Predmet: ANALOGNA ELEKTRONIKA
Predmetni nastavnik: Dr Nándor Burány

3. semestar

Broj časova: 2+2

POGLAVLJE 2.6.

BODE-OVI DIJAGRAMI

Pripremio:
Mr Szabolcs Divéki

Pojam prenosne funkcije

- Prenosna funkcija nekog električnog kola se definiše kao količnik Laplace-ove transformacije odziva i Laplace-ove transformacije eksitacije.
- Za dato kolo prenosna funkcija se može dobiti:
  - Zamenom vrednosti komponenata odgovarajućim impedansama:
    - Kalem induktivnost *L* se zamenjuje impedansom *sL*,
    - Kondenzator kapacitivnosti *C* se zamenjuje impedansom *1/sC*,
    - Otpornik otpornosti *R* se zamenjuje sa impedansom *R*.
  - Rešavanjem električnog kola primenom neke metode za analizu električnih kola (npr. metoda potencijala čvorova).
  - Kao rezultat dobijamo prenosnu funkciju u obliku količnika dva polinoma po kompleksnoj promenljivi *s,* sa realnim koeficijentima:

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=C_0\cdot\frac{s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1s^1+a_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s^1+b_0}$$

Pojam prenosne funkcije - nastavak

- Prethodna formula je u nefaktorizovanom obliku.
- Ako se nađu koreni polinoma u brojiocu (z_i) i koreni imenioca (p_i), onda prenosna funkcija se može napisati u faktorizovanom obliku:

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=C_1\cdot\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

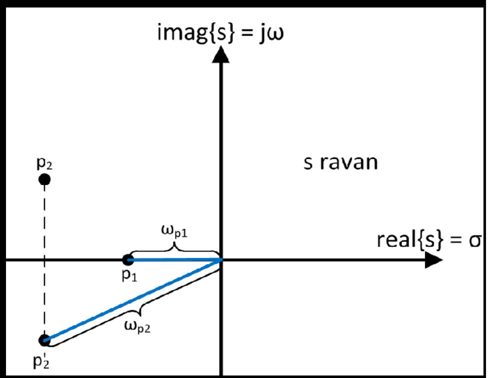
- Koreni polinoma u brojiocu se nazivaju nule prenosne funkcije, a koreni polinoma u imeniocu predstavljaju njene polove.
- Pošto su koeficijenti polinoma u prenosnoj funkciji realni brojevi, polovi i nule prenosne funkcije su ili realni brojevi ili konjugovano-kompleksni parovi.

Pojam prenosne funkcije - nastavak

- Pol ili nula mogu ležati na realnoj osi ili simetrično u odnosu na nju kada su konjugovano-kompleksni.
- Učestanost pola ili nule se definiše njihovim rastojanjem od koordinatnog početka u ravni *s*.
- Za realni pol p_1 na slici, učestanost pola je odsečak realne ose od koordinatnog početka do tačke p_1, a za konjugovano kompleksne polove to je duž od koordinatnog početka do p_2, odnosno:

$$\omega_{p1} = |p_1|$$

$$\omega_{p2} = |p_2|$$



Pojam prenosne funkcije - nastavak

- Iz teorije električnih kola poznato je da je broj polova u prenosnoj funkciji, što se označava i kao red linearnog sistema, jednak broju nezavisnih akumulacionih elemenata.
- To znači da je broj polova jednak broju kondenzatora umanjenom za broj čisto kapacitivnih kontura plus broju kalemova umanjenom za broj čisto induktivnih čvorova.
- Ovaj rezultat dopušta određivanje broja polova *n* bez izračunavanja prenosne funkcije.
- Broj nula u prenosnim funkcijama realnih kola je uvek manji od broja polova prenosne funkcije. U suprotnom, ako bi broj nula bio veći ili jednak broju polova, modul prenosne funkcije bi imao beskonačnu vrednost za $s \to \infty$ ili bi težio konstantnoj vrednosti što nije fizički ostvarljivo.

Približno crtanje frekvencijskih karakteristika – Bode-ovi dijagrami

- Prenosna funkcija linearnog kola u ustaljenom prostoperiodičnom režimu (smena *s = jω*) je sledeća:

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=C_1\cdot\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Ona se može napisati u Euler-ovom obliku:

$$H(s)|_{s=j\omega}=H(j\omega)=A(\omega)\cdot e^{j\Phi(\omega)}$$

- *A(ω)* predstavlja amplitudsku karakteristiku kola, koja je jednaka proizvodu modula svakog faktora u gornjem izrazu.
- *Φ(ω)* predstavlja faznu karakteristiku i jednaka je algebarskom zbiru faza svakog faktora.

Logaritamska amplitudska karakteristika

- Metod crtanja amplitudske karakteristike celog kola je to da se one prvo crtaju za svaki faktor u donjem izrazu pojedinačno, a zatim se iz njih izvodi krajnji rezultat množenjem odnosno deljenjem.

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=C_1\cdot\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

- Da bi se izbeglo množenje, uvodi se logaritamska amplitudska karakteristika kola definisana kao:

$$A_L(\omega)=20\log_{10}A(\omega)=20\log_{10}|H(j\omega)|$$

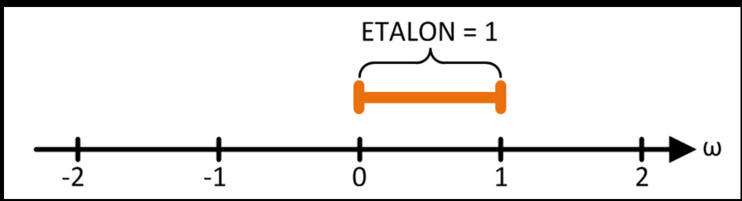
- Time se množenje faktora amplitudskih karakteristika pretvara u sabiranje njihovih logaritamskih amplitudskih karakteristika.

Logaritamska amplitudska karakteristika

- Amplitudska karakteristika *A(ω)* je realna funkcija frekvencije, bezdimenzioni broj.
- Logaritamska amplitudska karakeristika $A_L(\omega)$ je takođe realna funkcija frekvencije, izražava se u decibelima (*dB*).
- Decibel je bezdimenziona relativna jedinica kao procenat. Veličina *+20*dB pokazuje povećanje od deset puta, a *-20dB* smanjenje od deset puta.

Linearna skala za učestanost

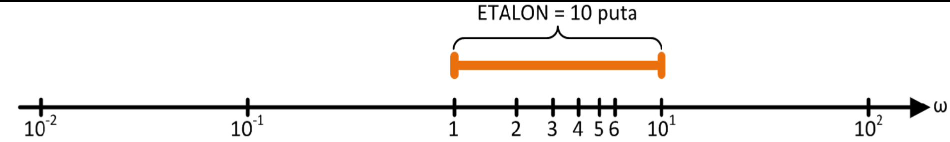
- Linearna skala je aditivne prirode (slika).



- Kod linearne skale odredi se početna tačka (*0*) na brojnoj osi i odabere se jedinična dužina (etalon).
- Položaj nekog broja na osi se određuje tako da se ispred ili iza početne tačke nanese odgovarajući broj jediničnih dužina.

Logaritamska skala za učestanost

- Da bi se amplitudska i fazna karakteristika crtale u širokom opsegu učestanosti, umesto linearne, za ω se uvodi logaritamska razmera.
- Logaritamska razmera je multiplikativna i prikazana je na donjoj slici.

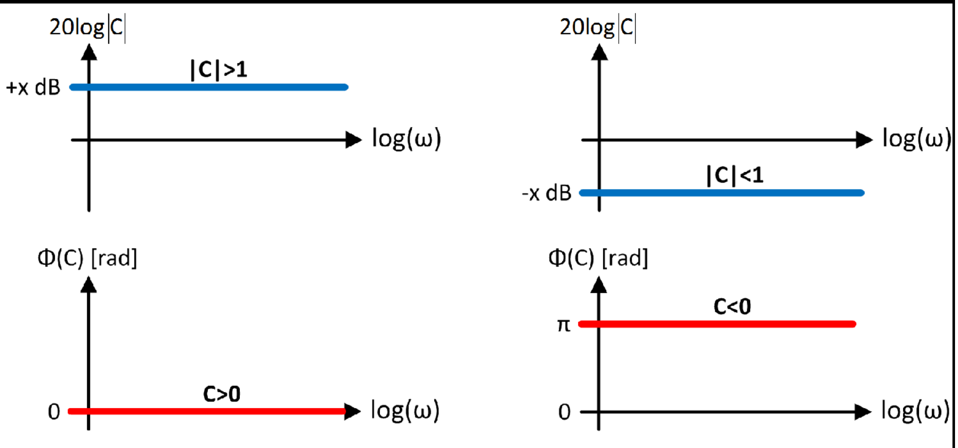


- Na logaritamskoj skali usvoji se tačka koja odgovara jedinici i etalon koji označava faktor množenja (obično 10). Množeći sa etalonom dobijemo sledeću tačku skale na desnu stranu. Deljenjem sa istim brojem dobijemo sledeću tačku na istom rastojanju na levu stranu.
- Položaj frekvencije na osi se određuje nanošenjem etalona potreban broj puta na levu ili desnu stranu, u zavisnosti od toga koji stepen od broja deset predstavlja data frekvencija. Ako broj ima faktor ε koji nije celobrojni umnožak od 10, onda njemu odgovara deo etalona $\varepsilon_L = \log_{10}\varepsilon$.
- Na primer, položaj broja $\varepsilon=2$ je $\varepsilon_L=\log_{10}2=0,303$ etalona na desnu stranu.
- Ako se radi o dvesta puta većoj frekvenciji od jedinične, važi $\varepsilon=200=2\cdot 10^2$ i određuje se položaj tačke na skali kao $\varepsilon_L=\log\varepsilon=\log 2 + 2= 2,303$ etalona na desnu stranu u odnosu na jedinicu.

Mogući faktori prenosnih funkcija

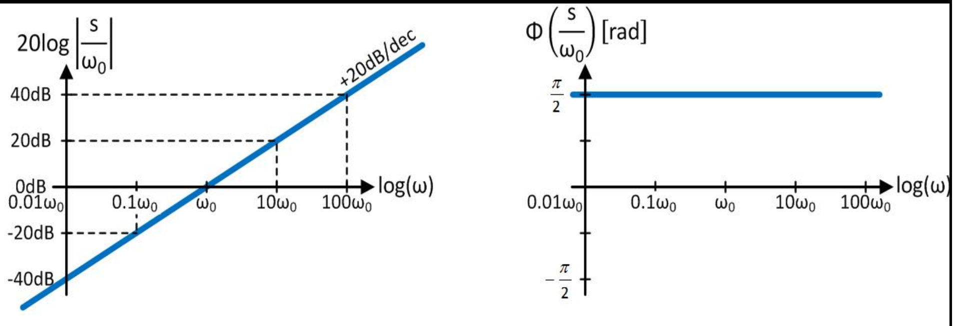
- Izraz za prenosnu funkciju može sadržati faktore, koji imaju jedan od sledećih oblika:
  1. Konstanta: C;
  2. Jednostruka nula na nultoj frekvenciji;
  3. Jednostruki pol na nultoj frekvenciji;
  4. Višestruka nula na nultoj frekvenciji;
  5. Višestruki pol na nultoj frekvenciji;
  6. Jednostruka realna nula;
  7. Jednostruki realan pol;
  8. Višestruka realna nula;
  9. Višestruki realan pol;
  10. Konjugovano-kompleksni par nula;
  11. Konjugovano-kompleksni par polova;
- Prvih deset tipova faktora se javljaju kod RC i RL kola.
- Konjugovano-kompleksni polovi i nule se javljaju u LC kolima ili u kolima koja koriste povratne sprege.

1. Konstanta: C > 0.



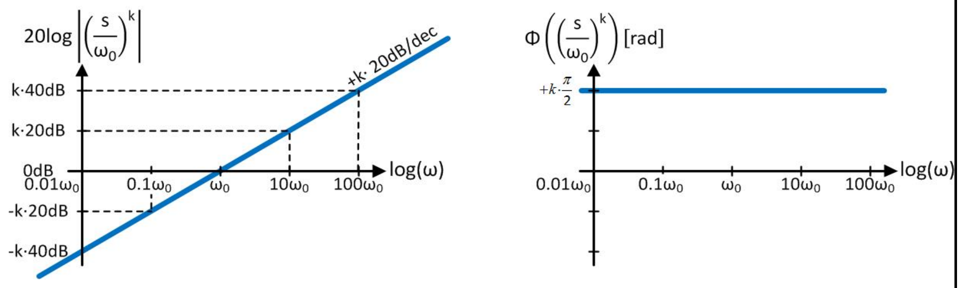
Amplitudska i fazna karakteristika konstante C.

2. Jednostruka nula na nultoj frekvenciji: $\frac{s}{\omega_0}$



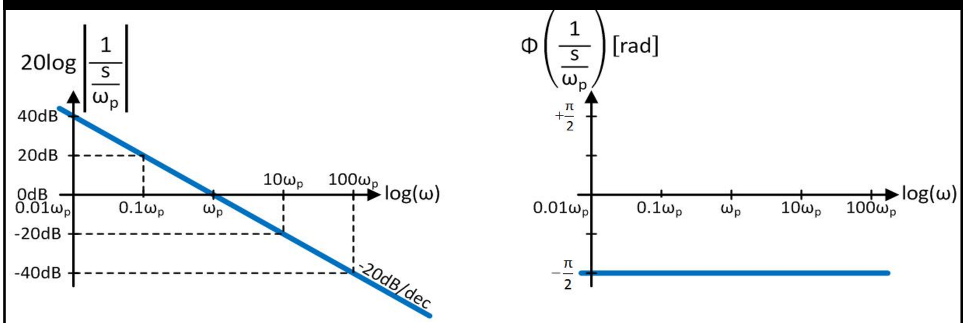
Amplitudska i fazna karakteristika jednostruke nule u koordinatnom početku.

3. Višestruka nula na nultoj frekvenciji: $\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^k$



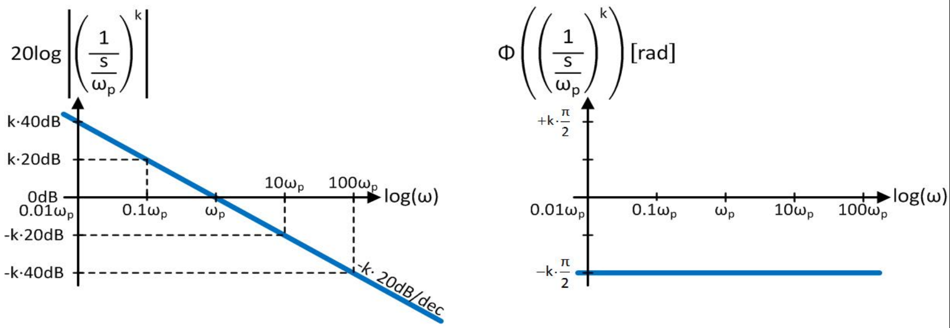
Amplitudska i fazna karakteristika višestruke nule u koordinatnom početku.

4. Jednostruki pol na nultoj frekvenciji: $\frac{1}{\frac{s}{\omega_p}}$



Amplitudska i fazna karakteristika jednostrukog pola u koordinatnom početku.

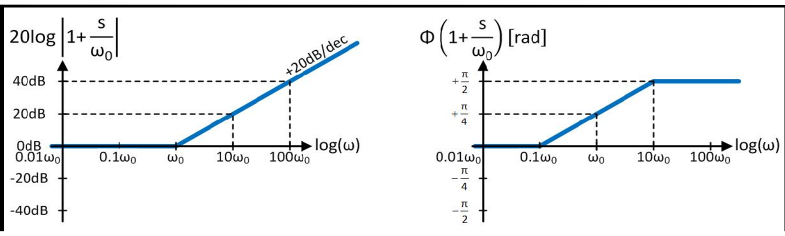
5. Višestruki pol na nultoj frekvenciji: $\left(\dfrac{1}{\frac{s}{\omega_p}}\right)^k$



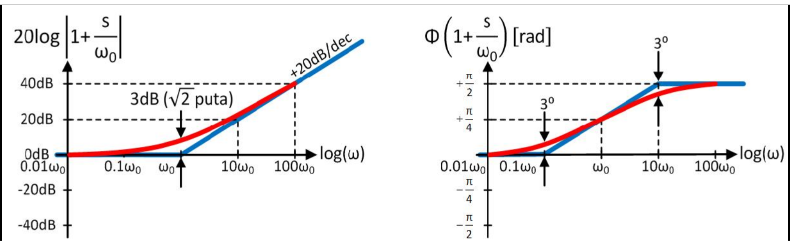
Amplitudska i fazna karakteristika višestrukog pola u koordinatnom početku.

- Do sada su frekvencijske karakteristike crtane bez aproksimacija. U narednim slučajevima, kada polovi i nule nisu u koordinatnom početku, tačne krive će biti zamenjene njihovim izlomljeno-linearnim aproksimacijama sačinjenim od delova asimptota.

6. Jednostruka realna nula: $1+\dfrac{s}{\omega_0}$

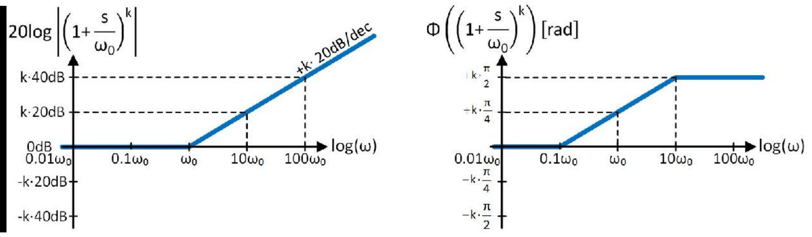


Amplitudska i fazna karakteristika jednostruke realne nule sa aproksimacijom.

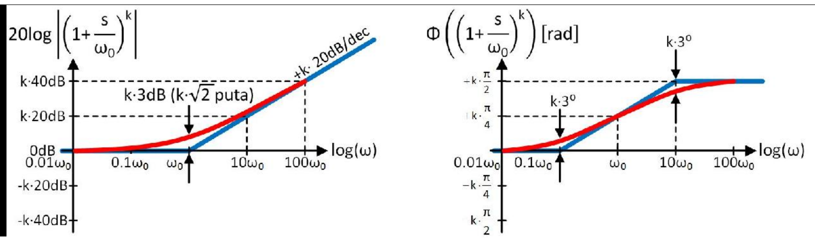


Amplitudska i fazna karakteristika jednostruke realne nule sa aproksimacijom (plava boja) i bez aproksimacije (crvena boja).

7. Višestruka realna nula: $\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)^k$

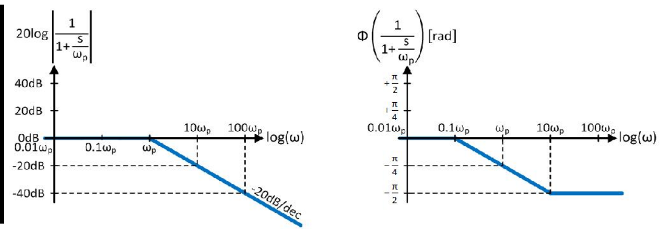


Amplitudska i fazna karakteristika jednostruke realne nule sa aproksimacijom.

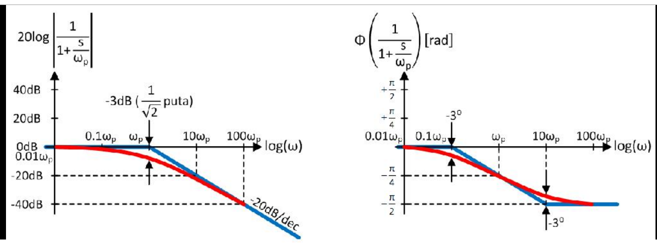


Amplitudska i fazna karakteristika jednostruke realne nule sa aproksimacijom (plava boja) i bez aproksimacije (crvena boja).

8. Jednostruki realan pol: $\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_p}}$

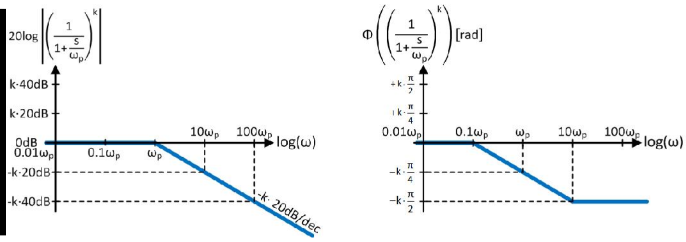


Amplitudska i fazna karakteristika jednostrukog realnog pola sa aproksimacijom.

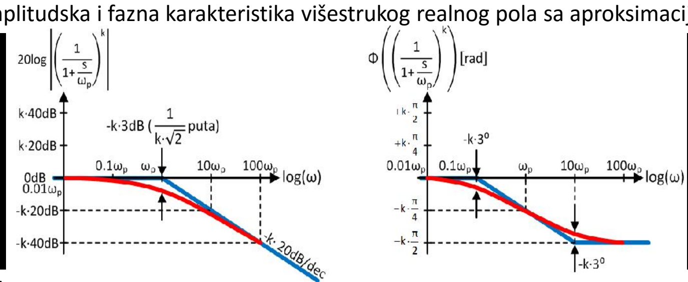


Amplitudska i fazna karakteristika jednostrukog realnog pola sa aproksimacijom (plava boja) i bez aproksimacije (crvena boja).

9. Višestruki realan pol: $\left(\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_p}}\right)^k$



Amplitudska i fazna karakteristika višestrukog realnog pola sa aproksimacijom.



Amplitudska i fazna karakteristika jednostrukog realnog pola sa aproksimacijom (plava boja) i bez aproksimacije (crvena boja).

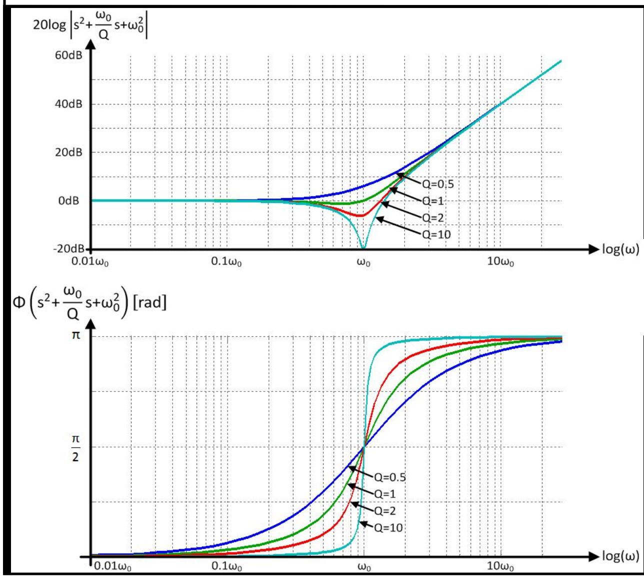
10. Konjugovano-kompleksni par nula: s^2+as+b^2

- Formula s^2+as+b^2 se često piše u sledećem obliku:

$$s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2$$

- Iz ovog oblika vrednost nula je: $z_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$
- Parametar ω_0 predstavlja (kružnu) učestanost konjugovano-kompleksnih nula.
- Sa Q je označen faktor dobrote nule i on određuje rastojanje te dve nule od imaginarne ose u ravni kompleksne učestanosti.
- Konjugovano-kompleksne nule postoje za $Q > 0,5$ i bliži su imaginarnoj osi kada je Q veće.

10. Konjugovano-kompleksni par nula: s^2+as+b^2



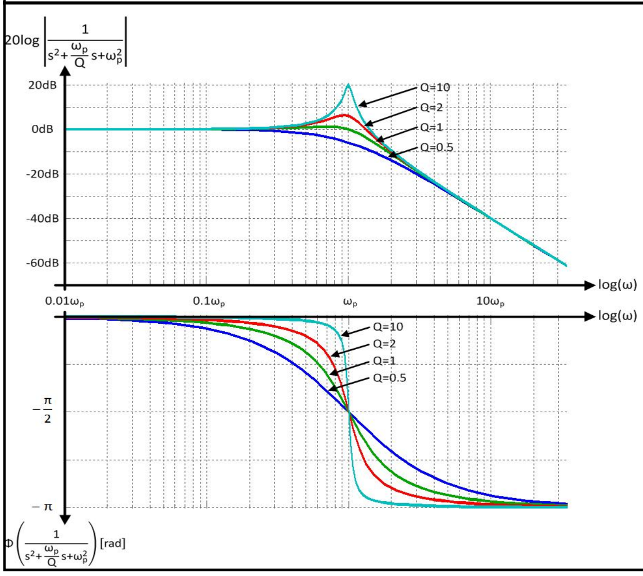
Amplitudska i fazna karakteristika konjugovano-kompleksnog para nule.

11. Konjugovano-kompleksni par polova: $\dfrac{1}{s^2+as+b^2}$

- Formula $\dfrac{1}{s^2+as+b^2}$ se često

  piše u sledećem obliku: $\dfrac{1}{s^2+\dfrac{\omega_p}{Q}s+\omega_p^2}$
- U ovom obliku vrednost polova je: $p_{1,2}=-\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$
- Parametar ω_p predstavlja učestanost konjugovano-komleksnog pola.
- Sa Q je označen faktor dobrote pola i on određuje njihovo rastojanje od imaginarne ose u ravni kompleksne učestanosti.
- Konjugovano-kompleksni polovi postoje za $Q > 0,5$ i bliži su imaginarnoj osi kada je Q veće.

11. Konjugovano-kompleksni par polova: $\frac{1}{s^2+as+b^2}$



Amplitudska i fazna karakteristika konjugovano-kompleksnog para polova.