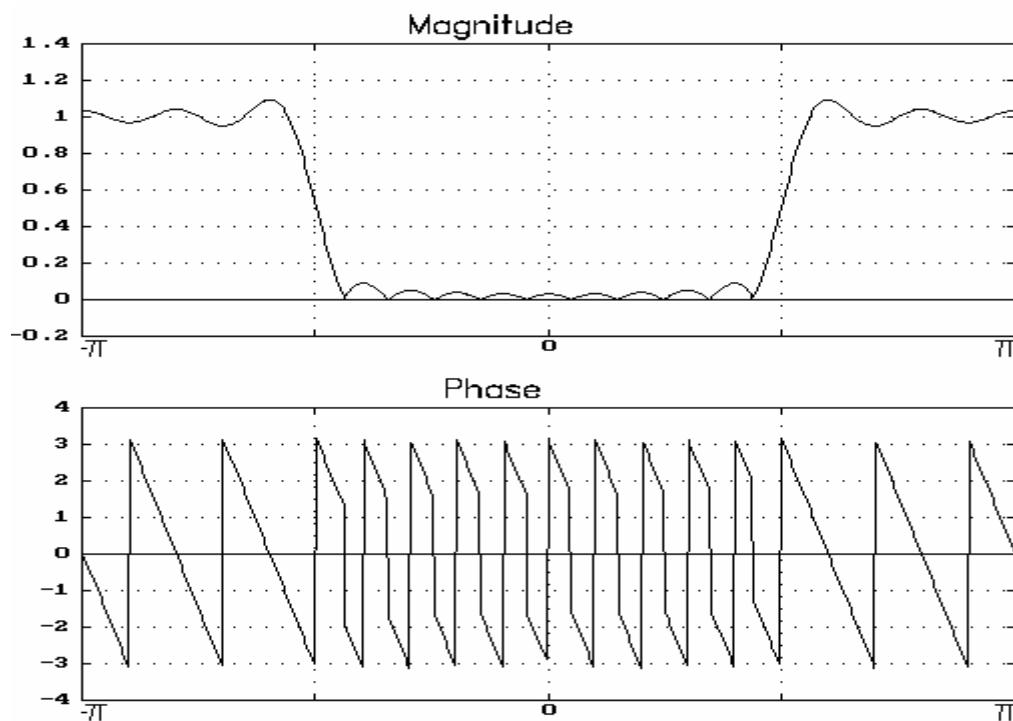
Vremenski oblik i frekvencijske karakteristike ove funkcije su prikazane na slici.



Željeni filter se dobija tako što se neograničen impulsni odziv izmnoži sa prozorskom funkcijom tj.

$$h_{FIR}[n] = h[n] \cdot w[n].$$

Rezultat prozoriranja na spektar signala je prikazano na slici.

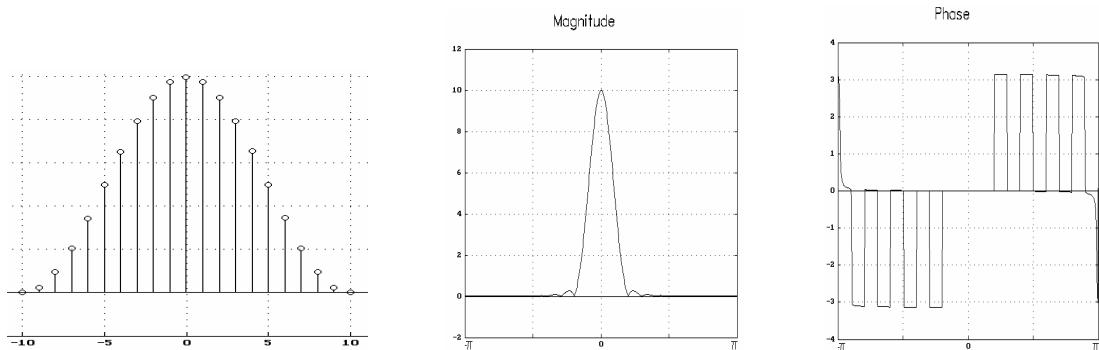


### Ograničenje dužine impulsnog odziva primenom Hanove prozorske funkcije.

Hanova prozorska funkcija je definisana izrazom

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} \cdot n\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases} = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot n\right); & |n| \leq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$

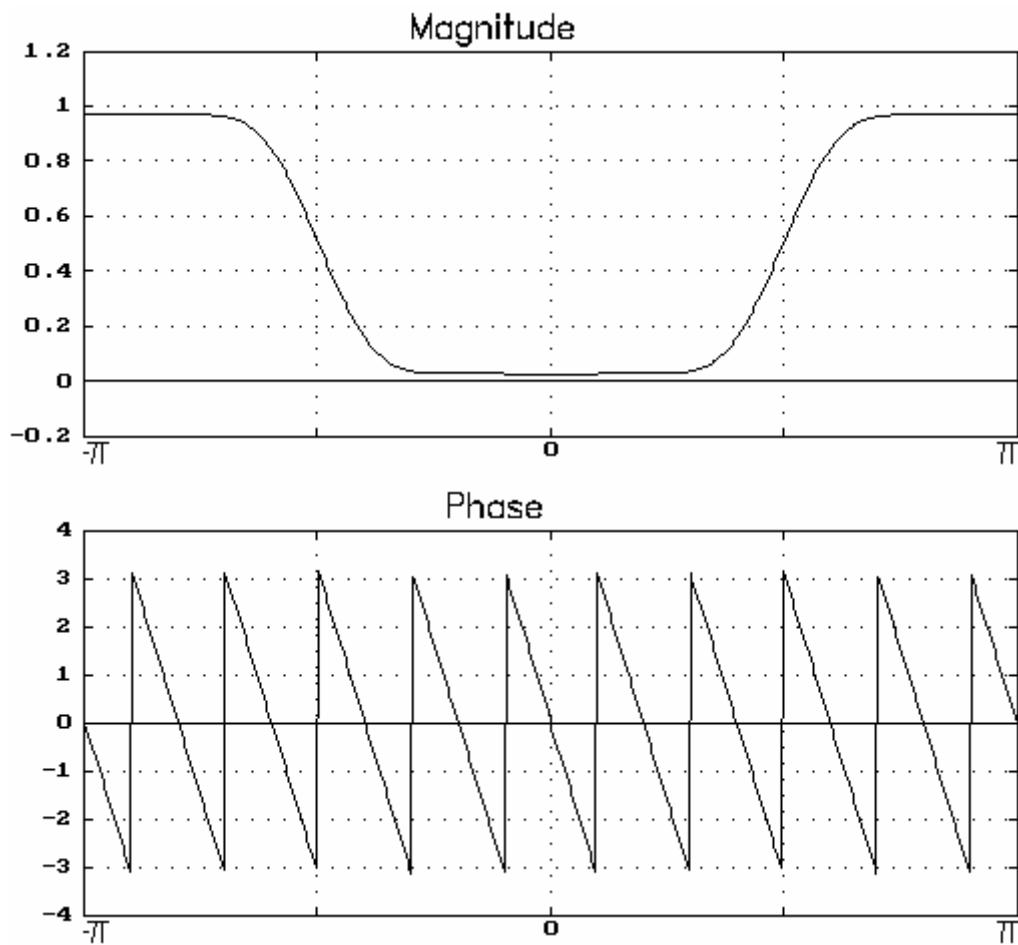
Vremenski oblik i frekvencijske karakteristike ove funkcije su prikazana na slici.



Željeni filter se dobija tako što se neograničen impulsni odziv izmnoži sa prozorskom funkcijom tj.

$$h_{FIR}[n] = h[n] \cdot w[n].$$

Rezultat prozoriranja je prikazano na slici.

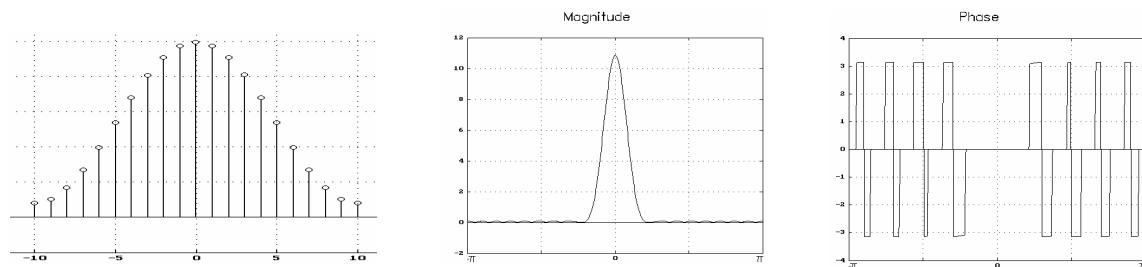


## Ograničenje dužine impulsnog odziva primenom Hamingove prozorske funkcije.

Hamingova prozorska funkcija je definisana izrazom

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} \cdot n\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases} = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot n\right); & |n| \leq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$

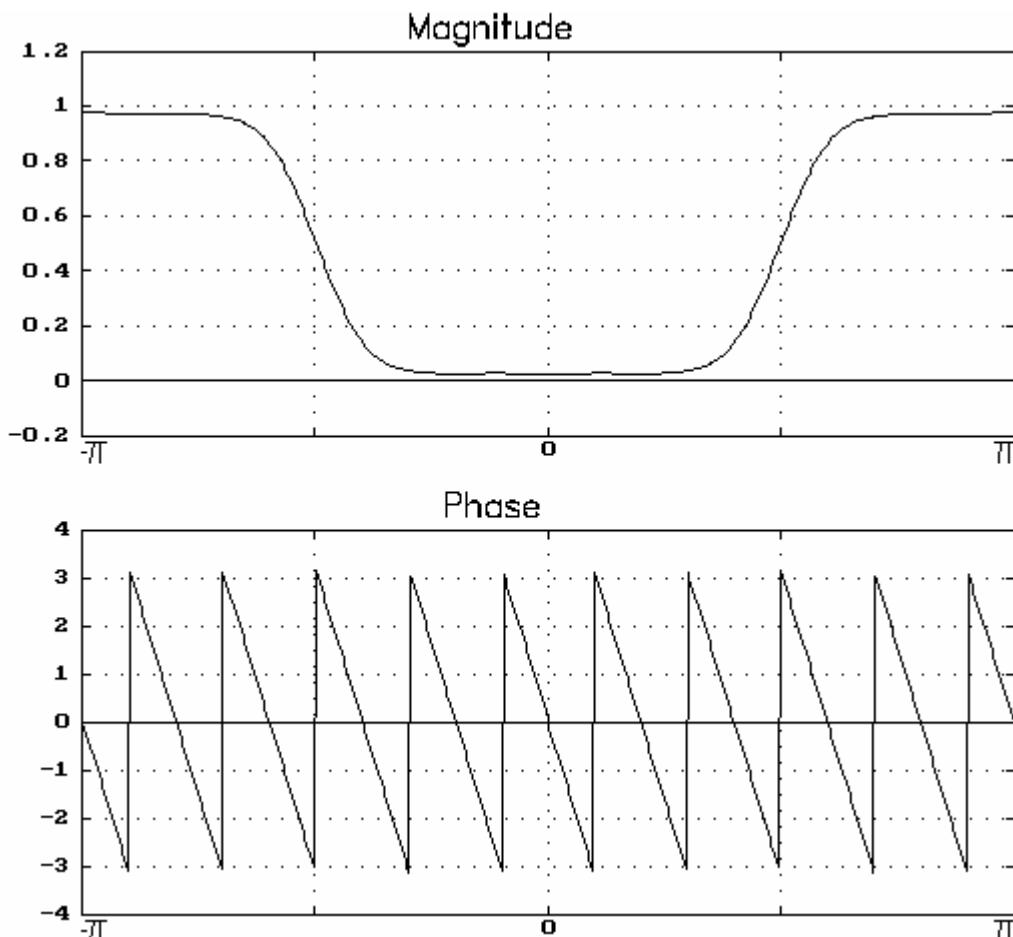
Vremenski oblik i frekvencijske karakteristike ove funkcije su prikazana na slici.



Željeni filter se dobija tako što se neograničen impulsni odziv izmnoži sa prozorskom funkcijom tj.

$$h_{FIR}[n] = h[n] \cdot w[n].$$

Rezultat prozoriranja je prikazano na slici.



## Ograničenje dužine impulsnog odziva primenom Blekmanove prozorske funkcije.

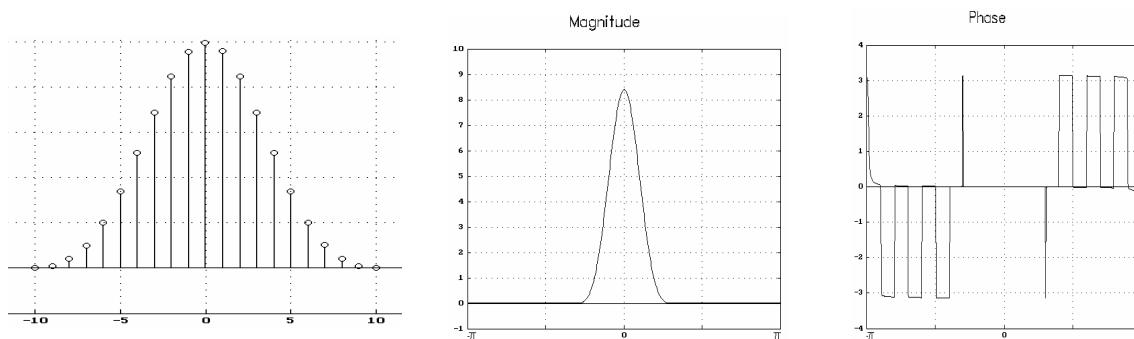
Blekmanova prozorska funkcija je definisana izrazom

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} \cdot n\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N-1} \cdot n\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$

Konkretno za ovaj primer prozorska funkcija je

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot n\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{20} \cdot n\right); & |n| \leq 10 \\ 0; & \text{drugde} \end{cases}$$

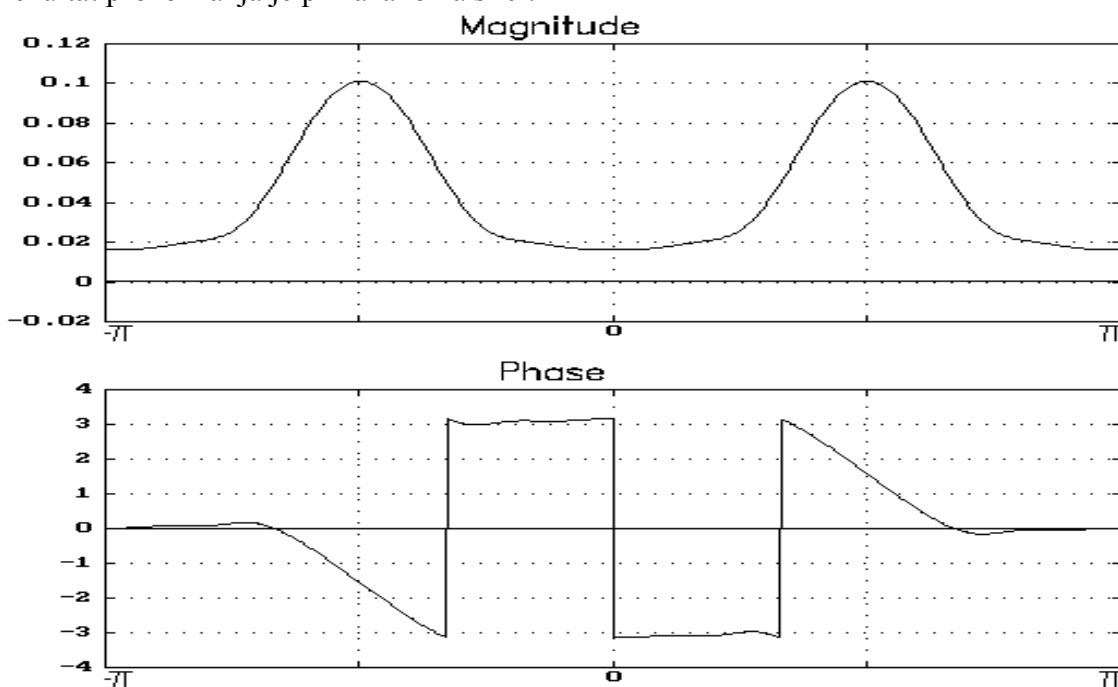
Vremenski oblik i frekvencijske karakteristike ove funkcije su prikazana na slici.



Željeni filter se dobija tako što se neograničen impulsni odziv izmnoži sa prozorskom funkcijom tj.

$$h_{FIR}[n] = h[n] \cdot w[n].$$

Rezultat prozoriranja je prikazano na slici.



**Zadatak 5.5.** Projektovati nerekurzivni filter propusnika opsega sa sledećim specifikacijama

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0; |\Omega| < 400 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ 1; 400 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \leq |\Omega| \leq 600 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ 0; 600 < |\Omega| \leq 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{cases}$$

Primeniti Hanovu prozorsku funkciju ako je  $\Omega_s = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  i  $N = 21$ .

Rešenje:

Za datu brzinu uzorkovanja dobijamo da diskretni filter mora da zadovolji sledeće uslove

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0; |\omega| < \frac{2\pi}{5} \\ 1; \frac{2\pi}{5} \leq |\omega| \leq \frac{3\pi}{5} \\ 0; \frac{3\pi}{5} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

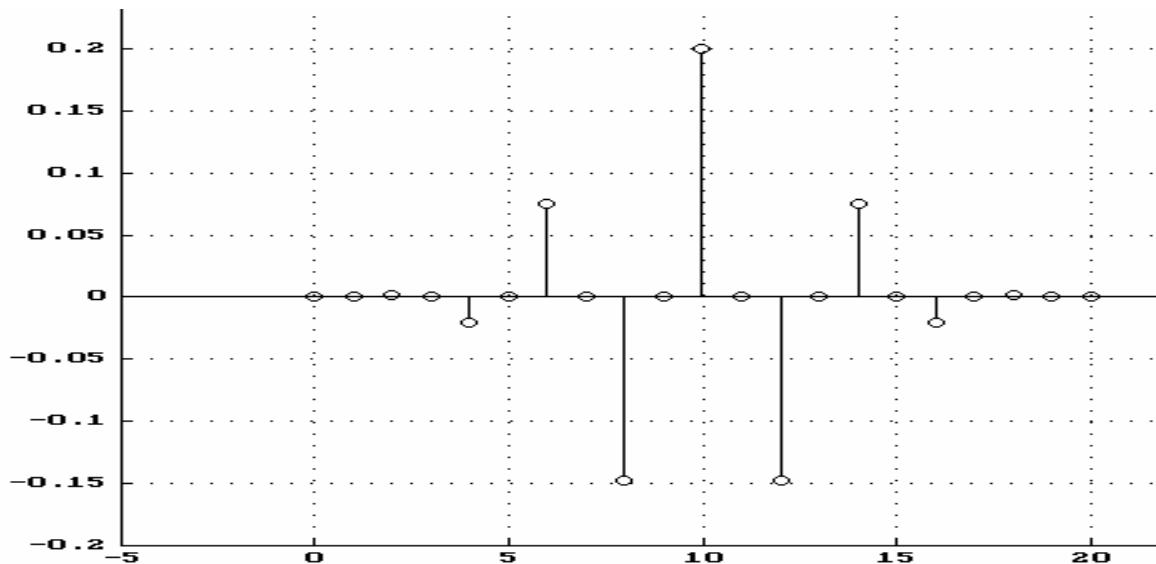
Impulsni odziv filtra će tada biti

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{3\pi}{5}}^{\frac{2\pi}{5}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{5}}^{\frac{3\pi}{5}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \frac{e^{-j\frac{2\pi}{5} \cdot n} - e^{-j\frac{3\pi}{5} \cdot n}}{jn} + \frac{e^{j\frac{3\pi}{5} \cdot n} - e^{j\frac{2\pi}{5} \cdot n}}{jn} \right] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{5} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{5}; n = 0 \\ \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{5} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n\right)}{\pi \cdot n}; n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

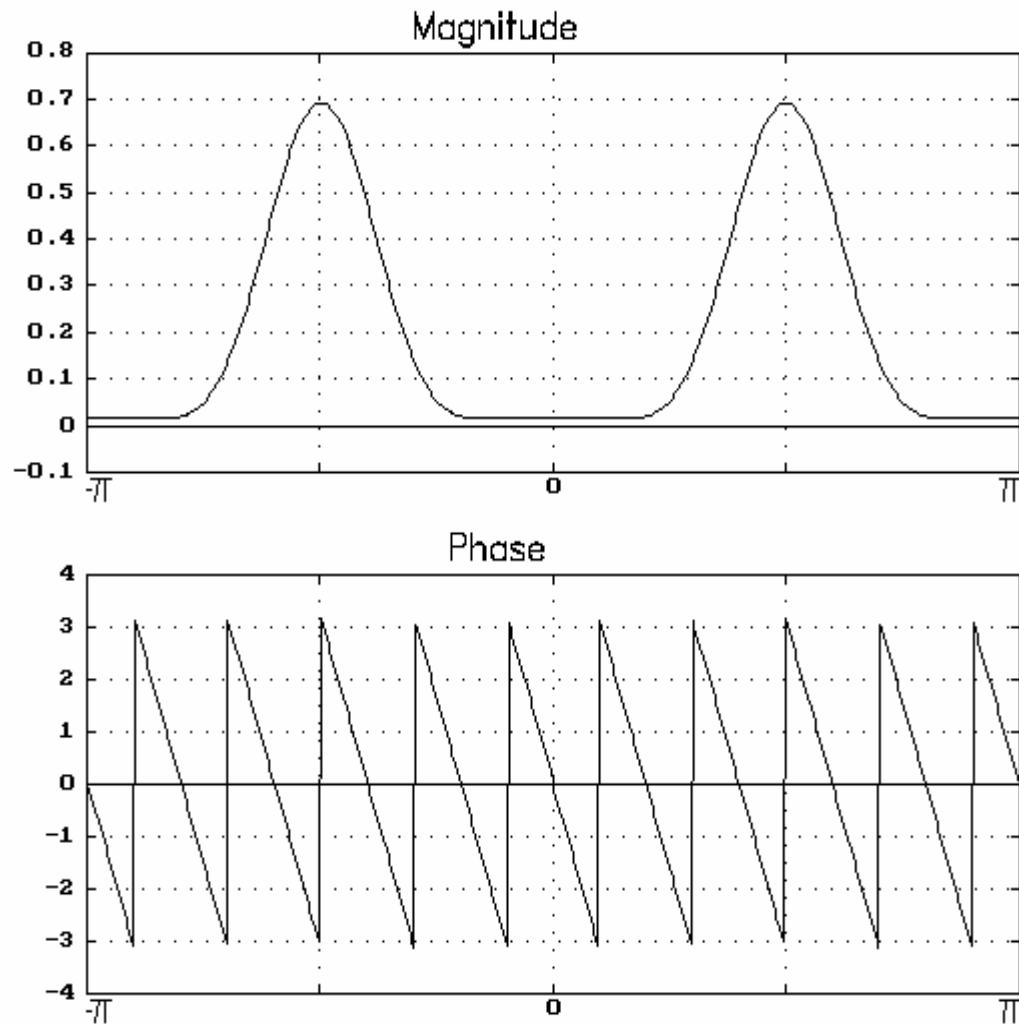
Primenom Hanove prozorske funkcije

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot n\right); |n| \leq 10 \\ 0; drugde \end{cases}$$

impulsni odziv diskretnog sistema će biti  $h_{FIR}[n] = h[n] \cdot w[n]$  koja je prikazana na slici.



Amplitudska i fazna karakteristika projektovanog diskretnog sistema je prikazana na slici.



**Zadatak 5.6.** Projektovati nerekurzivni filter nepropusnika opsega sa sledećim specifikacijama

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1; |\Omega| < 300 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ 0; 300 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \leq |\Omega| \leq 700 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ 1; 700 < |\Omega| \leq 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{cases}$$

Primeniti Hamingovu prozorsku funkciju ako je  $\Omega_s = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  i  $N = 21$ .

Rešenje:

Za datu brzinu uzorkovanja dobijamo da diskretni filter mora da zadovolji sledeće uslove

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1; |\omega| \leq \frac{3\pi}{10} \\ 0; \frac{3\pi}{10} < |\omega| < \frac{7\pi}{10} \\ 1; \frac{7\pi}{10} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

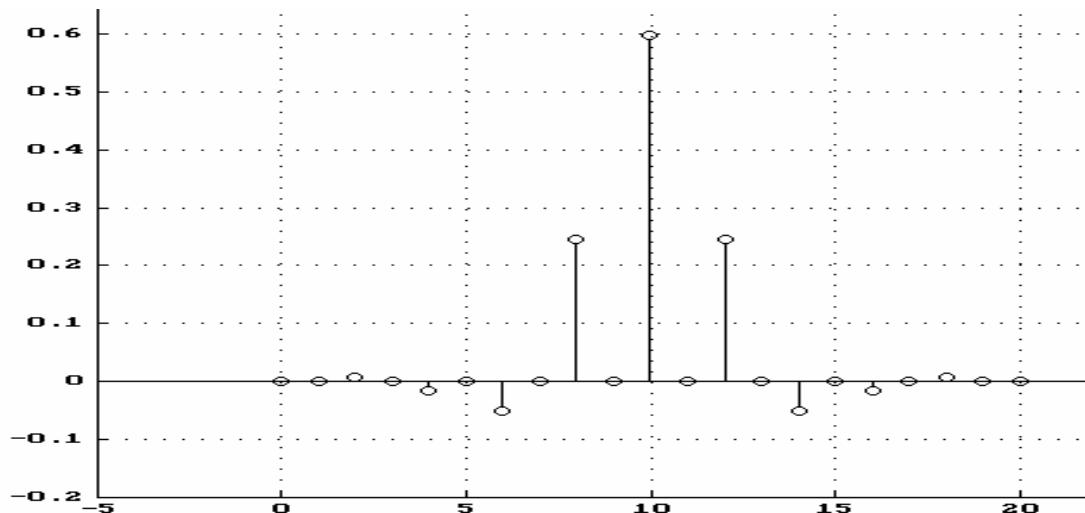
Impulsni odziv filtra će tada biti

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{7\pi}{10}}^{\frac{3\pi}{10}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{10}}^{\frac{7\pi}{10}} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{7\pi}{10}}^{\pi} 1 \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{10} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{10} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} + \frac{\sin(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n} \end{aligned}$$

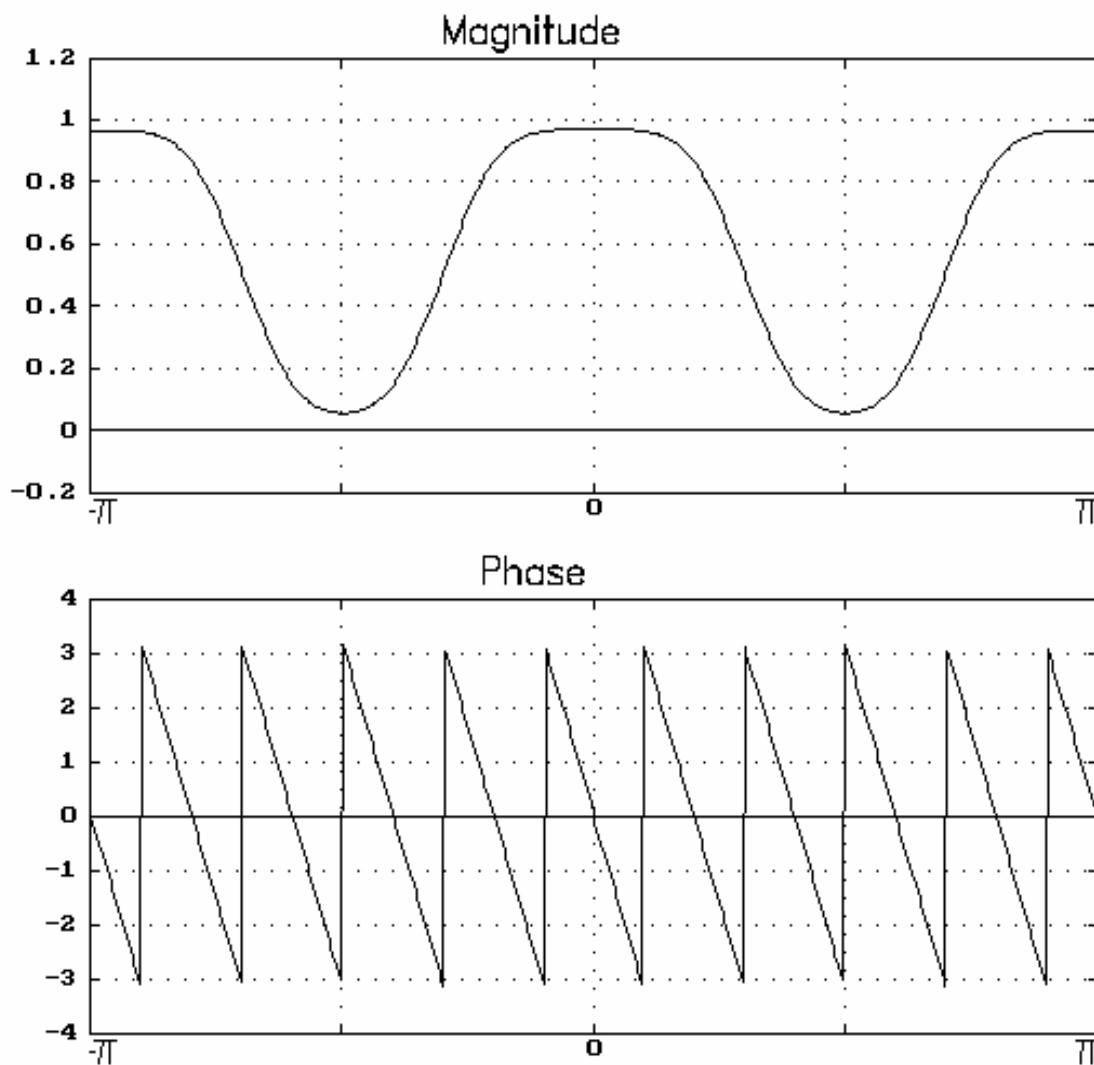
Primenom Hamingove prozorske funkcije

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot n\right); |n| \leq 10 \\ 0; \text{drugde} \end{cases}$$

impulsni odziv diskretnog sistema će biti  $h_{FIR}[n] = h[n] \cdot w[n]$  koja je prikazana na slici.



Amplitudska i fazna karakteristika projektovanog diskretnog sistema je prikazana na slici.



**Zadatak 5.7.** Digitalni filter ima periodičan spektar. Analitički opis spektra u njegovoj osnovnoj periodi je

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\frac{\omega}{\pi}; -\pi \leq \omega \leq 0 \\ +\frac{\omega}{\pi}; 0 \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

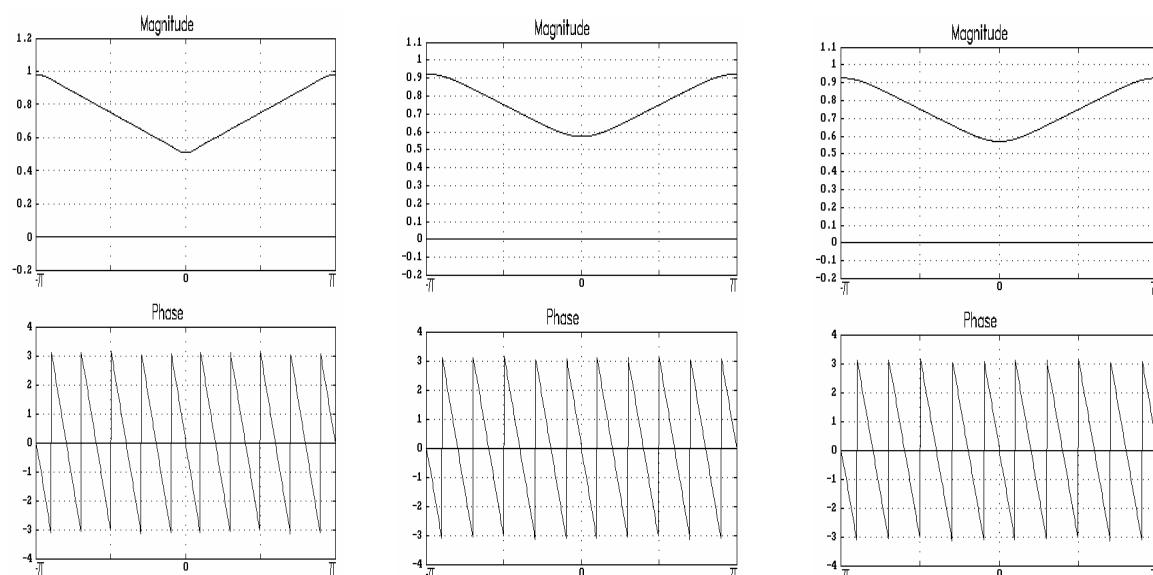
Projektovati nerekurzivni filter primenom jedinične, Hanove i Hamingove prozorske funkcije za  $N = 21$ .

Rešenje:

Kako je prenosna funkcija periodična primenićemo metodu razvoja u Furijeov red. U predhodnim primerima smo već ukazali na činjenicu da je razvoj u Furierov red zapravo inverzna Furijeova transformacija diskretnog signala (IFTD). Na osnovu toga impulsni odziv će tada biti

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left( -\frac{\omega}{\pi} \right) \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\omega}{\pi} \right) \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega = \\ &= \frac{\sin(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot n} \right]^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 0 \\ -\frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot n} \right]^2, & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Uticaj pojedinih prozorskih funkcija na amplitudsku i faznu karakteristiku su prikazane na slici respektivno.



**Zadatak 5.8.** Primenom Kajzerove metode projektovati nerekurzivni niskopropusni filter sa sledećim specifikacijama:

$$\alpha_p \leq 0.1dB; \Omega_p = 20 \frac{rad}{sec},$$

$$\alpha_n \geq 44dB; \Omega_n = 30 \frac{rad}{sec},$$

$$\Omega_s = 100 \frac{rad}{sec}.$$

Rešenje:

Kajzerova metoda projektovanja nerekurzivnih filtera se sastoji iz više koraka.

Korak 1. Određivanje impulsnog odziva idealnog filtra.

Za graničnu kružnu učestanost idealnog NF filtra se uzima sredina prelazne oblasti tj.

$$\Omega_g = \frac{\Omega_p + \Omega_n}{2} = 25 \frac{rad}{sec}.$$

Ova kružna učestanost se preslikava u normalizovanu učestanost

$$\omega_g = 2\pi \frac{\Omega_g}{\Omega_s} = \frac{\pi}{2}.$$

Prenosna funkcija i impulsni odziv idealnog NF filtra je tada definisana

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1; |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0; drugde \end{cases} \Rightarrow h[n] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{\pi \cdot n}$$

Korak 2. Određivanje dozvoljenog odstupnja frekventne karakteristike.

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 10^{-0.05 \cdot \alpha_n} = 10^{-0.05 \cdot 44} = 6.31 \cdot 10^{-3} \\ \delta_2 &= \frac{10^{-0.05 \cdot \alpha_p} - 1}{10^{-0.05 \cdot \alpha_p} + 1} = 5.75 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 5.75 \cdot 10^{-3}.$$

Korak 3. Određivanje minimalnog slabljenja po novoj vrednosti odstupanja.

$$\alpha_n = -20 \cdot \log(\delta) = 44.8dB.$$

Korak 4. Izbor vrednosti koeficijenta  $\alpha'$

$$\alpha' = \begin{cases} 0; \alpha_n \leq 21 \\ 0.5842 \cdot (\alpha_n - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (\alpha_n - 21); 21 < \alpha_n \leq 50 \\ 0.1102 \cdot (\alpha_n - 8.7); \alpha_n > 50 \end{cases}$$

Iz ove formule nalazimo da je  $\alpha' = 0.5842 \cdot (44.8 - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (44.8 - 21) = 3.952$ .

Korak 5. Izbor vrednosti koeficijenta  $D$  i određivanje dužine impulsnog odziva  $N$ .

$$D = \begin{cases} 0.9222; & \alpha_n \leq 21 \\ \frac{\alpha_n - 7.95}{14.36}; & \alpha_n > 21 \end{cases}$$

Odavde imamo da je  $D = \frac{44.8 - 7.95}{14.36} = 2.566$ .

Dužina Kajzerove prozorske funkcije se određuje iz obrazca  $N \geq \frac{\Omega_s \cdot D}{\Omega_n - \Omega_p} + 1 = 26.66$  iz kojeg onda sledi da je potrebna dužina impulsnog odziva  $N = 27$  tj.

$$h_{FIR}[n] = \begin{cases} h_{idealn}[n] \cdot w[n]; & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & drugde \end{cases}$$

Vrednosti Kajzerove prozorske funkcije se računaju pomoću Beselovih redova nulte vrste. Zbog složenosti proračuna ovde je nećemo dati niti izučavati, ali se obično primenjuju računarski algoritmi u rešavanju.

**Zadatak 5.9.** Primenom Kajzerove metode projektovati nerekurzivni visokopropusni filter sa sledećim specifikacijama:

$$\begin{aligned} \alpha_p &\leq 0.3dB; \Omega_p = 3 \frac{rad}{sec}, \\ \alpha_n &\geq 45.0dB; \Omega_n = 2 \frac{rad}{sec}, \\ \Omega_s &= 10 \frac{rad}{sec}. \end{aligned}$$

Rešenje:

Korak 1. Određivanje impulsnog odziva idealnog filtra.

Za graničnu kružnu učestanost idealnog VF filtra se uzima sredina prelazne oblasti tj.

$$\Omega_g = \frac{\Omega_p + \Omega_n}{2} = 2.5 \frac{rad}{sec}.$$

Ova kružna učestanost se preslikava u normalizovanu učestanost

$$\omega_g = 2\pi \frac{\Omega_g}{\Omega_s} = \frac{\pi}{2}.$$

Prenosna funkcija i impulsni odziv idealnog NF filtra je tada definisana

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0; |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1; \frac{\pi}{2} \leq |\omega| < \pi \end{cases} \Rightarrow h[n] = \delta[n] - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}{\pi \cdot n}.$$

Korak 2. Određivanje dozvoljenog odstupnja frekventne karakteristike.

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = 10^{-0.05 \cdot \alpha_n} = 10^{-0.05 \cdot 45} = 5.62 \cdot 10^{-3} \\ \delta_2 = \frac{10^{-0.05 \cdot \alpha_p} - 1}{10^{-0.05 \cdot \alpha_p} + 1} = \frac{10^{-0.05 \cdot 45} - 1}{10^{-0.05 \cdot 45} + 1} = 17.26 \cdot 10^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 5.62 \cdot 10^{-3}.$$

Korak 3. Određivanje minimalnog slabljenja po novoj vrednosti odstupanja.

$$\alpha_n = -20 \cdot \log(\delta) = 45 \text{ dB}.$$

Korak 4. Izbor vrednosti koeficijenta  $\alpha'$

$$\alpha' = \begin{cases} 0; \alpha_n \leq 21 \\ 0.5842 \cdot (\alpha_n - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (\alpha_n - 21); 21 < \alpha_n \leq 50 \\ 0.1102 \cdot (\alpha_n - 8.7); \alpha_n > 50 \end{cases}$$

Iz ove formule nalazimo da je  $\alpha' = 0.5842 \cdot (45 - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (45 - 21) = 3.97$ .

Korak 5. Izbor vrednosti koeficijenta  $D$  i određivanje dužine impulsnog odziva  $N$ .

$$D = \begin{cases} 0.9222; \alpha_n \leq 21 \\ \frac{\alpha_n - 7.95}{14.36}; \alpha_n > 21 \end{cases}$$

Odavde imamo da je  $D = \frac{45 - 7.95}{14.36} = 2.58$ .

Dužina Kajzerove prozorske funkcije se određuje iz obrazca  $N \geq \frac{\Omega_s \cdot D}{\Omega_n - \Omega_p} + 1 = 25.8$  iz kojeg onda sledi da je potrebna dužina impulsnog odziva  $N = 26$  tj.

$$h_{FIR}[n] = \begin{cases} h_{idealno}[n] \cdot w[n]; |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; drugde \end{cases}$$

**Zadatak 5.10.** Primenom Kajzerove metode projektovati nerekurzivni filter propusnika opsega sa sledećim specifikacijama:

$$\alpha_p \leq 0.5dB; \Omega_{p1} = 40 \frac{rad}{sec}, \Omega_{p2} = 60 \frac{rad}{sec},$$

$$\alpha_n \geq 35.0dB; \Omega_{n1} = 20 \frac{rad}{sec}, \Omega_{n2} = 80 \frac{rad}{sec},$$

$$\Omega_s = 200 \frac{rad}{sec}.$$

Rešenje:

Pre nego što bi pristupili koracima rešavanja problema treba da se odredi potrebna širina prelazne oblasti po izrazu

$$B_t = \min[(\Omega_{p1} - \Omega_{n1}), (\Omega_{n2} - \Omega_{p2})] = \min[(40 - 20), (80 - 60)] = \min[20, 20] = 20 \frac{rad}{sec}$$

Odavde su tada granične kružne učestanosti idealnog filtra propusnika oopsega

$$\begin{aligned}\Omega_{g1} &= \Omega_{p1} - \frac{B_t}{2} = 40 - 10 = 30 \frac{rad}{sec}, \\ \Omega_{g2} &= \Omega_{p2} + \frac{B_t}{2} = 60 + 10 = 70 \frac{rad}{sec}.\end{aligned}$$

Za datu brzinu uzorkovanja ove kružne učestanosti se preslikavaju u  $\omega_{g1} = \frac{3\pi}{10}$ ,  $\omega_{g2} = \frac{7\pi}{10}$ .

Korak 1. Određivanje impulsnog odziva idealnog filtra.

Prenosna funkcija i impulsni odziv idealnog PO filtra je tada definisana

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1; \frac{3\pi}{10} \leq |\omega| \leq \frac{7\pi}{10} \\ 0; \text{drugde} \end{cases} \Rightarrow h[n] = \int_{-\frac{7\pi}{10}}^{\frac{3\pi}{10}} e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega + \int_{-\frac{3\pi}{10}}^{\frac{7\pi}{10}} e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{10} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{10} \cdot n\right)}{\pi \cdot n}$$

Korak

2. Određivanje dozvoljenog odstupnja frekventne karakteristike.

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 10^{-0.05\alpha_n} = 10^{-0.05 \cdot 35} = 17.78 \cdot 10^{-3} \\ \delta_2 &= \frac{10^{-0.05 \cdot 0.5} - 1}{10^{-0.05 \cdot 0.5} + 1} = 28.77 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 17.78 \cdot 10^{-3}.$$

Korak 3. Određivanje minimalnog slabljenja po novoj vrednosti odstupanja.

$$\alpha_n = -20 \cdot \log(\delta) = 35dB.$$

Korak 4. Izbor vrednosti koeficijenta  $\alpha'$

$$\alpha' = \begin{cases} 0; \alpha_n \leq 21 \\ 0.5842 \cdot (\alpha_n - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (\alpha_n - 21); 21 < \alpha_n \leq 50 \\ 0.1102 \cdot (\alpha_n - 8.7); \alpha_n > 50 \end{cases}$$

Iz ove formule nalazimo da je  $\alpha' = 0.5842 \cdot (35 - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (35 - 21) = 2.78$ .

Korak 5. Izbor vrednosti koeficijenta  $D$  i određivanje dužine impulsnog odziva  $N$ .

$$D = \begin{cases} 0.9222; & \alpha_n \leq 21 \\ \frac{\alpha_n - 7.95}{14.36}; & \alpha_n > 21 \end{cases}$$

Odavde imamo da je  $D = \frac{35 - 7.95}{14.36} = 1.88$ .

Dužina Kajzerove prozorske funkcije se određuje iz obrazca  $N \geq \frac{\Omega_s \cdot D}{B_t} + 1 = 18.83$  iz kojeg onda sledi da je potrebna dužina impulsnog odziva  $N = 19$  tj.

$$h_{FIR}[n] = \begin{cases} h_{ideal_{no}}[n] \cdot w[n]; & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & drugde \end{cases}$$

**Zadatak 5.11.** Primenom Kajzerove metode projektovati nerekurzivni filter nepropusnika opsega sa sledećim specifikacijama:

$$\alpha_p \leq 0.2dB; \Omega_{p1} = 1000 \frac{rad}{sec}, \Omega_{p2} = 4000 \frac{rad}{sec},$$

$$\alpha_n \geq 40dB; \Omega_{n1} = 2000 \frac{rad}{sec}, \Omega_{n2} = 3000 \frac{rad}{sec},$$

$$\Omega_s = 10000 \frac{rad}{sec}.$$

Rešenje:

Pre nego što bi pristupili koracima rešavanja problema treba da se odredi potrebna širina prelazne oblasti po izrazu

$$B_t = \min[(\Omega_{p1} - \Omega_{n1}), (\Omega_{n2} - \Omega_{p2})] = \min[(2000 - 1000), (4000 - 3000)] = \min[1000, 1000] = 1000 \frac{rad}{sec}$$

Odavde su tada granične kružne učestanosti idealnog filtra propusnika oopsegaa

$$\begin{aligned} \Omega_{g1} &= \Omega_{p1} + \frac{B_t}{2} = 1000 + 500 = 1500 \frac{rad}{sec}, \\ \Omega_{g2} &= \Omega_{p2} - \frac{B_t}{2} = 4000 - 500 = 3500 \frac{rad}{sec}. \end{aligned}$$

Za datu brzinu uzorkovanja ove kružne učestanosti se preslikavaju u  $\omega_{g1} = \frac{3\pi}{10}$ ,  $\omega_{g2} = \frac{7\pi}{10}$ .

Korak 1. Određivanje impulsnog odziva idealnog filtra.

Prenosna funkcija i impulsni odziv idealnog NO filtra je tada definisana

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0; & \frac{3\pi}{10} \leq |\omega| \leq \frac{7\pi}{10} \\ 1; & drugde \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
h[n] &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\frac{7\pi}{10}} e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{3\pi}{10}}^{\frac{3\pi}{10}} e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\frac{7\pi}{10}}^{\pi} e^{j\omega \cdot n} \cdot d\omega = \\
&= \frac{\sin(\pi \cdot n)}{\pi \cdot n} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{10} \cdot n\right)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{10} \cdot n\right)}{\pi \cdot n}
\end{aligned}$$

Korak 2. Određivanje dozvoljenog odstupnja frekventne karakteristike.

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = 10^{-0.05 \cdot \alpha_n} = 10^{-0.05 \cdot 40} = 0.01 \\ \delta_2 = \frac{10^{-0.05 \cdot 0.2} - 1}{10^{-0.05 \cdot 0.2} + 1} = 0.0115 \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 0.01.$$

Korak 3. Određivanje minimalnog slabljenja po novoj vrednosti odstupanja.

$$\alpha_n = -20 \cdot \log(\delta) = 40 \text{ dB}.$$

Korak 4. Izbor vrednosti koeficijenta  $\alpha'$

$$\alpha' = \begin{cases} 0; \alpha_n \leq 21 \\ 0.5842 \cdot (\alpha_n - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (\alpha_n - 21); 21 < \alpha_n \leq 50 \\ 0.1102 \cdot (\alpha_n - 8.7); \alpha_n > 50 \end{cases}$$

Iz ove formule nalazimo da je  $\alpha' = 0.5842 \cdot (40 - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (40 - 21) = 3.395$ .

Korak 5. Izbor vrednosti koeficijenta  $D$  i određivanje dužine impulsnog odziva  $N$ .

$$D = \begin{cases} 0.9222; \alpha_n \leq 21 \\ \frac{\alpha_n - 7.95}{14.36}; \alpha_n > 21 \end{cases}$$

Odavde imamo da je  $D = \frac{40 - 7.95}{14.36} = 2.23$ . Dužina Kajzerove prozorske funkcije se određuje iz obrazca  $N \geq \frac{\Omega_s \cdot D}{B_t} + 1 = 23.3$  iz kojeg onda sledi da je potrebna dužina impulsnog odziva  $N = 24$  tj.

$$h_{FIR}[n] = \begin{cases} h_{idea \ln o}[n] \cdot w[n]; |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; drugde \end{cases}.$$



### Reference

1. A.V. Oppenheim, R.W. Schafer : Discrete-Time Signal Processing
2. M.V. Popović : Digitalna Obrada Signala
3. A. Antoniou : Digital Filters: Analysis and Design
4. A. Antoniou : D-Filter (Program za analizu i projektovanje digitalnih filtera)
5. M.J.T. Smith, R.M. Mersereau : Introduction to Digital Signal Processing: A Computer Laboratory Textbook