SZABADKAI MŰSZAKI
SZAKFŐISKOLA

Direkt kinematikai feladat

Dr. Simon János dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

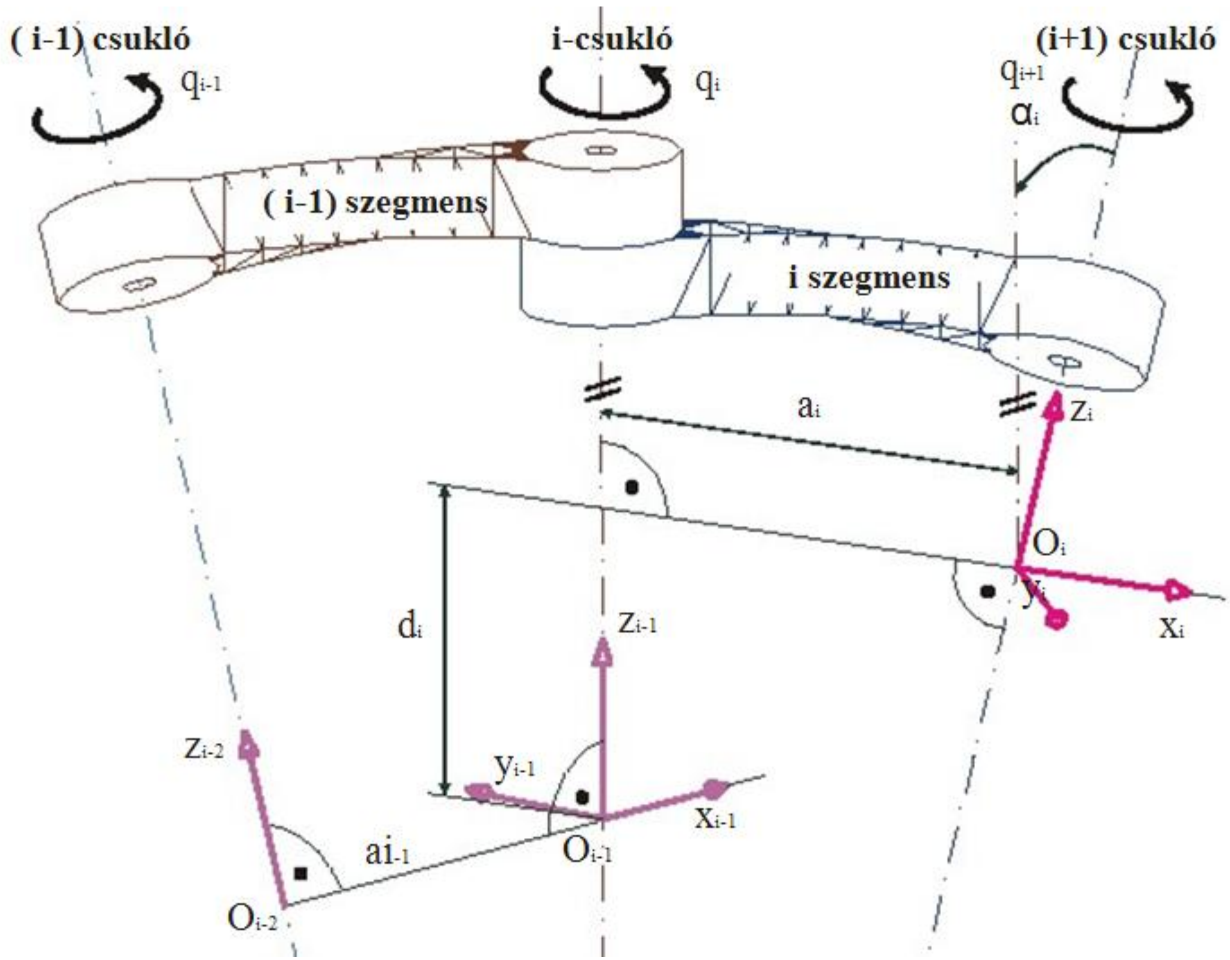
Denavit–Hartenberg eljárás

- A csuklókoordináták transzformálása világkoordinátákba a Denavit-Hartenberg féle transzformációs mátrixszal történik.
- Denavit és Hartenberg ezt az eljárást 1955-ben publikálta és ezért nevezték el együttesen Denavit-Hartenberg módszernek.
- Az eljárás lényege az, hogy egy koordinátarendszer két haladó és két forgó mozgással egy másikba átvihető.

Denavit–Hartenberg eljárás

- A Denavit-Hartenberg eljárás szerint az i-edik és i+1-edik robotcsuklókra egy-egy derékszögű koordinátarendszert ültetünk, a csukló tengelyének iránya a z tengely és a két egymást követő koordinátarendszert a következő irányszabályok szerint határozzuk meg:
- Az i+1-es robotcsuklón megválasztjuk az O_i x_i y_i z_i koordinátarendszert a következő módon:
- A z_i tengely az i+1-edik csukló irányában fekszik,
- az x_i tengely a két szemlélt csukló (i-edik és i+1-edik) tengelyének közös normálisába esik és az i-edik csuklótól az i+1-edik csukló felé mutat,
- az y_i tengely kielégíti a következő feltételt: $x_i \times y_i = z_i$ - jobbcsavar irányú.

Denavit–Hartenberg eljárás



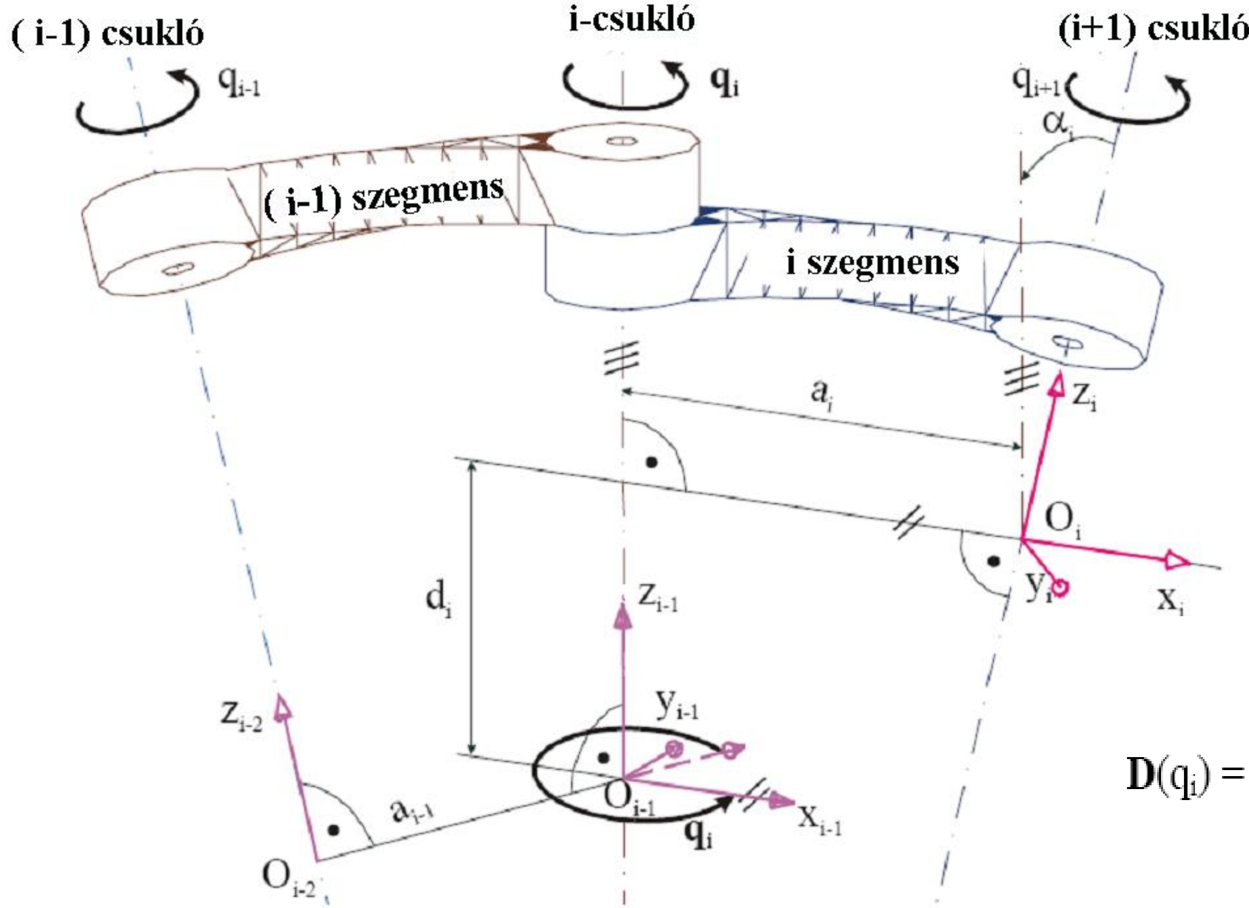
Ábra 1. A derékszögű koordinátarendszerek helyzete Denavit-Hartenberg eljárás szerint

Denavit–Hartenberg eljárás

- A Denavit-Hartenberg paraméterek a következők:
- d_i : - minden csuklótengelynek két normálisa van (a_{i-1} és a_i) és a normálisok közötti az i-edik csukló tengelye mentén mért távolság a d_i,
- a_i : – az i-edik és i+1-edik csukló-tengelyek közös normálisának a hossza,
- α_i : - az i-edik csukló és az i+1-edik csukló tengelye közötti jobbcsavar irányú szög az a_i-re merőleges síkban.
- A q_i csuklókoordináta, rotációs csukló esetében az x_{i-1} és x_i tengelyek között bezárt jobbcsavar irányú szög nagysága, amely zérus, ha a tengelyek egyirányúak vagy párhuzamosak egymással. A Denavit-Hartenberg eljárás szerint felvitt két szomszédos derékszögű koordinátarendszer $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ és $O_ix_iy_iz_i$ két haladó és két forgó mozgással egymásba átvihető.

Denavit–Hartenberg eljárás

Először q_i elfordulás z_{i-1} körül: x_{i-1} párhuzamos lesz x_i-vel.

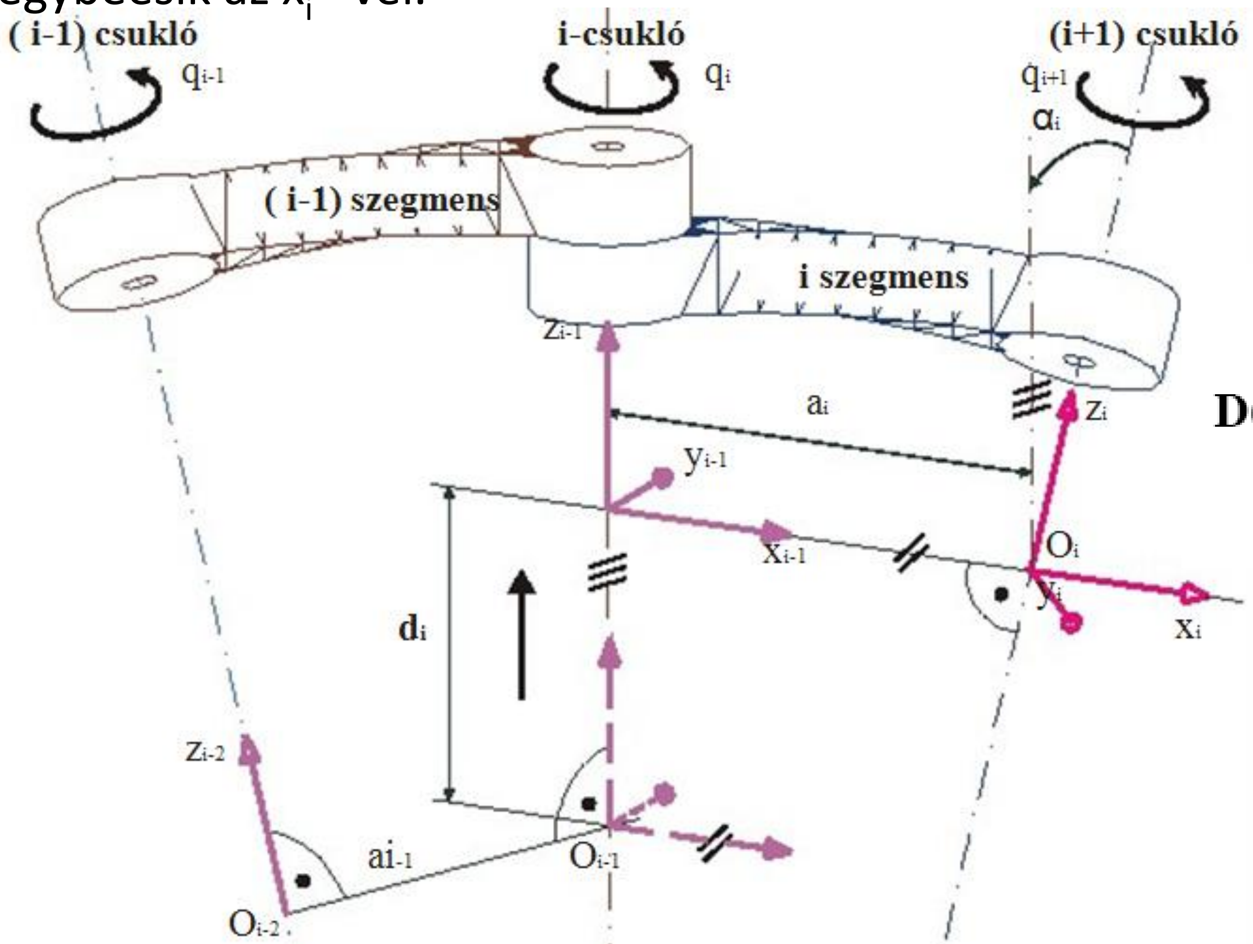


$$\mathbf{D}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ábra 2. Az $\mathbf{O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}}$ koordinátarendszer $\mathbf{q_i}$ forgatása

Denavit–Hartenberg eljárás

Másodszor következzék d_i transzláció a z_{i-1} mentén, a z_{i-1} és x_i metszéspontjáig, így az x_{i-1} egybeesik az x_i –vel.

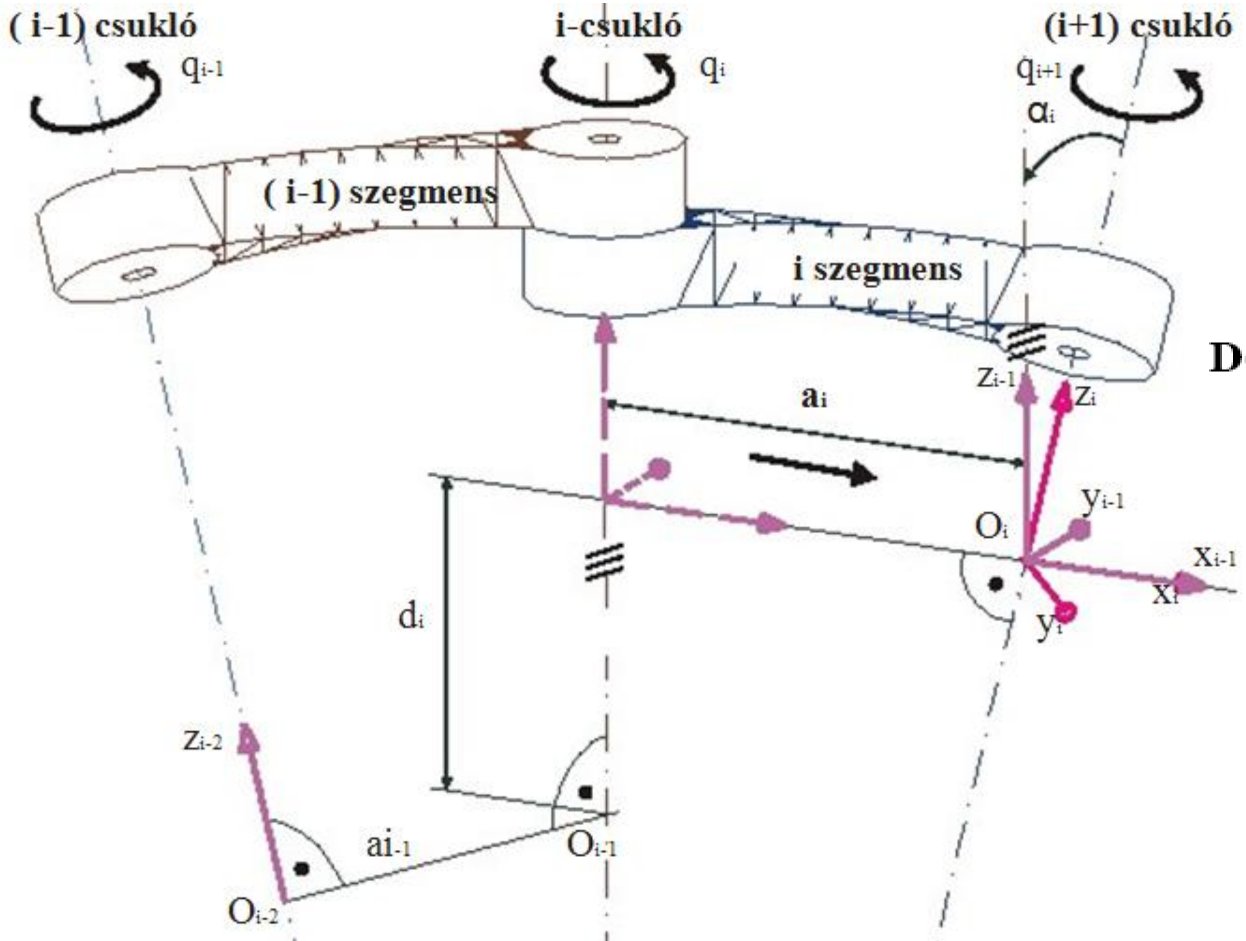


$$\mathbf{D}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ábra 3. Az elforgatott $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ koordinátarendszer d_i transzlációja

Denavit–Hartenberg eljárás

Harmadszor következik a_i transzláció x_i mentén az O_i origóig, így a koordinátarendszerek metszéspontja fedésbe kerül.

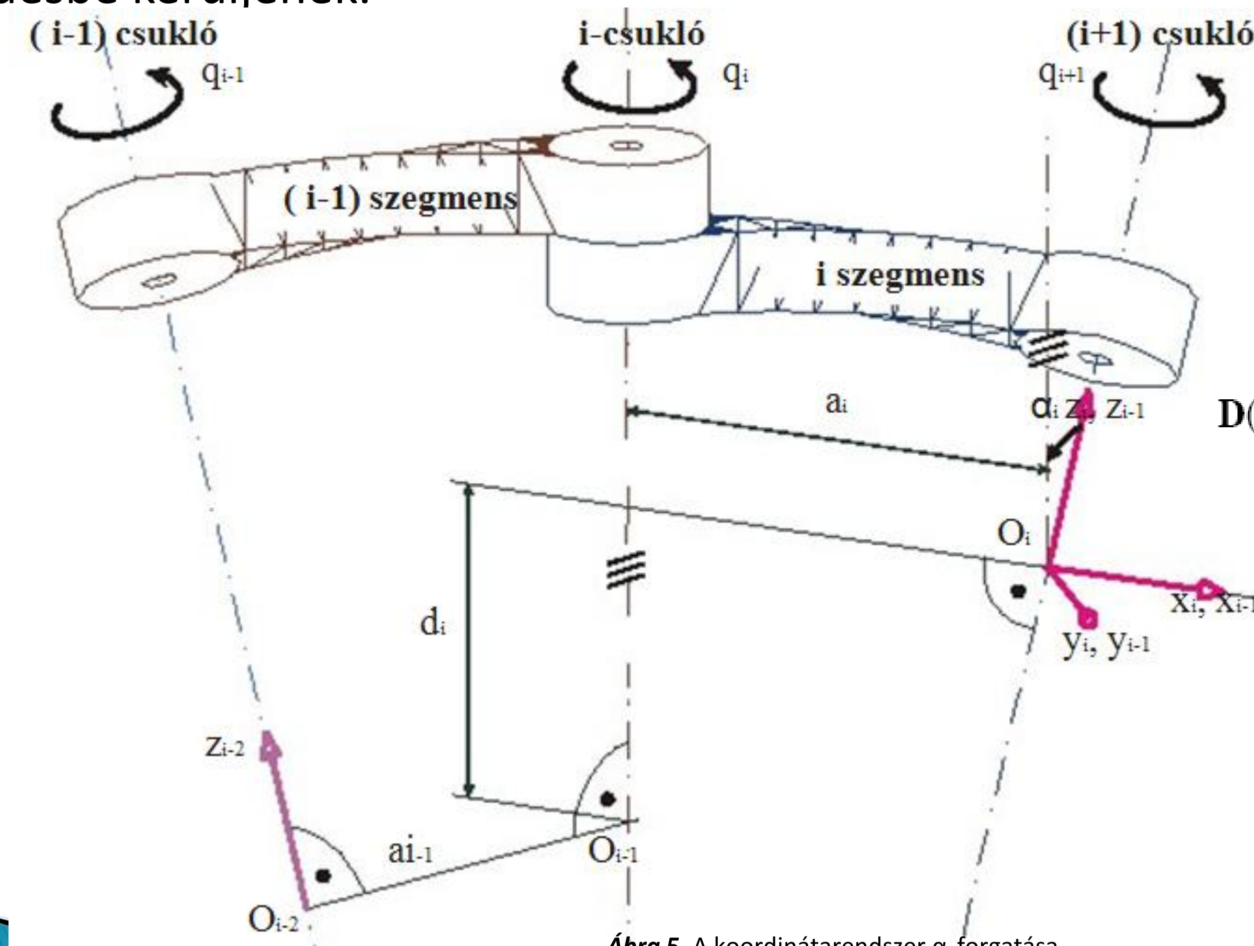


$$\mathbf{D}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ábra 4. Az elforgatott és elmozdult Oi-1xi-1yi-1zi-1 koordinátarendszer ai transzlációja

Denavit–Hartenberg eljárás

Negyedszer α_i Jobbcsavar irányú elfordulás az x_i körül: hogy a z és y tengelyek is fedésbe kerüljenek.



$$\mathbf{D}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ábra 5. A koordinátarendszer α_i forgatása

Denavit–Hartenberg eljárás

A fenti négy mozzanat a következő alakú Denavit–Hartenberg transzformációs mátrixban foglalható össze:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \mathbf{D}(q_i)\,\mathbf{D}(d_i)\,\mathbf{D}(a_i)\,\mathbf{D}(\alpha_i)$$

Behelyettesítve a mátrixokat elvégezve a mátrixszorzást megkapjuk a következő alakú Denavit–Hartenberg féle transzformációs mátrixot a két egymást követő **rotációs** csuklóra rögzített koordinátarendszer esetén:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit–Hartenberg eljárás

Transzlációs csuklók esetében a koordinátarendszereket úgy választjuk meg, hogy a_i= 0, a di hossz q_i, lesz, ami pedig a rotációs csuklónál a q_i forgásszög, az most θ_i , paraméter lesz, vagyis:

$$a_i = 0$$

$$d_i = q_i$$

$$q_i = \theta_i$$

Így a Denavit–Hartenberg féle transzformációs mátrix a **transzlációs** csuklók esetén:

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit–Hartenberg eljárás

- Miután tehát minden egymást követő koordinátarendszer esetében (a fenti eljárás szerint) meghatároztuk a Denavit–Hartenberg (D-H) féle transzformációs-mátrixot, akkor a robotmanipulátor platformjához kötött álló koordinátarendszer és az effektorhoz kötött mozgó koordinátarendszer közötti D-H féle homogén transzformációs-mátrixot, a két egymást követő koordinátarendszerek DH mátrixainak szorzata adja:

$$ {}^{0}T_{n} = {}^{0}D_{1}\,{}^{1}D_{2}\,{}^{2}D_{3}\ldots{}^{n-2}D_{n-1}\,{}^{n-1}D $$

Tehát ha a robotmanipulátornál meghatározzuk a mátrix numerikus alakját, akkor abból kiolvashatjuk a három módosított Euler szöget és az effektor TCP szerszámközéppontjának a pozícióját, így tulajdonképpen meghatározzuk a robotmanipulátor világkoordinátáit.

$$ {}^{0}\mathbf{T}_{n} = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}\mathbf{R}_{n} & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Denavit–Hartenberg eljárás

- Megállapítható tehát, hogy ily módon azzal, hogy - a három módosított Euler szöget és az effektor pontjának a pozícióját meghatároztuk, a direkt kinematikai feladatot megoldottuk.
- A ${}^{0}T_{n}$ mátrix meghatározása tehát a csuklókoordináták vektorának ismeretében, a direkt kinematikai feladat megoldásának az alapja.

SZABADKAI MŰSZAKI
SZAKFŐISKOLA

ROBOTIKA

Az effektor orientációja

Dr. Simon János dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

Az effektor orientációjának meghatározása

Robotmanipulátor effektorának az orientációját a robotplatformhoz kötött nyugvó koordinátarendszerhez viszonyítva, a módosított Euler szögekkel ψ, θ, φ határozzuk meg.

Tekintsük két koordináta rendszer és a rotáció között:

- $Ox_oy_oz_o$ **nyugvó alapkoordinátarendszer**, amely a robotmanipulátor platformjához van kötve.
- O_nxyz **mozgó koordinátarendszer** az O_n origóval, amely a robotmanipulátor effektorához kötődik.

ψ – (pszi) - **csavarási szög**
θ – (théta) - **billentési szög**
φ – (fi) - **gördülési szög**

Az effektor orientációjának meghatározása

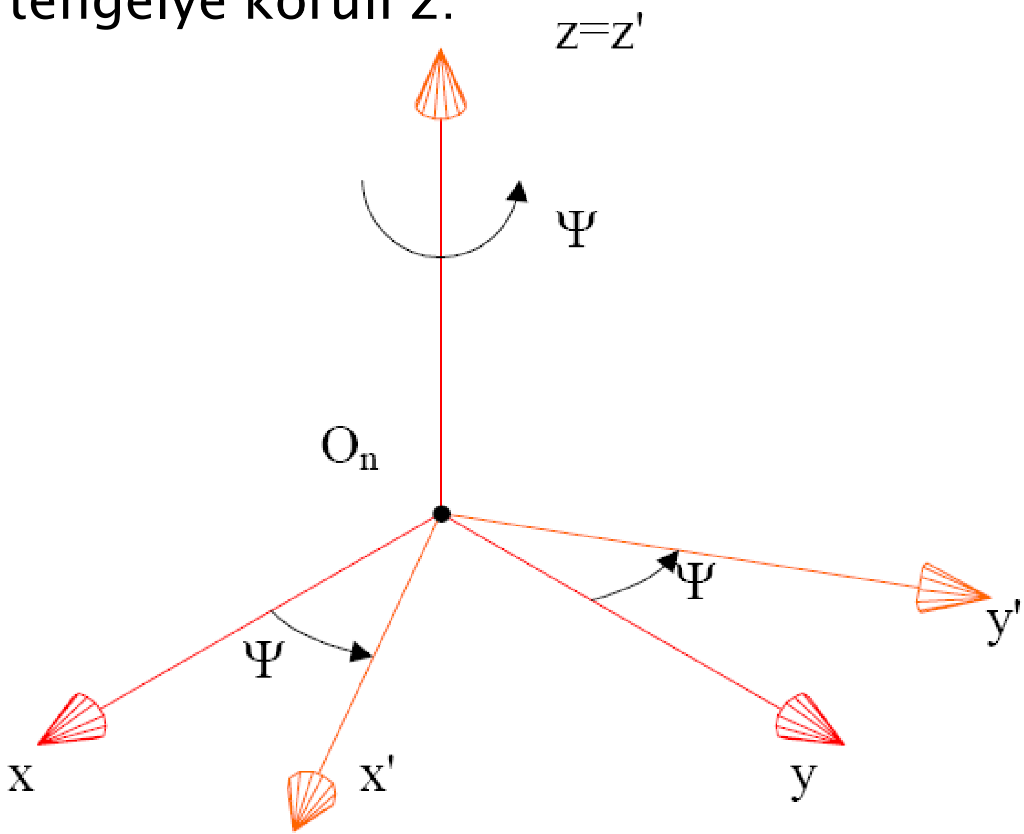
- A mozgó koordinátarendszer orientációja a nyugvóhoz viszonyítva leírható a következő rotációs mátrixszal ${}^{0}R_{n}$:

$$
{}^{0}\mathbf{R}_{n} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}
$$

A mozgó koordinátarendszer rotációja a nyugvó koordinátarendszerhez viszonyítva bemutatható a következő három rotációval:

Az effektor orientációjának meghatározása

- 1. A mozgó $O_n xyz$ koordinátarendszer első rotációja a **csavarási** ψ (pszi) tengelye körüli z:

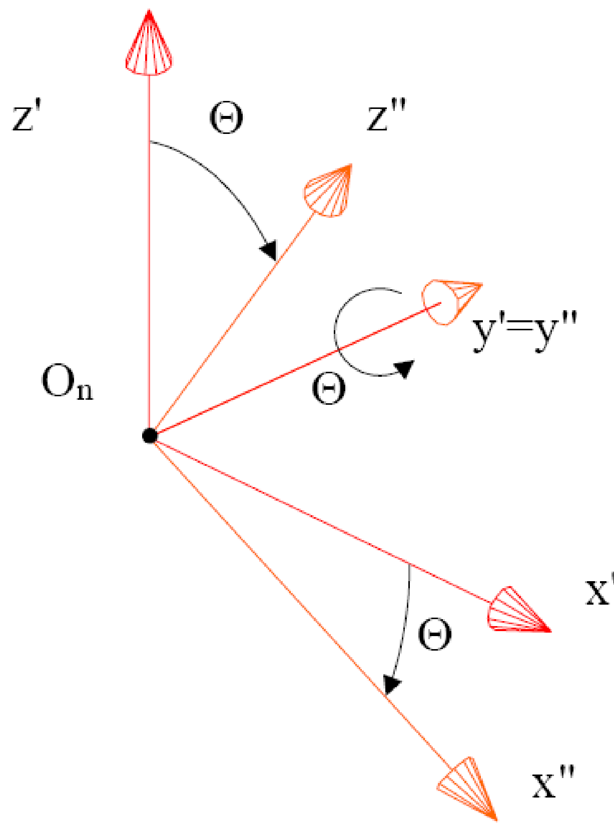


$$\mathbf{R}(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ábra 1. A mozgó koordinátarendszer rotációja a csavarási ψ szög szerint

Az effektor orientációjának meghatározása

- 2. Rotáció mozgó $O_n x'y'z'$ koordinátarendszer második rotációja a θ (théta) **billentési** szög szerint, amely az y' tengelye körüli.

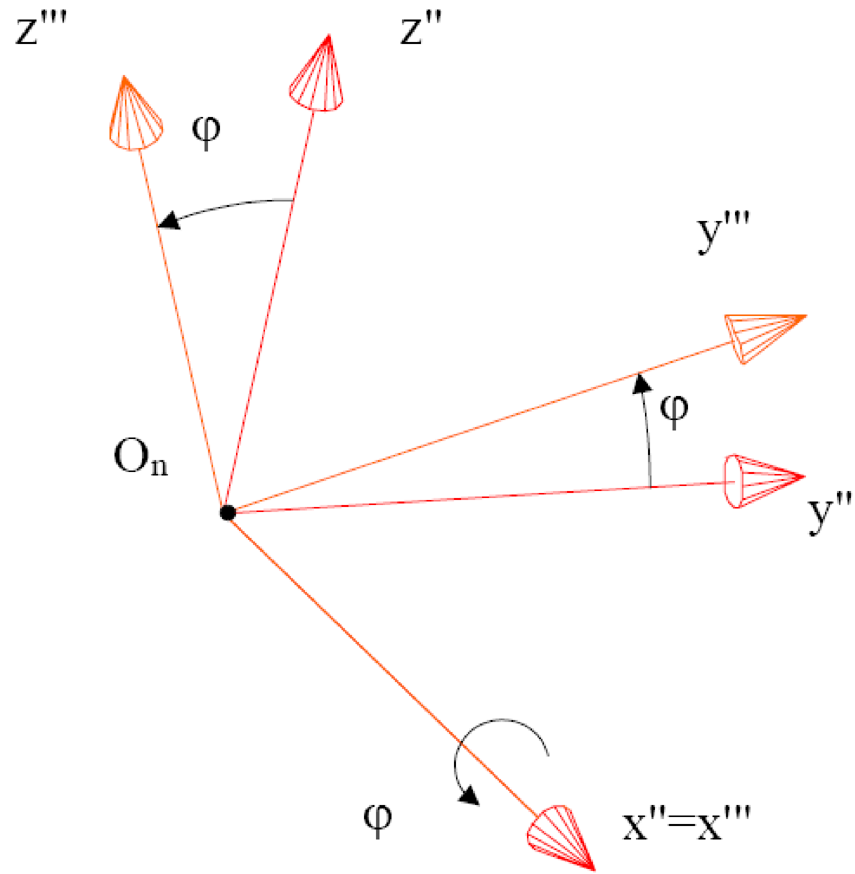


$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ábra 2. Rotáció mozgó koordinátarendszer második rotációja a θ billentési szög szerint

Az effektor orientációjának meghatározása

- 3. Rotáció mozgó $O_n x''y''z''$ koordinátarendszer a **gördülő** φ szög (fi) tengelye körüli x'' :



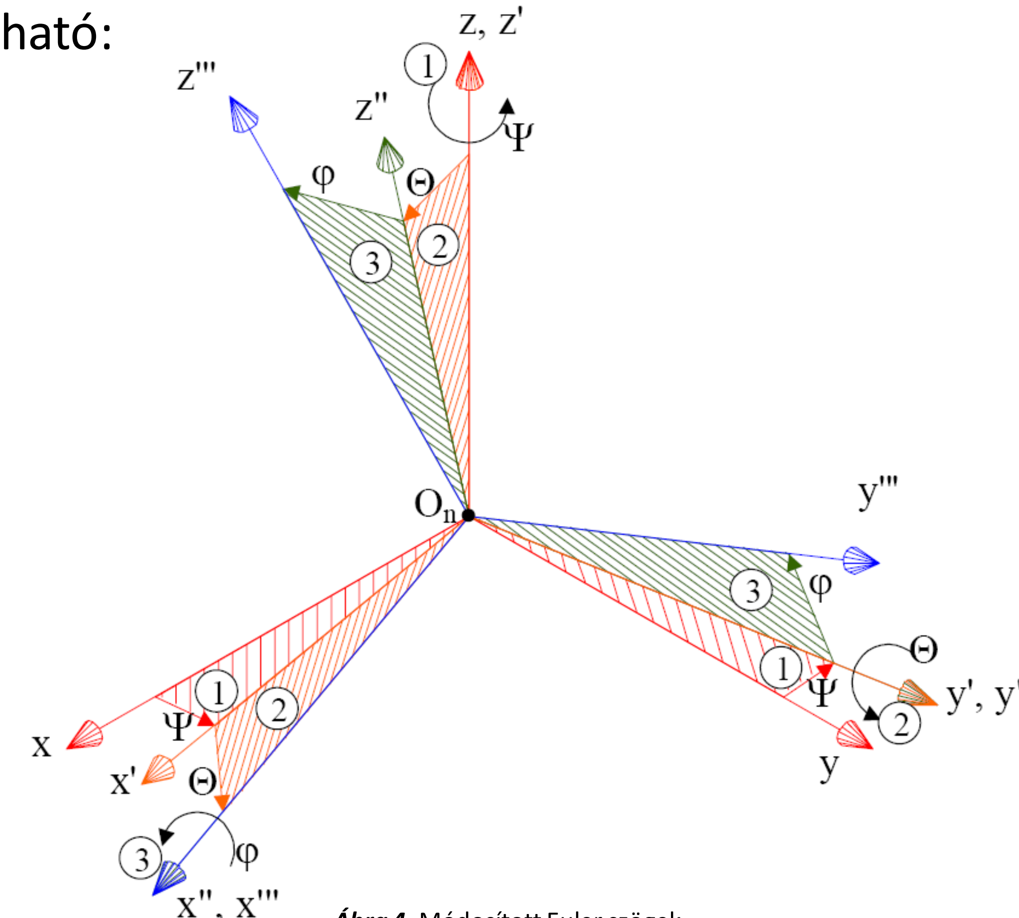
$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ábra 3 A mozgó koordinátarendszer harmadik rotációja a forgatási φ szög szerint

Az effektor orientációjának meghatározása

- A felírt rotációs mátrixokat (1), (2) és (3) számozásnak felel meg, a mátrix szorzásokat elvégezve felírható:

$$^{0}\mathbf{R}_{n} = \mathbf{R}(\psi)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\varphi)$$



Ábra 4. Módosított Euler szögek

Az effektor orientációjának meghatározása

- A rotációs mátrixok helyetesítésével a következő ${}^0R_n$ mátrixot kapjuk:

$$
{}^{0}\mathbf{R}_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{R}_{n} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}
$$

Az effektor orientációjának meghatározása

- A mátrixegyenlet egyes elemeit egyenlővé téve, felírható:

$$\begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi c\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$e_{1x} = \cos\psi\cos\theta$$

$$e_{1y} = \sin\psi\cos\theta$$

$$e_{1z} = -\sin\theta$$

$$e_{2x} = \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi$$

$$e_{2y} = \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi$$

$$e_{2z} = \cos\theta\sin\varphi$$

$$e_{3x} = \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi$$

$$e_{3y} = \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi$$

$$e_{3z} = \cos\theta\cos\varphi$$

Az effektor orientációjának meghatározása

- A ψ, θ és φ szögeket a következő módon határozhatjuk meg:

a) **csavarási szög** ψ:

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{e_{1y}}{e_{1x}} + 2k\pi$$

b) **billentési szög** θ:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{-e_{1z}}{e_{1x}\cos\psi + e_{1y}\sin\psi}\right] + 2k\pi$$

c) **gördülési szög** φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{e_{2z}}{e_{3z}} + 2k\pi$$

ψ – (pszi) - **csavarási szög**
θ – (théta) - **billentési szög**
φ – (fi) - **gördülési szög**

Az effektor orientációjának meghatározása

A robotmanipulátor effektorának orientáció meghatározását a ψ, θ és φ szögek kiszámításával befejezettnek tekintjük.

- Descartes féle derékszögű koordinátáinak (**pozicionálás**) és a
- három módosított Euler-féle szögeinek (**orientáció**) meghatározásával

a direkt kinematikai feladatot teljességben megoldottnak tekintjük.

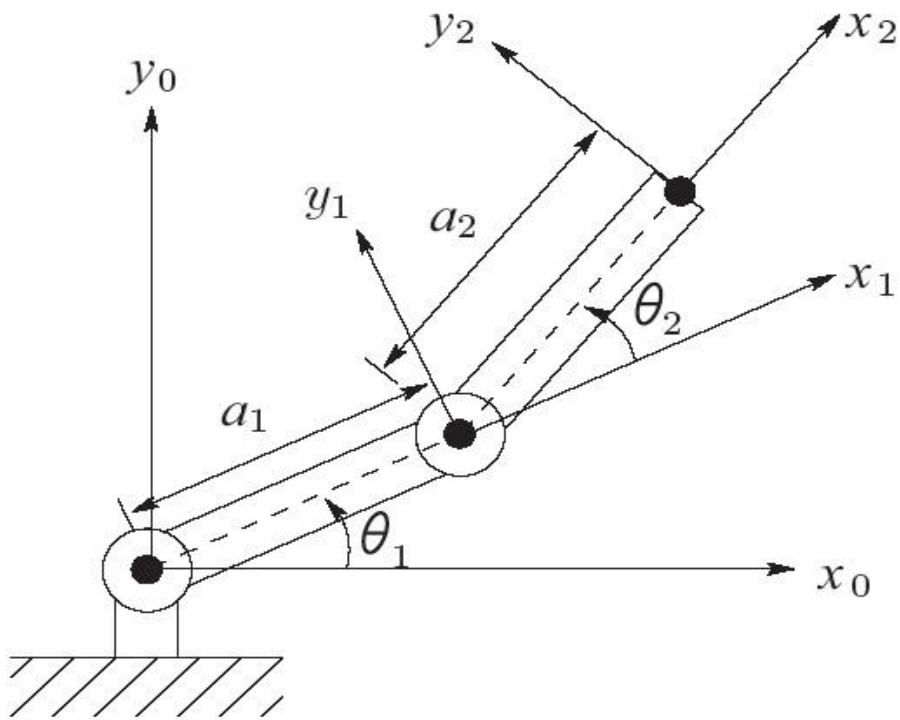
1. Feladat (D-H)

Dr. Simon János dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

1. feladat

- Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható síkbéli manipulátor közvetlen kinematikai mátrixát.



Ábra 1. Két szegmenses síkbéli manipulátor

Megoldás:

- A Denavit-Hartenberg féleparaméterek a következő táblában vannak megadva:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	0	a_1	0	1	0
2	q_2	0	a_2	0	1	0

$$
{}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

1. feladat

- Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahol a következő jelöléseket vezettük be:

$$C_1 = \cos q_1 \qquad C_2 = \cos q_2$$

$$S_1 = \sin q_1 \qquad S_2 = \sin q_2$$

1. feladat

- A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$$^{0}T_{2} = {}^{0}T_{1} * {}^{1}T_{2}$$

Vagyis:

$$^{0}T_{2} = \begin{bmatrix} C_1C_2 - S_1S_2 & -C_1S_2 - S_2C_2 & 0 & a_2(C_1C_2 - S_1S_2) + a_1C_1 \\ S_1C_2 - C_1S_2 & -S_1S_2 + C_1C_2 & 0 & a_2(S_1C_2 + C_1S_2) + a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. feladat

- Ha bevezetjük a váltásokat:

$$S_{12} = \sin(q_1 + q_2) = S_1 C_2 + C_1 S_2$$

$$C_{12} = \cos(q_1 + q_2) = C_1 C_2 - S_1 S_2$$

A következő érvényes:

$${}^{0}T_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. feladat

- Jegyezzük meg, hogy ezt megkaphatjuk közvetlenül is az koordinátarendszer koordinátarendszerre történő leképezésével, vagyis a fogó helyzetére érvényes:

$$x = a_1 C_1 + a_2 C_{12}$$

$$y = a_1 S_1 + a_2 S_{12}$$

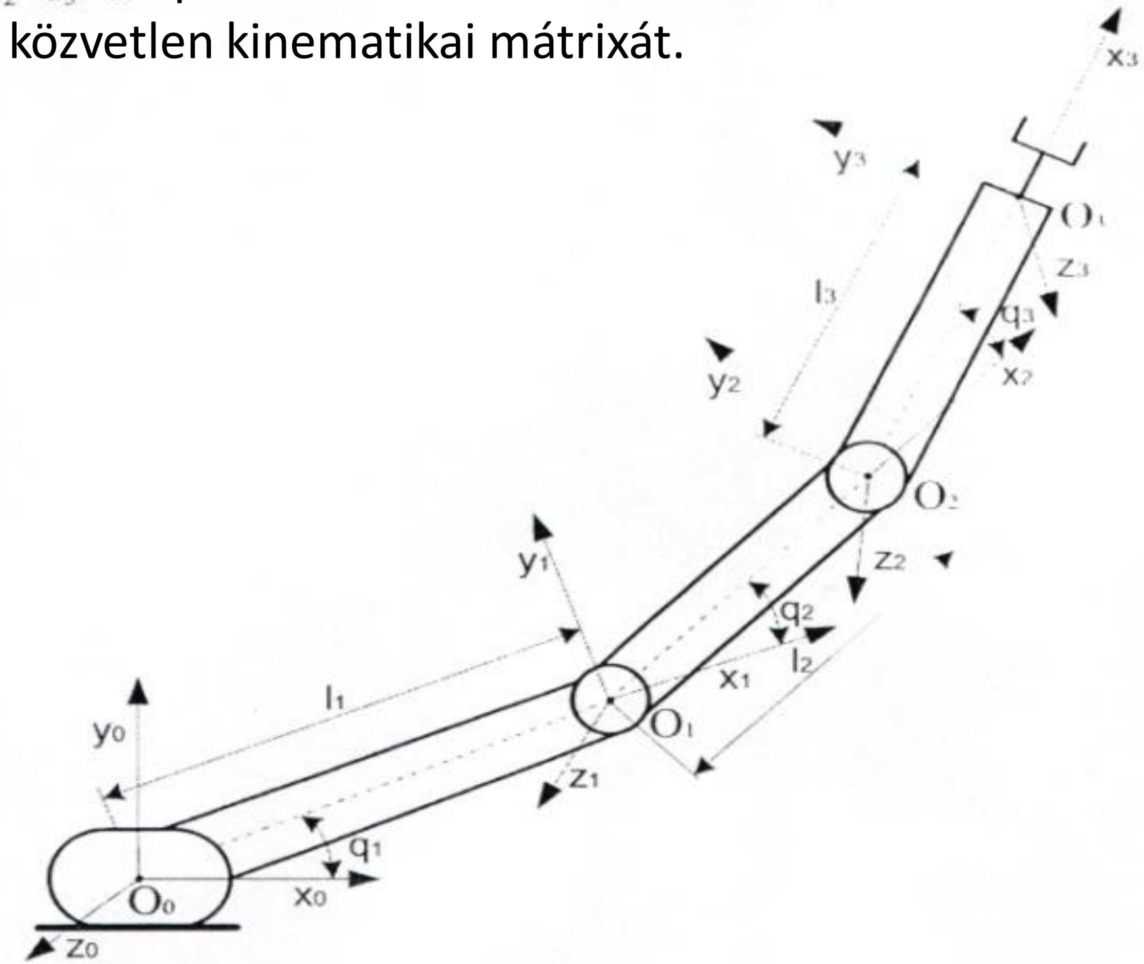
D-H Gyakorló feladatok

Dr. Simon János dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

2. feladat

- Meghatározni a DH paramétereket és leírni a alábbi ábrán látható síkbéli manipulátor közvetlen kinematikai mátrixát.



Ábra 1. Három szegmenses síkbéli manipulátor

2. feladat

- Megoldás:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	0	l_1	0	1	0
2	q_2	0	l_2	0	1	0
3	q_3	0	l_3	0	1	0

$$^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. feladat

- Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ahol a következő jelöléseket vezettük be:

$$ C_1 = \cos q_1 \qquad C_2 = \cos q_2 \qquad C_3 = \cos q_3 $$

$$ S_1 = \sin q_1 \qquad S_2 = \sin q_2 \qquad S_3 = \sin q_3 $$

2. feladat

- A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$$ {}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 * ({}^{1}T_2 * {}^{2}T_3) $$

Vagyis:

$$ {}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_3C_3 & 0 & l_3(C_2C_3 - S_2S_3) + l_2C_2 \\ S_2C_3 - C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & l_3(S_2C_3 + C_2S_3) + l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ha bevezetjük a váltásokat:

$$ S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2C_3 + C_2S_3 $$

$$ C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2C_3 - S_2S_3 $$

2. feladat

- A következő érvényes:

$$
{}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & l_2C_2 + l_3C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & l_2S_2 + l_3S_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 * {}^{1}T_3
$$

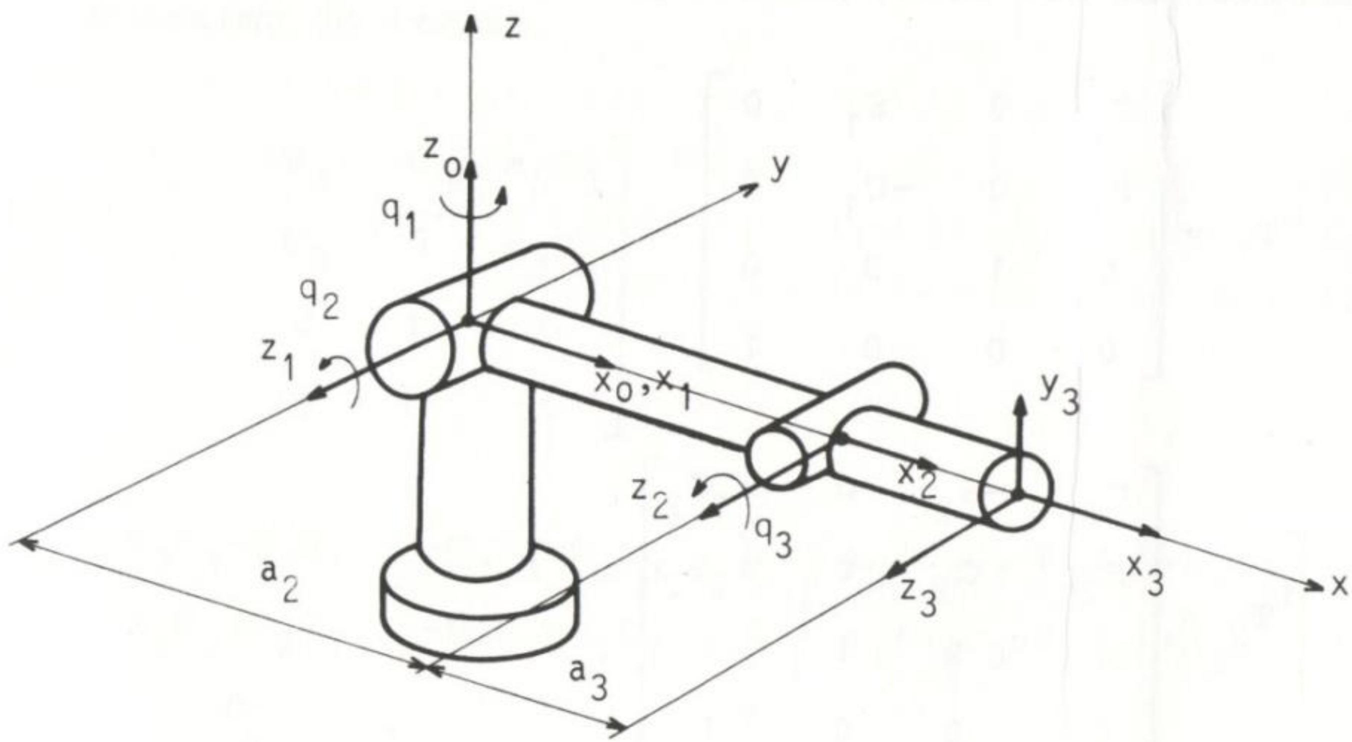
$$
{}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
x = l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123}
$$

$$
y = l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123}
$$

3. feladat

- Meghatározni a képen látható három szabadságfokú manipulátor alap beállításának DH paramétereit:



Ábra 2. Három szabadságfokú manipulátor

3. feladat

- Megoldás:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	q_1	90°	0	0	0	1
2	q_2	0	a_2	0	1	0
3	q_3	0	a_3	0	1	0

$$
{}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. feladat

- Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg az alábbi képlet alapján:

$$^{0}T_3 = {}^{0}T_1 * ({}^{1}T_2 * {}^{2}T_3)$$

3. feladat

- Vagyis:

$$ {}^{1}T_3 = {}^{1}T_2\,{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_2C_3 & 0 & a_3(C_2C_3 - S_2S_3) + a_2C_2 \\ S_2C_3 + C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & a_3(S_2C_3 + C_2S_3) + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ha bevezetjük a váltásokat:

$$ S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2C_3 + C_2S_3 $$

$$ C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2C_3 - S_2S_3 $$

3. feladat

- A következő érvényes:

$$
{}^{1}T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & a_3C_{23} + a_2C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23} + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

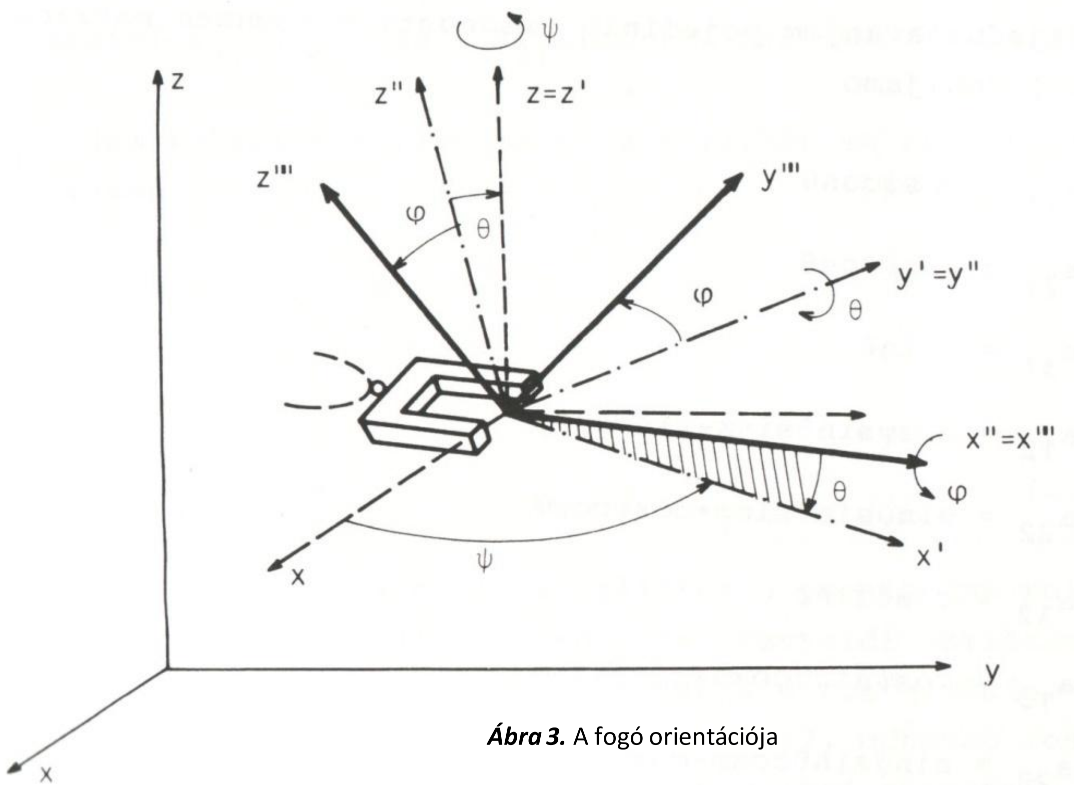
Végül eljutunk a következő megoldáshoz:

$$
{}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & C_1(a_3C_{23} + a_2C_2) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & S_1(a_3S_{23} + a_2S_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23} + a_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. feladat

- **A fogó orientációja:**

A fogókar orientációjának leírása a manipulátor nem mozgó koordinátarendszeréhez képest három külső koordináta segítségével leggyakrabban a három Euler féle szögelfordulás segítségével történik.



Ábra 3. A fogó orientációja

3. feladat

$$ {}^{0}A_n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}A_n = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} $$

3. feladat

- A mátrix egyes elemeinek kiemelésekor a következőt kapjuk:

$$a_{11} = \cos\psi \cos\theta$$
$$a_{21} = \sin\psi \cos\theta$$
$$a_{31} = -\sin\theta$$
$$a_{12} = \cos\psi \sin\theta \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi$$
$$a_{22} = \sin\psi \sin\theta \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi$$
$$a_{32} = \cos\theta \sin\varphi$$
$$a_{13} = \cos\psi \sin\theta \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi$$
$$a_{23} = \sin\psi \sin\theta \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi$$
$$a_{33} = \cos\theta \cos\varphi$$

$$\psi = arctg \frac{a_{21}}{a_{11}} + k\pi$$

$$\theta = arctg \frac{-a_{31}}{a_{11}\cos\psi + a_{21}\sin\psi} + 2k\pi$$

$$\varphi = arctg \frac{a_{32}}{a_{33}} + 2k\pi$$

Mivel már meghatároztuk a ${}^{0}T_{n}$ mátrixot a megadott belső koordinátákkal, valamint az Euler féle szögeket is, a közvetlen kinematikai probléma teljes mértékben megoldódott.

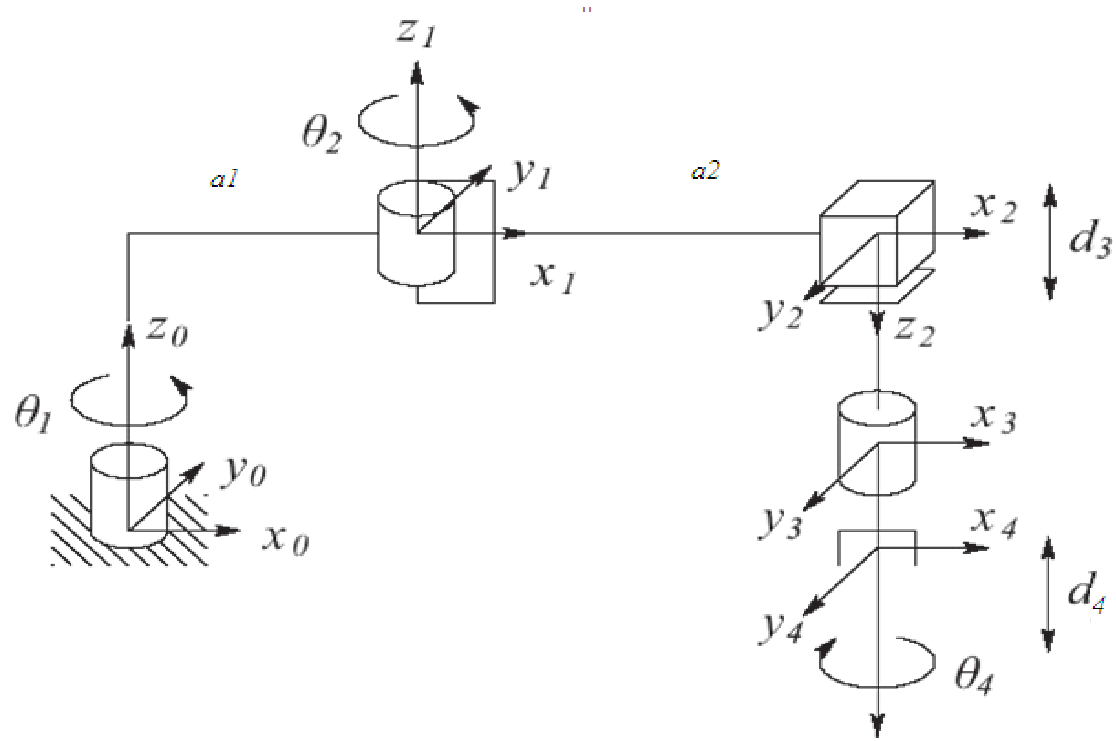
D-H Gyakorló feladatok

Dr. Simon János dipl. ing.
simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

4. feladat

- Meghatározni a négy szabadságfokú SCARA (Selective Compliant Assembly Robot Arm) manipulátor DH paramétereit és a robotkar alap koordinátarendszer transzformációs mátrixát.

Ábra 1. Toshiba TH1050 Scara Robot



4. feladat

- Megoldás:

link	a_i	α_i	d_i	q_i	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
1	a_1	0	0	q_1	*1*	*0*
2	a_2	0	0	q_2	*1*	*0*
3	0	180˚	d_3	0	*-1*	0
4	0	0	d_4	q_4	*1*	*0*

4. feladat

- Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. feladat

- A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával (utolsótól az elsőig) kapjuk meg az alábbi képlet alapján.

$$T_4^0 = A_1 \cdot (A_2 \cdot (A_3 \cdot A_4))$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = a_1c_1 + a_2c_{12}$$

$$y = a_1s_1 + a_2s_{12}$$

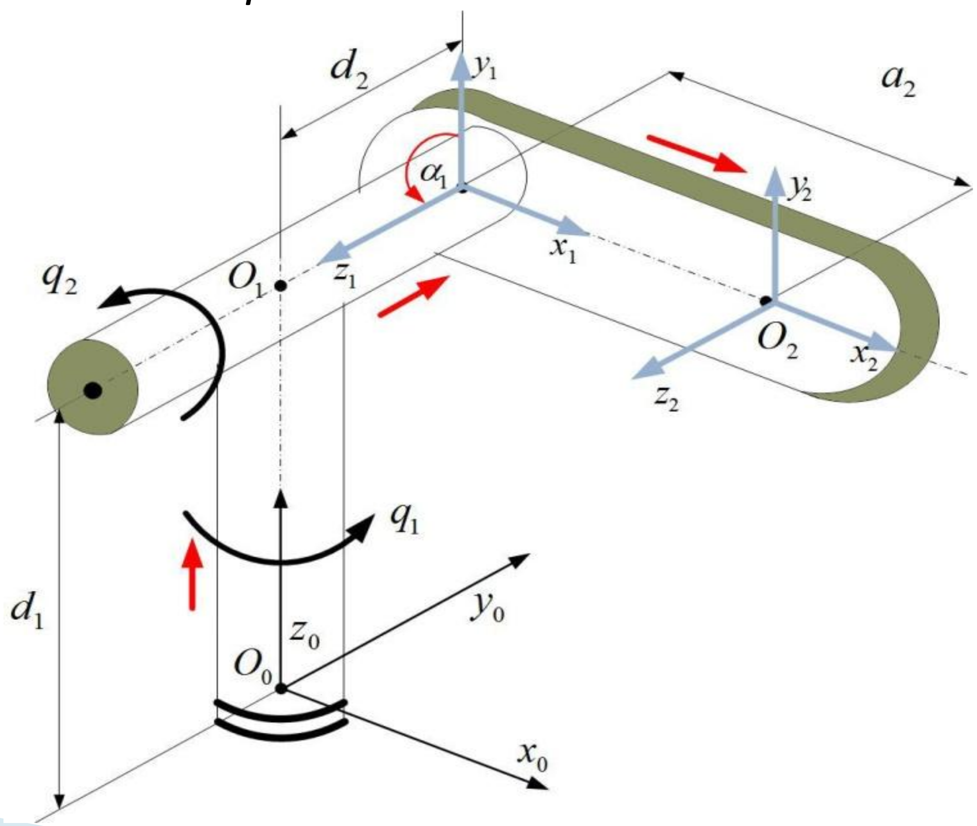
$$z = -d_3 - d_4$$

5. feladat

- Az ábrán látható egy alap beállítású manipulációs robot. Meghatározni a DH paramétereket, és leírni a képen látható PUMA manipulátor alapbeállításához tartozó homogén transzformációs mátrixot:

d1=**0.5m** *q1*=3**0˚**

d2=**0.2m** *a2*=**0.6m** *q2*=**60˚**



5. feladat

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	*0*	90˚	*d1*	*q1*
2	*a2*	0	*-d2*	*q2*

A rotációs szegmensek transzformációs mátrixának általános alakját figyelembe véve, és ismerve a táblázat paramétereit, a következőt írhatjuk fel:

$$ {}^{0}D_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{1}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

5. feladat

- A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg. Ezt a szorzást az utolsó szegmenstől indulva az elsővel befejezőleg hajtjuk végre, a következő képlet alapján:

$$ {}^{0}D_2 = {}^{0}D_1 * {}^{1}D_2 $$

Így a következő kifejezést kapjuk:

$$ {}^{0}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_2 \cos q_1 & \sin q_1 & a_2 \cos q_1 \cos q_2 - d_2 \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 & a_2 \sin q_1 \cos q_2 + d_2 \cos q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

5. feladat

- Miután megkaptuk a ${}^{0}D_2$ mátrix numerikus értékeit, lehetőségünk nyílik meghatározni a 3 külső koordinátát, melyek a fogókar orientációját írják le:

$$
{}^{0}D_2 = \begin{bmatrix} & {}^{0}A_2 & & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$X_{02} = a_2 \cos q_1 \cos q_2 - d_2 \sin q_1$$

$$Y_{02} = a_2 \sin q_1 \cos q_2 + d_2 \cos q_1$$

$$Z_{02} = a_2 \sin q_2 + d_1$$

Angle	**Sin**	**Cos**	***Tan=Sin/Cos***
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

5. feladat

- A kapott kifejezésekbe behelyettesítjük a következő értékeket:

$$X_{02} = 0.6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0.2\frac{1}{2} = 0.1598m$$

$$Y_{02} = 0.6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3232m$$

$$Z_{02} = 0.6\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 = 1.0196m$$

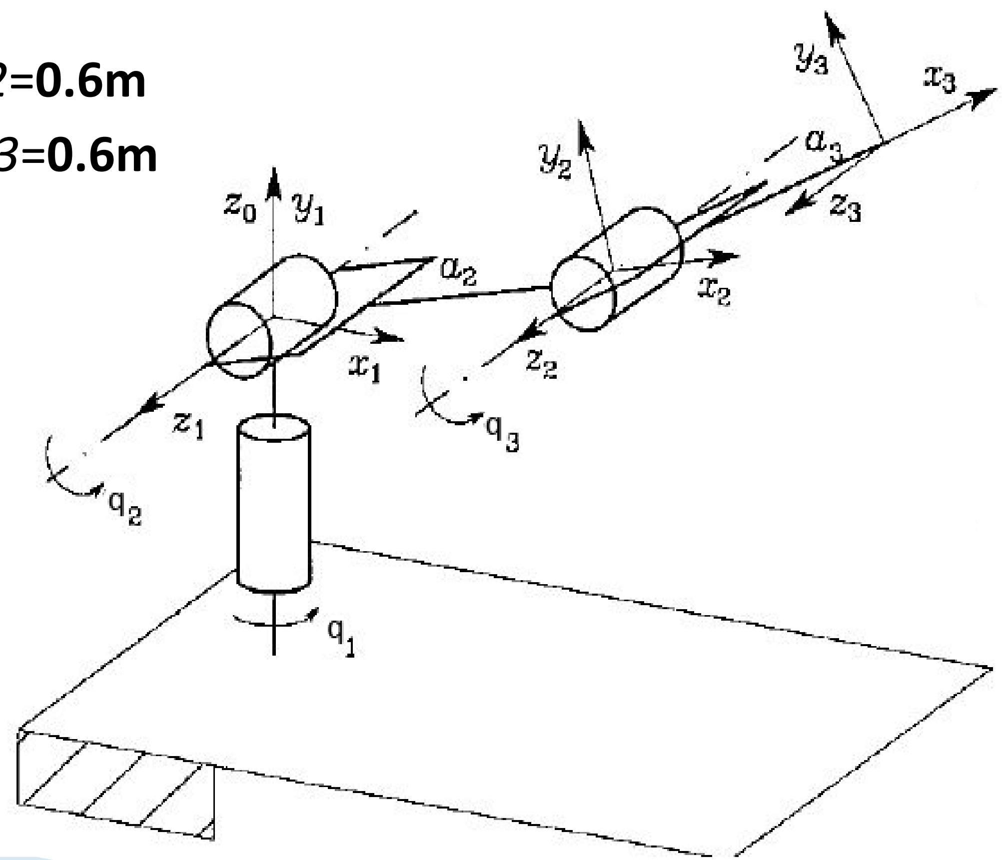
6. feladat

- Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható három szabadságfokú manipulátor alap beállításának homogén transzformációs mátrixát:

q1=**30˚**

q2=**60˚** *a2*=**0.6m**

q3=**30˚** *a3*=**0.6m**



Ábra 1. Három szabadságfokú manipulátor (RRR)

6. feladat

Megoldás:

A Denavit-Hartenberg féle paraméterek a következő táblában vannak megadva:

Szegmensek	Θ_i	α_i	a_i	d_i
1	q_1	90	0	0
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	0

Az egyes szegmensek közötti homogén transzformációs mátrixok a következők:

$$
{}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

6. feladat

- A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával (utolsótól az elsőig) kapjuk meg az alábbi képlet alapján.

$$T_3^0 = {}^0A_1 * ({}^1A_2 * {}^2A_3)$$

Vagyis:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_2 & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{23} = \sin(q_2 + q_3) = S_2 C_3 + C_2 S_3$$

$$C_{23} = \cos(q_2 + q_3) = C_2 C_3 - S_2 S_3$$

6. feladat

- Tehát:

q1=**30˚**

q2=**60˚** *a2*=**0.6m**

q3=**30˚** *a3*=**0.6m**

$$x_{03} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$y_{03} = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$z_{03} = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$x_{03} = \frac{\sqrt{3}}{2}(0.6\cdot\frac{1}{2} + 0.6\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2})) = 0.256m$$

$$y_{03} = \frac{1}{2}(0.6\cdot\frac{1}{2} + 0.6\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2})) = 0.15m$$

$$z_{03} = 0.6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.6\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}) = 1.12m$$

SZABADKAI MŰSZAKI SZAKFŐISKOLA

ROBOTIKA

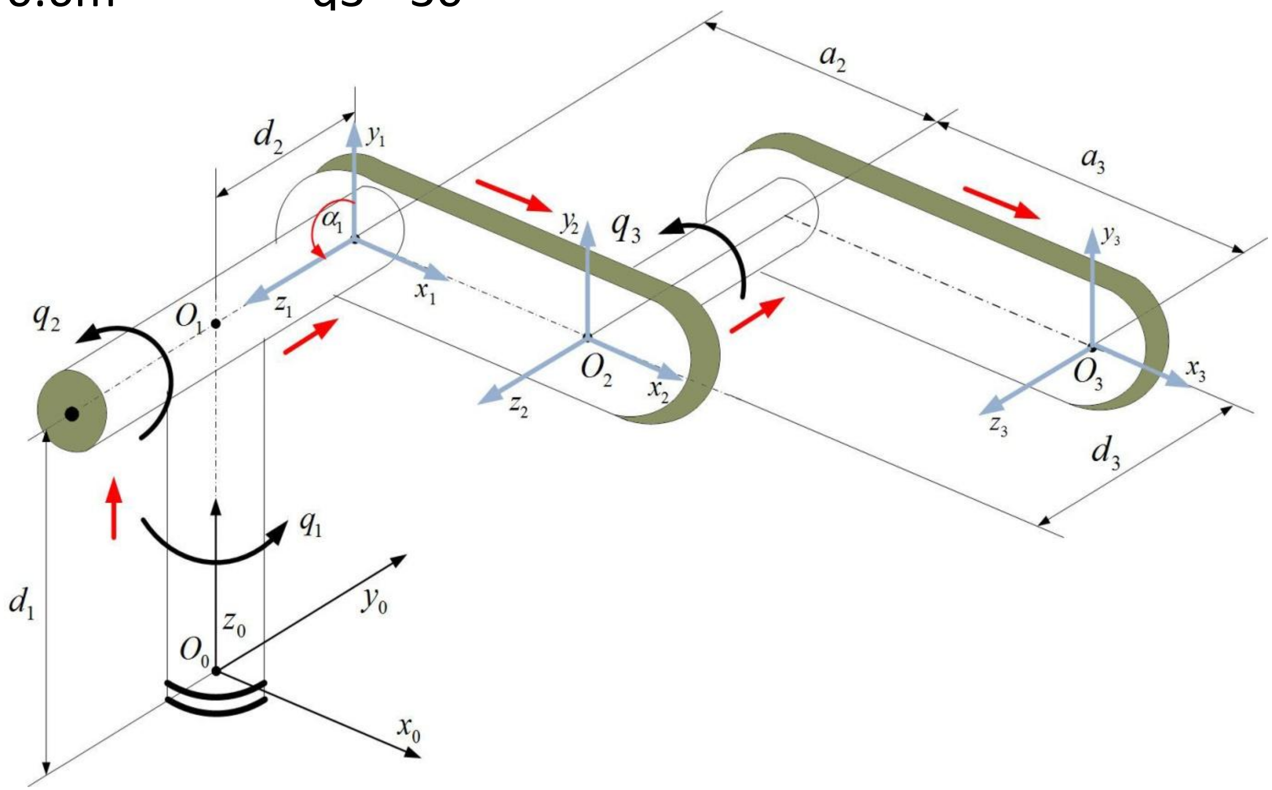
D-H Gyakorló feladatok

Dr. Simon János dipl. ing.

simon@vts.su.ac.rs
Subotica Tech
Department of Informatics

7. feladat

- Meghatározni a DH paramétereket, és leírni a képen látható PUMA manipulátor alapbeállításához tartozó homogén transzformációs mátrixot:
- $d1=0.5m$ $q1=0^\circ$
- $d2=0.2m$ $a2=0.6m$ $q2=60^\circ$
- $d3=0.2m$ $a3=0.6m$ $q3=-30^\circ$



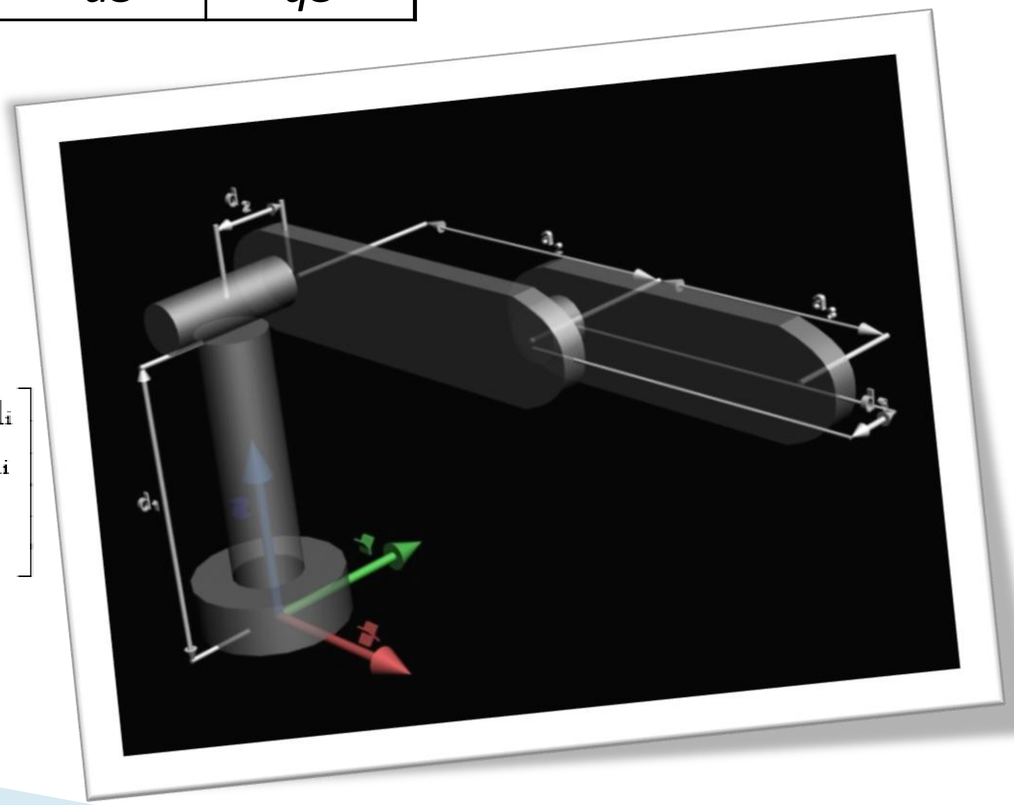
Ábra 1. Puma RRR

7. feladat

- Megoldás:

link	ai	αi	*di*	*qi*
1	*0*	90˚	*d1*	*q1*
2	*a2*	0	*-d2*	*q2*
3	*a3*	0	*-d3*	*q3*

$$
{}^{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos\alpha_i & \sin q_i \sin\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \sin\alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



7. feladat

- Most alakítsuk ki a manipulátor szomszédos szegmensei közötti homogén transzformációs mátrixokat. A rotációs szegmensek transzformációs mátrixának általános alakját figyelembe véve és ismerve a táblázat paramétereit, a következőt írhatjuk fel:

$$^{0}D_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$^{1}D_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$^{2}D_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & a_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & a_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

7. feladat

- A fogókar koordinátarendszere és a nem mozgó rész közötti homogén transzformációs mátrixot, a mátrixok szorzásával kapjuk meg. Ezt a szorzást az utolsó szegmenstől indulva az elsővel befejezőleg hajtjuk végre, a következő képlet alapján:

$$^{0}D_{3} = {}^{0}D_{1} * ({}^{1}D_{2} * {}^{2}D_{3})$$

Így a következő kifejezést kapjuk meg:

$$^{1}D_{3} = \begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3 & 0 & a_3(\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) + a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 & 0 & a_3(\sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3) + a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

7. feladat

- Ahol a következő jelöléseket vezetjük be:

$$c_{23} = \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3$$

$$s_{23} = \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3$$

$$^{1}D_3 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} \\ s_{23} & -c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & -(d_2 + d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$^{0}D_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - s_1(d_2 + d_3) \\ s_1 s_{23} & s_1 c_{23} & -c_1 & s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) + c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23} & c_{23} & 1 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

7. feladat

- Miután megkaptuk a ${}^{0}D_3$ mátrix numerikus értékeit, lehetőségünk nyílik meghatározni a 3 külső koordinátát, melyek a fogókar orientációját írják le.

$$ {}^{0}D_3 = \begin{bmatrix} & & & x \\ & {}^{0}A_3 & & y \\ & & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$X_{03} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) - s_1(d_2 + d_3)$$

$$Y_{03} = s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) + c_1(d_2 + d_3)$$

$$Z_{03} = a_2s_2 + a_3s_{23} + d_1$$

A kapott kifejezésekbe behelyettesítjük a következő értékeket:

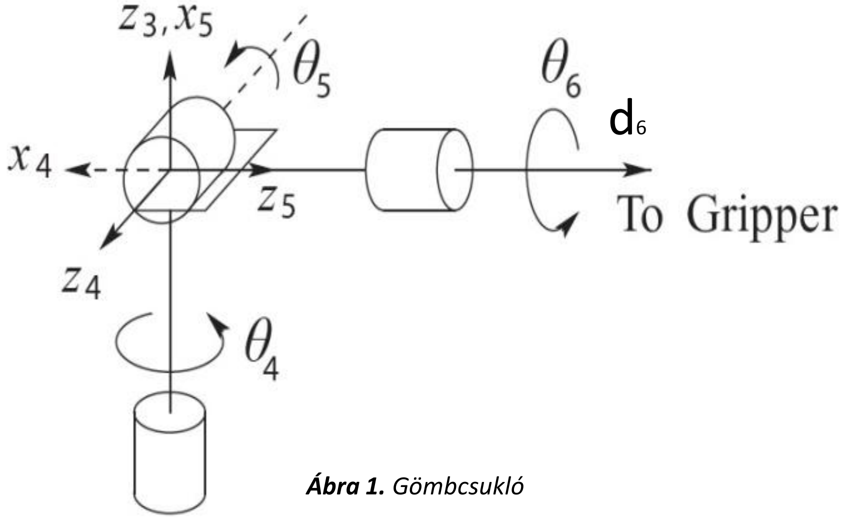
$$X_{03} = 1(0.6 \cdot \frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - 0(0.5 + 0.2) = 0.8196m$$

$$Y_{03} = 0 + 1(0.2 + 0.2) = 0.4m$$

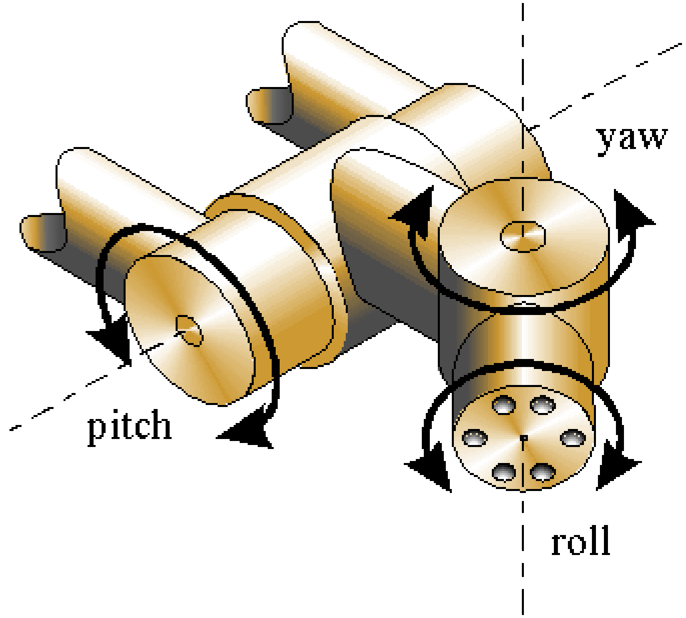
$$Z_{03} = 0.5 + 0.6\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.6\frac{1}{2} = 1.3196m$$

8. feladat

- Meghatározni a DH paramétereket és leírni a következő ábrán látható gömbcsukló homogén transzformációs mátrixát:



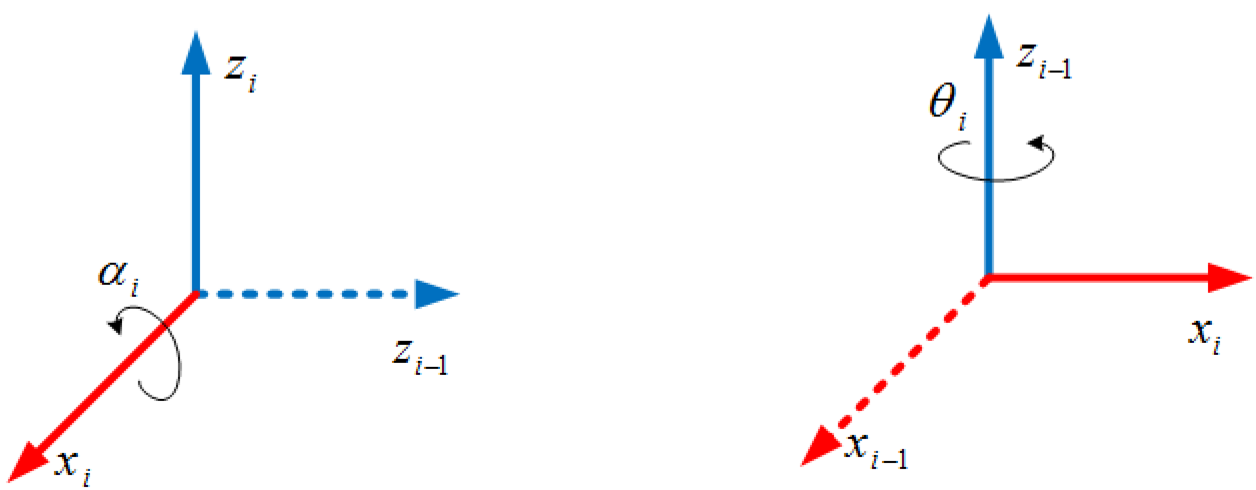
***Ábra 1.** Gömbcsukló*



8. feladat

- **Megoldás:**

link	*ai*	αi	*di*	*qi*
4	0	-90	0	*q4*
5	0	90	0	*q5*
6	0	0	*d6*	*q6*



Ábra 2. *Pozitív irány az alpha és theta szögek esetében*

8. feladat

- Most alakítsuk ki a manipulátor szomszédos szegmensei közötti homogén transzformációs mátrixokat.

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis

$$T_6^3 = A_4(A_5 A_6)$$

8. feladat

Vagyis:

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 c_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$