

Tantárgy: ANALÓG ELEKTRONIKA
Tanár: Dr. Burány Nándor

3. félév
Óraszám: 2+2

2.6. RÉSZ

BODE DIAGRAMOK

Készítette:
Divéki Szabolcs mgr.

Az átviteli függvény fogalma

- Egy áramkör átviteli függvényét úgy definiáljuk, mint a válaszfüggvény és a gerjesztés Laplace transzformációinak arányát.
- Az átviteli függvény levezetésének lépései a következők:
 - Az áramkör elemeit helyettesítjük a megfelelő impedanciákkal:
 - Az L induktivitású tekercset sL impedanciával helyettesítjük,
 - A C kapacitású kondenzátort $1/sC$ impedanciával helyettesítjük,
 - Az R ellenállás-értékű ellenállást R impedanciával helyettesítjük.
 - Valamelyik ismert módszerrel megoldjuk az áramkört (pl. csomóponti potenciálok módszere).
 - Eredményként megkapjuk az átviteli függvényt két valós együtthatójú polinom hányadosaként, a polinomok az s komplex változó függvényei:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = C_0 \cdot \frac{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s^1 + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s^1 + b_0}$$

Az átviteli függvény fogalma - folytatás

- A kapott képletben a polinomok nincsenek faktorizálva.
- Ha meghatározzuk a számlálóban levő polinom gyökeit (z_i) és a nevező gyökeit (p_i), akkor az átviteli függvényt faktorizált alakra hozhatjuk:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = C_1 \cdot \frac{(s+z_1) \cdot (s+z_2) \cdot \dots \cdot (s+z_m)}{(s+p_1) \cdot (s+p_2) \cdot \dots \cdot (s+p_n)}$$

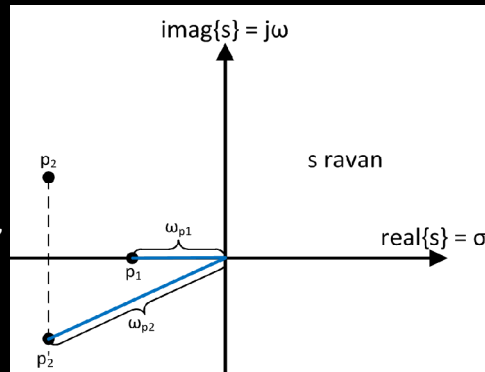
- A számlálóban levő polinom gyökeit az átviteli függvény nulláinak nevezzük. A nevezőben levő polinom gyökei az átviteli függvény pólusai.
- Mivel a polinomok együtthatói valós számok, az átviteli függvény pólusai és nullái mindig valós számok vagy konjugált komplex számpárok.

Az átviteli függvény fogalma - folytatás

- A komplex számsíkban nézve a pólusok és nullák elhelyezkedését, ezek lehetnek a valós tengelyen vagy szimmetrikusan a valós tengelyre nézve (konjugált komplex esetben).
- A pólus vagy a nulla frekvenciája alatt a koordináta rendszer középpontjától mért távolságot értjük az s síkban.
- A p_1 valós pólus esetén (ábra) a frekvencia a pólusnak a távolsága a koordináta rendszer középpontjától, konjugált komplex pólus esetén viszont a középpont és a p_2 közötti távolság:

$$\omega_{p1} = |p_1|$$

$$\omega_{p2} = |p_2|$$



Az átviteli függvény fogalma - folytatás

- Áramkör-elméletből ismeretes, hogy az átviteli függvény pólusainak száma (nevezik ezt az áramkör fokszámanak is) egyenlő az egymástól független energiatároló elemek számával.
- A pólusok számát úgy kapjuk, hogy a kondenzátorok számából kivonjuk a tisztán kondenzátoros hurkok számát majd hozzáadjuk a tekercsek számát, kivonva a tisztán tekercses csomópontok számát
- Ilyen módon az áramkör fokszáma és aszimtotikus viselkedése $s \rightarrow \infty$ esetén meghatározható az átviteli függvény levezetése nélkül.
- Az átviteli függvény nulláinak száma mindig kisebb a pólusok számánál. Ellenkező esetben, ha a nullák száma nagyobb vagy egyenlő lenne a pólusok számánál, az átviteli függvény modulusa végtelenbe emelkedne $s \rightarrow \infty$ esetén, vagy konstans értékhez tartana, ami fizikailag nem megvalósítható.

A frekvenciamenet közelítő rajzolása – Bode diagramok

- Állandósult szinuszos gerjesztés esetén az átviteli függvényre alkalmazzuk az $s = j\omega$ helyettesítést:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = C_1 \cdot \frac{(s+z_1) \cdot (s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1) \cdot (s+p_2) \cdots (s+p_n)}$$

Ezt követően a függvény az Euler-féle alakra hozható:

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$$

- $A(\omega)$ az áramkör amplitúdó karakterisztikája, az átviteli függvény faktorai szorzatának modulusa.
- $\Phi(\omega)$ az áramkör fázis karakterisztikája, az egyes faktorok fázisainak algebrai összege.

Logaritmikus amplitúdó karakterisztika

- Az amplitúdó karakterisztikát a teljes átviteli függvényre úgy rajzoljuk, hogy először megrajzoljuk minden egyes faktorra, majd a kapott eredményeket összeszorozzuk ill. elosztjuk.

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = C_1 \cdot \frac{(s+z_1) \cdot (s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1) \cdot (s+p_2) \cdots (s+p_n)}$$

- A szorzás és osztás elkerülése végett bevezetjük a logaritmikus amplitúdó karakterisztikát:

$$A_L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

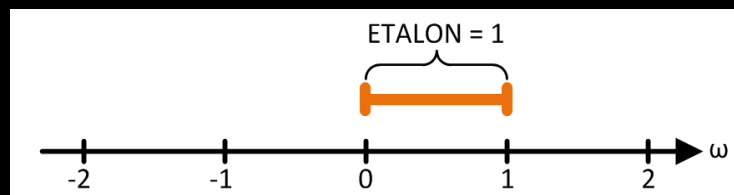
- Ez által a szorzások és osztások az egyes faktorok logaritmikus amplitúdó karakterisztikáinak összeadására ill. kivonására vezetődik vissza.

Logaritmikus amplitúdó karakterisztika

- Az $A(\omega)$ amplitúdó karakterisztika a frekvencia valós függvénye, nincs mértékegysége.
- Az $A_L(\omega)$ logaritmikus amplitúdó karakterisztika is valós függvénye a frekvenciának, a mértékegysége decibell (dB).
- A decibel relatív mértékegység mint pl. a százalék. A $+20dB$ tízszeres növekedést jelent, a $-20dB$ viszont tízszeres csökkenést

Lineáris frekvencia skála

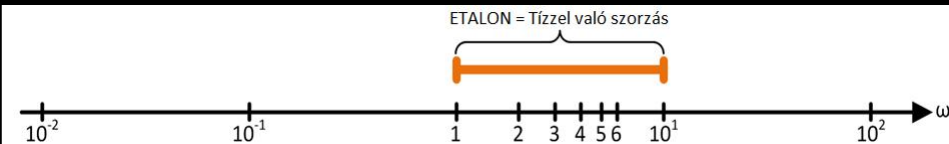
- Lineáris skálán a számértékek összeadódnak (ábra).



- Lineáris skála esetén a számtengelyen meghatározzuk a kezdőpontot (0) és az egységnyi távolságot (etalon).
- Az adott számnak megfelelő pontot úgy kapjuk, hogy a kezdőpont után (elé) mérjük a megfelelő számú egységnyi hosszúságot.

Logaritmusos frekvencia skála

- Az amplitúdó és a fázis karakterisztikát rendszerint széles frekvencia tartományban kell rajzolni. Ilyenkor alkalmasabb lineáris helyett logaritmusos frekvencia skála alkalmazása.
- A logaritmusos skálán az alapérték és annak többszörösei illetve tört részei jelennek meg egymástól egyenlő távolságra.

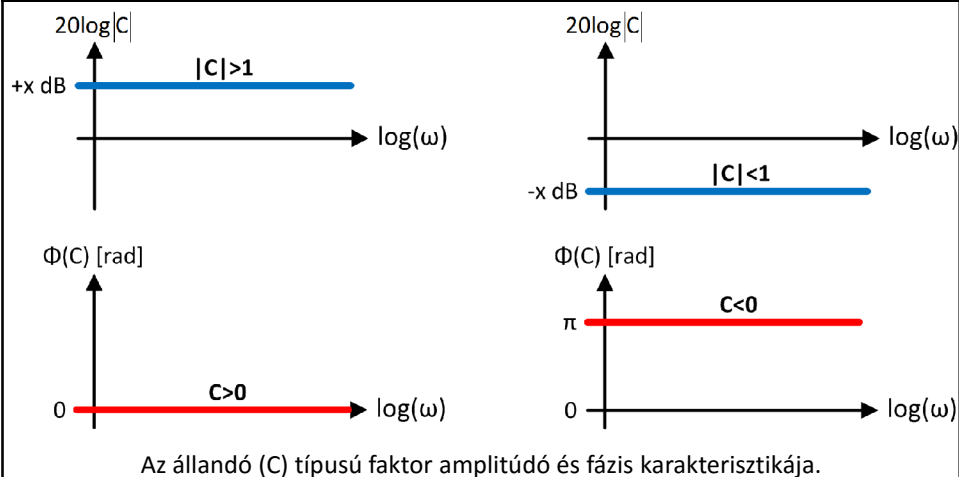


- A logaritmusos skála rajzolásakor először is felvesszük az egységnyi frekvenciának megfelelő pontot. Ezt követően felvesszük a szorzótényezőt (rendszerint 10), amivel az alapértéket szorozva megkapjuk a skála következő beosztását jobbra. Ugyanezzel az értékkel osztva kapjuk a skála következő pontját, balra.
- Adott pont helyzetét a skálán úgy határozzuk meg, hogy kellő számú lépést teszünk jobbra vagy balra, attól függően, hogy a tíznek hányadik hatványa az adott frekvencia. Ha nem egész számú hatványról van szó, akkor az $\varepsilon_L = \log_{10} \varepsilon$ képletet használjuk.
- Ha például kétszer nagyobb frekvenciát kell bejelölni a tengelyen, akkor $\varepsilon=2$ azaz $\varepsilon_L = \log_{10} 2 = 0,303$ nagyságú elmozdulásról van szó, jobbra.
- Kétszázszor nagyobb frekvencia esetén $\varepsilon=200=2 \cdot 10^2$, az elmozdulás mértéke $\varepsilon_L = \log \varepsilon = 2 + \log 2 = 2,303$, szintén jobbra.

Lehetséges faktorok az átviteli függvényben

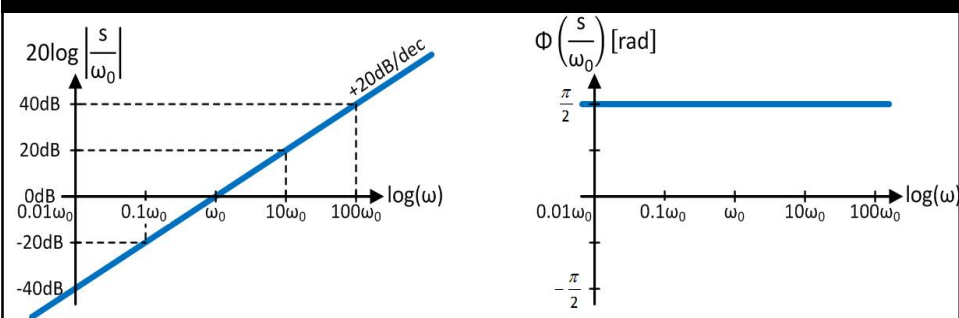
- Az átviteli függvény faktorizált alakja a következő elemeket tartalmazhatja:
 1. Állandó: C ;
 2. Egyszeres nulla a nulla frekvencián;
 3. Egyszeres pólus a nulla frekvencián;
 4. Többszörös nulla a nulla frekvencián;
 5. Többszörös pólus a nulla frekvencián;
 6. Egyszeres valós nulla;
 7. Egyszeres valós pólus;
 8. Többszörös valós nulla;
 9. Többszörös valós pólus;
 10. Konjugált komplex nulla-pár;
 11. Konjugált komplex pólus-pár;
- Az első kilenc típusú faktor RC és RL áramköröknél jelentkezik.
- Konjugált komplex nullák és pólusok LC áramköröknél jelentkeznek vagy visszacsatolt áramköröknél.

1. Állandó: $C > 0$.



2. Egyszeres nulla a nulla frekvencián:

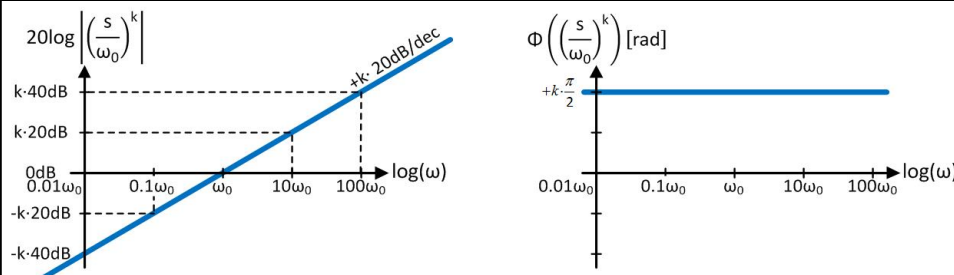
$$\frac{S}{\omega_0}$$



Egyszeres nulla a nulla frekvencián típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája.

3. Többszörös nulla a nulla frekvencián:

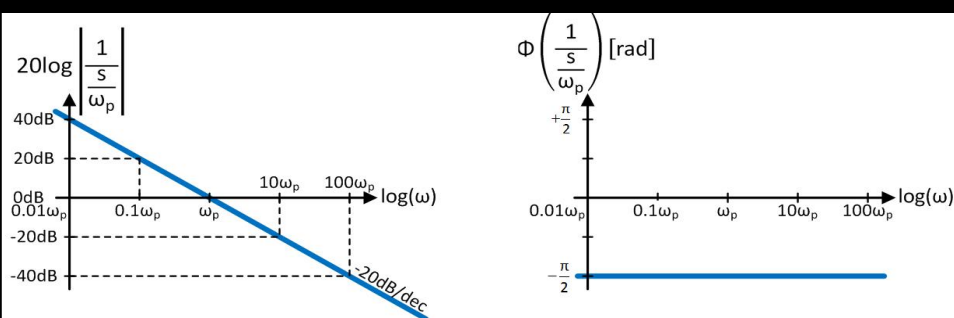
$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^k$$



Többszörös nulla a nulla frekvencián típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája.

4. Egyszeres pólus a nulla frekvencián:

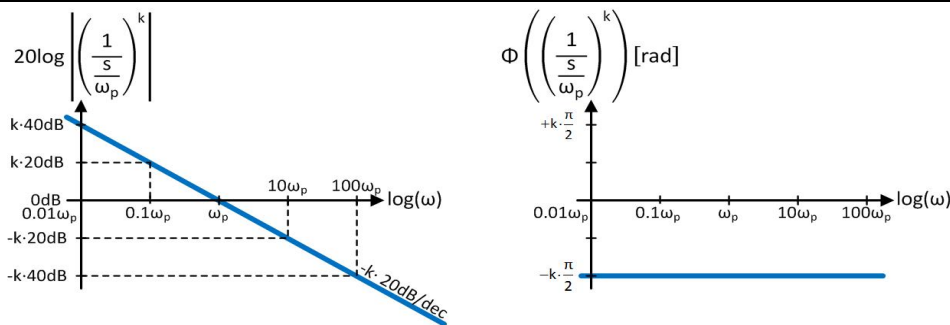
$$\frac{1}{s \omega_p}$$



Egyszeres pólus a nulla frekvencián típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája.

5. Többszörös pólus a nulla frekvencián:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^k$$

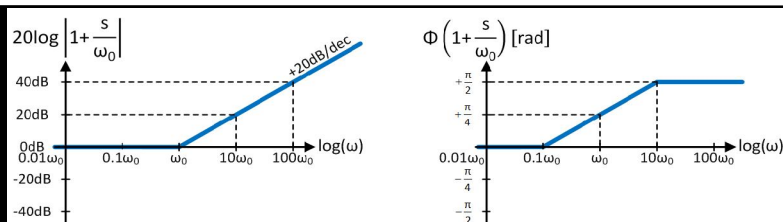


Többszörös pólus a nulla frekvencián típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája.

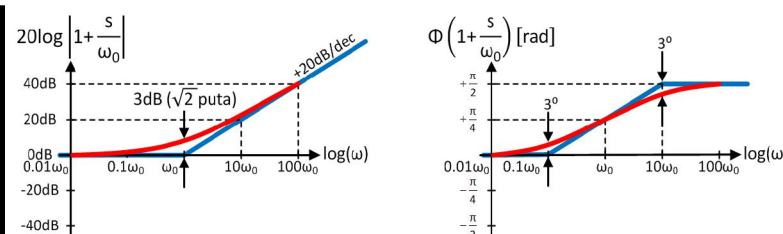
- Az eddigi karakterisztikákat pontosan, közelítés nélkül rajzoltuk. A továbbiakban a pólusok és a nullák nem nulla frekvencián jelentkeznek, ilyenkor célszerű a pontos diagramokat azok aszimptotáival helyettesíteni.

6. Egyszeres valós nulla:

$$1 + \frac{s}{\omega_0}$$

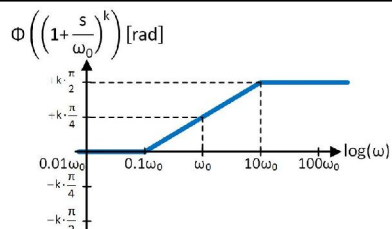
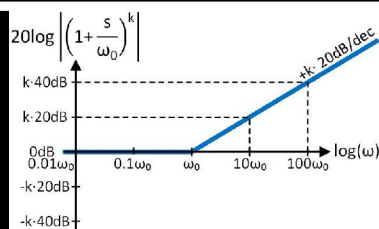


Az egyszeres valós nulla típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája, approximálva.

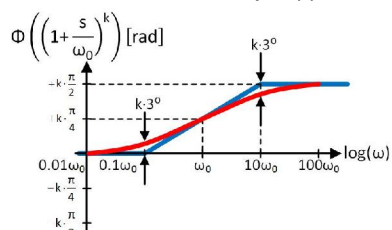
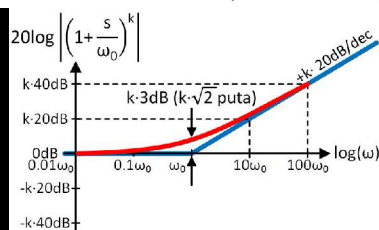


A pontos (piros) és a közelítéses (kék) amplitúdó- és fázis karakterisztika összehasonlítása.

7. Többszörös valós nulla: $\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^k$

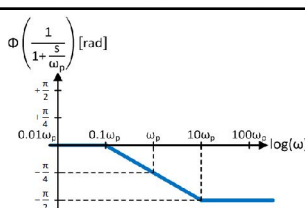
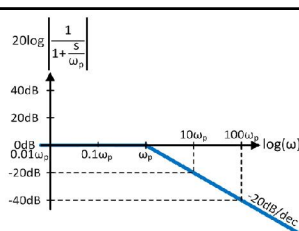


A többszörös valós nulla típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája, approximálva.

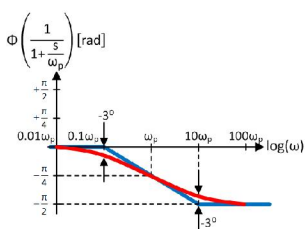
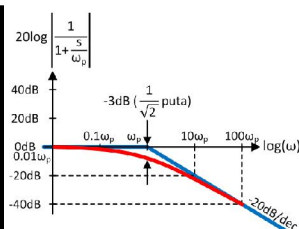


A pontos (piros) és a közelítéses (kék) amplitúdó- és fázis karakterisztika összehasonlítása.

8. Egyszeres valós pólus: $\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$



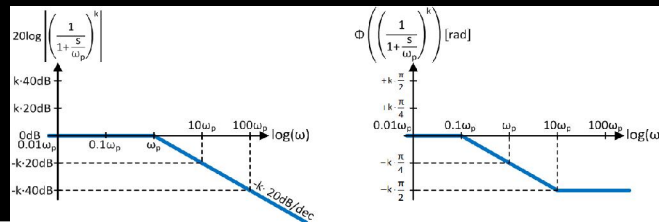
Az egyszeres valós pólus típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája, approximálva.



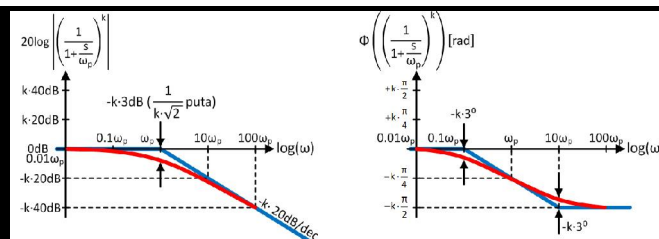
A pontos (piros) és a közelítéses (kék) amplitúdó- és fázis karakterisztika összehasonlítása.

9. Többszörös valós pólus:

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \right)^k$$



A többszörös valós pólus típusú faktor amplitúdó- és fázis karakterisztikája, approximálva.



A pontos (piros) és a közelítéssel (kék) amplitúdó- és fázis karakterisztika összehasonlítása.

10. Konjugált komplex nulla-pár:

$$s^2 + as + b^2$$

- Az $s^2 + as + b^2$ képletet gyakran a következő alakban írjuk:

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2$$

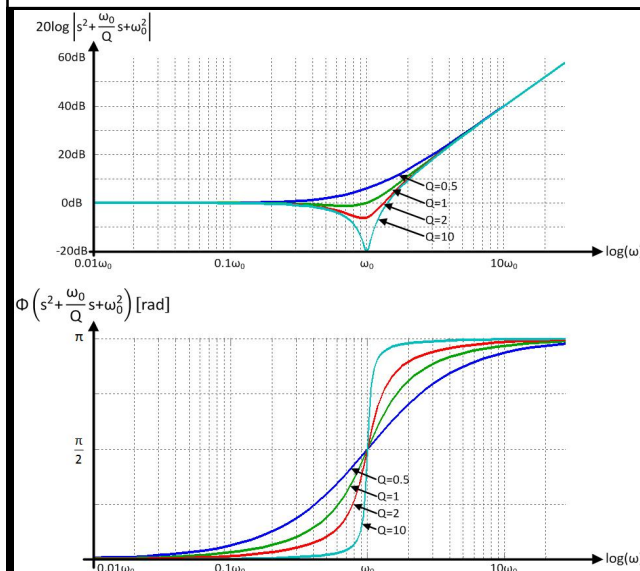
- Ebből kifejezve a nullahelyek:

$$z_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

- Az ω_0 paraméter a konjugált komplex nulla-pár (kör)frekvenciája.
- Q -val a nulla jósaági tényezőjét jelöltük, ez a paraméter a két nullának a képzetes tengelytől való távolságával kapcsolatos.
- Konjugált komplex nulla akkor jelentkezik, ha $Q > 0,5$ és nagyobb Q érték esetén közelít a képzetes tengelyhez.

10. Konjugált komplex nulla-pár :

$$s^2 + as + b^2$$



A konjugált komplex nulla-pár amplitúdó- és fázis karakterisztikája.

11. Konjugált komplex pólus-pár :

$$\frac{1}{s^2 + as + b^2}$$

- Az $\frac{1}{s^2 + as + b^2}$ képletet gyakran a következő

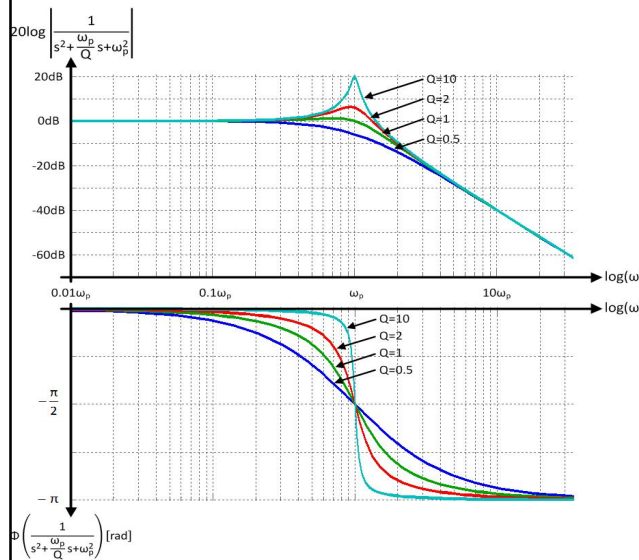
alakban írjuk:

$$\frac{1}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + \omega_p^2}$$

- Ez alapján a pólusok helyei:
$$p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
- Az ω_p paraméter a konjugált komplex pólus-pár (kör)frekvenciája.
- Q -val a pólus jósági tényezőjét jelöltük, ez a paraméter a két nullának a képzetes tengelytől való távolságával kapcsolatos.
- Konjugált komplex pólus akkor jelentkezik, ha $Q > 0,5$ és nagyobb Q érték esetén közelít a képzetes tengelyhez.

11. Konjugált komplex pólus-pár:

$$\frac{1}{s^2 + as + b^2}$$



A konjugált komplex pólus-pár
amplitúdó- és fázis
karakterisztikája.